UMA *ENGENHARIA DIDÁTICA* PARA O ENSINO DO CÁLCULO: O CASO DA IDENTIFICAÇÃO DE PONTOS EXTREMANTES DA FUNÇÃO F(x;y)

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE/Brasil
fregis@ifce.edu.br
Universitário

Palavras- chave: Engenharia Didática. Cálculo. Pontos extremantes. Software.

Resumo
Investigações em torno do ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial a Várias Varáveis – CVV ainda são registradas de forma escassa no Brasil. Neste estudo, apresentamos uma *Engenharia Didática* – ED (Artigue, 1995a, 1995b) com o tema envolvendo a identificação dos pontos extremantes de uma função $f(x,y)$. Assim, apoiamos a fase de experimentação da ED nos pressupostos da metodologia de ensino conhecida no Brasil como *Sequência Fedathi* – SF. Deste modo, produzimos um clima de investigação em uma atividade estruturada, na qual, a exploração didática do *software* CAS *Maple* mostrou-se essencial no sentido de se evitar a algoritmização da tarefa proposta. A exploração das fases previstas pela SF proporcionou o emprego dos conhecimentos do CUV no contexto do CVV, o que fortalece o processo de transição interna do Cálculo (Alves, 2011). Na fase de validação interna, registramos que os alunos confrontaram os dados obtidos por intermédio da visualização, identificação de pontos de inflexão e pontos críticos no IR^3 com os dados obtidos pelas inferências lógicas e o uso do teste da Hessiana na identificação dos pontos extremantes no interior da superfície descrita pela função $f(x,y)=x^3y-xy^3$. Por fim, os alunos confrontam os dados fornecidos pelo computador com os dados obtidos por meio da aplicação de teoremas.

Introdução

O ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real - CUV é objeto de estudo há décadas. Vários escritos científicos, sejam realizados no Exterior ou no Brasil, indicam elementos preocupantes que, apesar dos esforços e da proposição de possíveis indicadores com vista à superação de sérios entraves detectados no ensino e na aprendizagem do CUV, observamos que problemáticas inerentes a este contexto de interesse persistem até nossos dias.

Por outro lado, em relação ao ensino e a aprendizagem do Cálculo a Várias Variáveis - CVV, sobretudo no Brasil, não percebemos a mesma atenção e o mesmo vigor, no que tange ao surgimento de pesquisas. Assim, malgrado essa escassez aparente relativa ao desenvolvimento de pesquisas no âmbito do CVV, conjecturamos que muitos dos obstáculos, já identificados há algum tempo, no contexto do ensino do CUV, ocorrem também no CVV, com agravantes proporcionados pelas próprias características intrínsecas deste conteúdo, como, por exemplo, as simbologias.

Sobre o ensino do cálculo

No estudo do CVV, as mudanças simbólicas são drásticas, como evidenciamos na figura 1 que descreve o processo de *transição interna* analisada por Alves (2011).

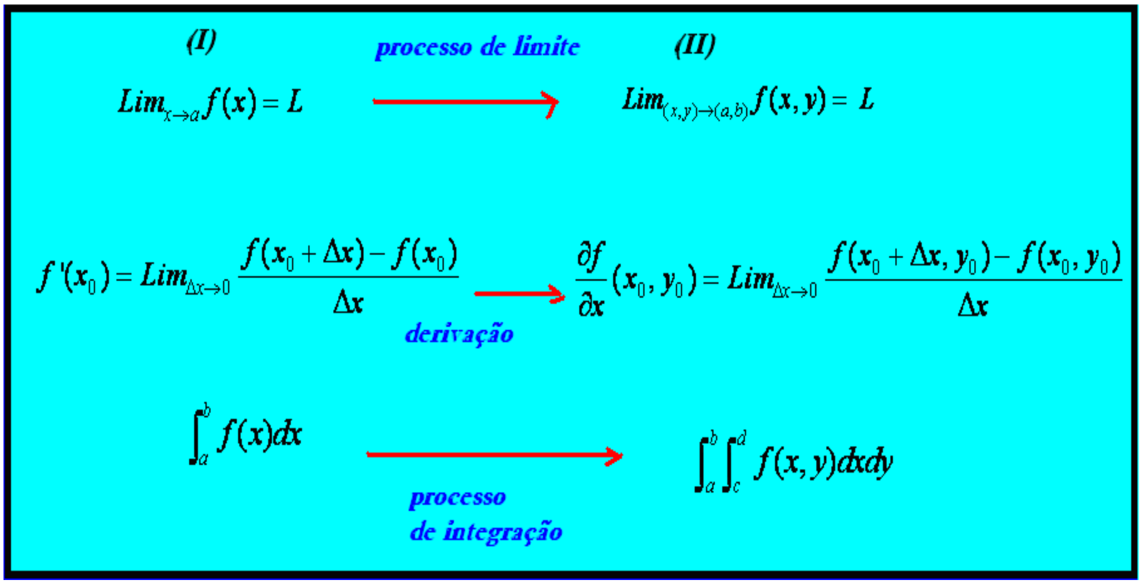


Figura 12: Quadro de transição interna do CUV para o CVV (ALVES, 2011)

Em sua tese, Alves indica os *elementos de transição* e os *elementos de ruptura* relacionados ao contexto de *transição interna* do CUV para o CVV. Tais elementos podem ser identificados de modo intimamente vinculados aos seguintes fatores: (i) um sistema de representação simbólica mais complexo do que o outro; (ii) as argumentações envolvidas nas demonstração dos teoremas do CVV envolvem ideias generalizadas dos *teoremas* do CUV, inclusive a natureza das *definições formais* envolvidas; (iii) a mudança da natureza geométrica dos objetos matemáticos envolvidos; (iv) a mudança de significação conceitual; (v) o surgimento de *regras operatórias* semelhantes, tanto no CUV, como no CVV; (vi) *regras operatórias* válidas num contexto e inapropriadas em outro; (vii) teoremas do CUV sem interpretações semelhantes no CVV e vive-versa; (viii) *definições formais* que envolvem uma mudança de significado de acordo com a teoria formal e (ix) generalização de noções e *definições formais* no IR^3 ou IR^n.

Na medida em que exploramos o uso da tecnologia de modo adequado, os *elementos de ruptura* podem funcionar como *elementos de transição*, uma vez que o aprendiz apóia uma nova aprendizagem no CVV nos conhecimentos já adquiridos do contexto anterior. Diante disto, apresentamos nosso problema de investigação.

Problema da pesquisa

O problema de investigação foi desenvolver uma *Engenharia Didática* que promova situações didáticas envolvendo a identificação de *pontos extremantes* para funções do tipo $z = f(x,y)$. Observamos que no estudo de funções do tipo $z = f(x)$, utilizamos, de modo tradicional, as noções de *pontos críticos* e *ponto de inflexão*. Com o uso do *CAS Maple*, exploramos estas noções no espaço IR^3 de modo diferenciado.

Hipóteses da pesquisa

Desde que apoiamos nossas ações nos pressupostos da ED, então, assumimos determinadas hipótese de trabalho ao longo de todo o processo investigativo:

1ª) Com o uso do *software*, os alunos conseguem avaliar a existência de pontos extremantes, sem nenhum recurso algorítmico e com apoio da visualização;

2ª) O uso da tecnologia proporciona a evolução de habilidades cognitivas vinculadas à percepção de propriedades geométricas.

Esta ultima hipótese foi formulada com a preocupação de se evitar um ensino que prioriza o quadro algorítmico, como assim critica Artigue (1995a, 1995b).

Objetivos da pesquisa

Este trabalho teve como objetivo geral implementar uma ED como metodologia de pesquisa, envolvendo a identificação dos pontos extremantes de uma função $z = f(x, y)$. E para alcançar este objetivo geral, descrevemos ainda os seguintes objetivos específicos: promover a habilidade de visualização da identificação de *pontos críticos* e *pontos de inflexão* no espaço IR^3; promover a habilidade de visualização relativa à compreensão da noção de diferenciabilidade.

Metodologia da pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada foi a *Engenharia Didática* - ED, a qual apresenta dois níveis de pesquisa, a *microengenharia* e a *macroengenharia*. A pesquisa em *microengenharia* apresenta um olhar mais restrito, na medida em que se interessa pelas relações e fenômenos que ocorrem em sala de aula e "são mais fáceis de desenvolver na prática" (ARTIGUE, 1995b, p. 36). Neste nível, podemos estudar determinado assunto no âmbito da complexidade da classe. No outro nível, deparamos dificuldades metodológicas e institucionais

Esta pesquisa é uma *microengenharia* que busca desenvolver uma *Engenharia Didática* no ensino do CUV, relativo à construção de gráficos de funções a partir das propriedades de suas derivadas. Nossa ED apresenta um método de validação interna, que não emprega métodos estatísticos comparativos. Apresenta também *variáveis macro-didáticas* e *variáveis micro-didáticas*. As primeiras dizem respeito a organização global da ED, enquanto que as *variáveis micro-didáticas* relacionam-se com uma fase específica da ED.

Além disso, nossa ED se apoia em sua *fase de experimentação* na *Sequência Fedathi* – SF que tem sido usada em vários estudos (ALVES, 2011; 2012; ALVES & BORGES NETO, INGAR, 2012), deste modo, as atividades foram exploradas em sala de aula de acordo com as fases de ensino previstas na mesma. Um caráter importante a salientar que a SF proporciona a criação de um ambiente experimental para a investigação em Matemática, deste modo, o aluno pode reproduzir, em escala elementar, passos semelhantes aos executados pelo matemático profissional. Passaremos então a descrição das quatro fases de nossa ED.

Fases da engenharia didática

1 *Análises Preliminares*

De modo sistemático, conforme Artigue (1995, p. 249-250), nesta etapa consideramos: uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino; análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; análise das concepções dos alunos e, por fim, análise do ensino atual e seus efeitos. Por fim, todos os elementos anteriores levaram em consideração os objetivos desta investigação. As *análises preliminares* foram realizadas através de pesquisa em livros didáticos, artigos de congressos, vídeos, buscando autores que poderiam indicar a

2 Concepção e *Análise a Priori*

Nesta fase, elaboramos e analisamos uma sequência de atividades com a finalidade de responder às questões e validar as hipóteses levantadas na fase anterior. Como características destas cinco atividades, sublinhamos as seguintes características: os alunos entendem facilmente os dados do problema e podem se engajar na situação; os conhecimentos dos alunos são insuficientes para a resolução completa. Ademais, "as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos." (ALMOULOUD, 2007, p. 174).

Por fim, na *análise a priori*, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever o comportamento dos alunos, o que se coaduna com o que prevê Artigue (1995).

Atividade 1: Observe a figura abaixo e responda justificando cada item na sequencia. Consideramos a região no plano $R = [-3,3] \times [-3,3]$ e a função $f(x, y) = x^3 y - xy^3$. Identificar os *pontos críticos*, *pontos de inflexão* e *pontos extremantes* na região interior da superfície. Descrever a natureza do ponto $(2,1)$.

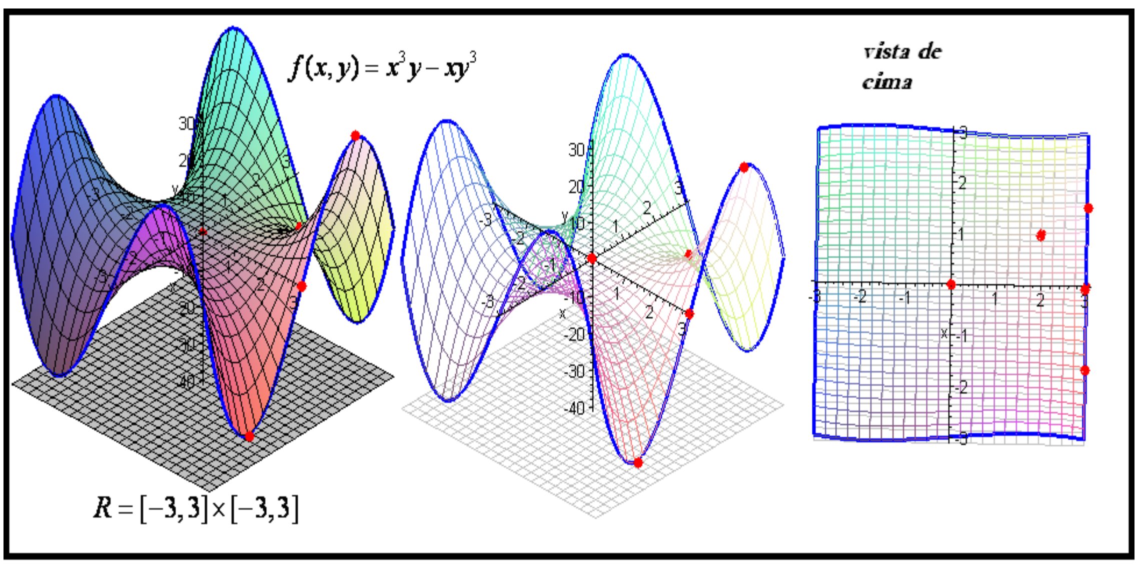


Figura 13: Descrição geométrica da situação problema

3 Experimentação
O experimento foi aplicado a uma turma do 4º semestre do curso de licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE no ano de 2012. As atividades desenvolvidas ocorreram na durante as aulas da disciplina Cálculo III. Os instrumentos de coleta de dados foram entrevistas semiestruturadas, a produção escrita em sala de aula pelos grupos de dois (total quatro grupos ou oito alunos) alunos e registros de áudio e imagens.

A exploração de um problema, por parte do professor de Matemática, influenciado pelos fundamentos assumidos na *Sequência Fedathi* – SF (Borges Neto et al, 2001), não orienta a explicitação imediata do mesmo. De modo sistemático, seguimos as etapas:

Fase 1 Tomada de posição – apresentação do problema.
No que se refere aos alunos, faz parte do seu papel a descoberta/identificação de um problema relevante. Neste caso, se o recurso algorítmico, os alunos devem realizar a identificação visual de pontos extremantes sob a superfície $z = f(x, y)$. Na próxima fase, explicitamos o problema em foco.

Fase 2 Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema.
Nesta fase, os alunos são estimulados à identificação das variáveis mais pertinentes, ou melhor, dizendo, os elementos invariantes desta situação. Devem divisar os pontos interiores e os pontos de fronteira ou bordo. No primeiro caso, compreender a necessidade do *teste da Hessiana*, enquanto que nos pontos de bordo, aplicar seus conhecimentos do CUV.

Fase 3 Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem à solução do problema.
Nesta fase os alunos devem empregar uma estratégia com vistas à solução das atividades propostas. Neste momento, de modo individual ou em grupos, os estudantes devem aplicar os teoremas convenientes do CUV e do CVV.

Fase 4 Prova – formalização do modelo matemático a ser ensinado.
Nesta ultima fase, o professor deve retomar a condução da discussão com a intenção de evidenciar e indicar a adequação dos argumentos válidos aplicados na resolução das atividades propostas, os limites de aplicabilidade dos mesmos e a possibilidade de restrições. Neste momento, professor e alunos devem confrontar os dados de natureza algébrica com os gráficos exibidos na tela do computador.

Com respeito a atividade 1, por intermédio da mediação do professor, o alunos pode tomar o ponto $(2,1)$ como um ponto de sela, o que não se verifica pelo teste da Hessiana.

4 *Análise a Posteriori* e Validação
Nesta fase foram a analisados os dados obtidos na *fase de experimentação*. Colocamos em funcionamento todo o dispositivo construído. Segue então a análise *a posteriori* que se apoia "no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação." (Almouloud, 2007, p. 176). Na *experimentação*, consideramos observações realizadas sobre as sessões de ensino,

as produções escritas em sala de aula e a fala durante *entrevistas semiestruturadas* e uma atividade em grupo de dois alunos.

Deste modo, na figura 3, um dos alunos da dupla 1, com amparo apenas na visualização, buscou identificar os elementos mais importantes na *fase de maturação*.

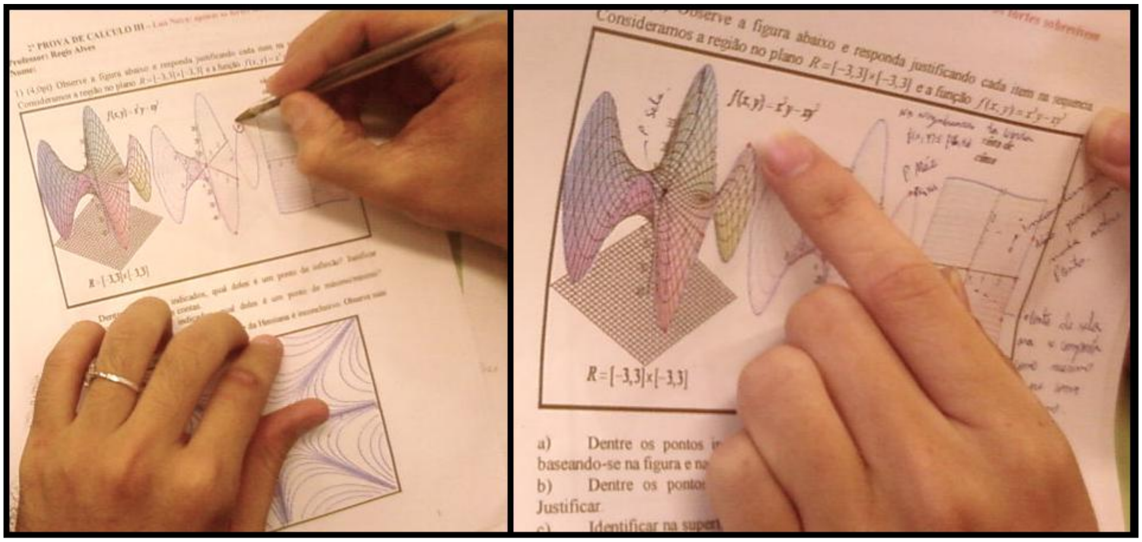


Figura 14: Na fase de solução, a dupla 1 se apoiou na visualização no entendimento da situação

Quando questionado sobre as informações extraídas também do computador, o outro indivíduo da dupla 1 respondeu:

> Eu peguei a função...e essa borda aqui...esta no intervalo de $-3 \leq x \leq 3$ ...mas o y está fixo... $y = 3$ ...deriva a primeira vez e iguala a zero...para determinar os pontos críticos...na origem ainda eu não cheguei..identifiquei apenas os pontos de inflexão e pontos críticos...analiso aqui na figura e depois as contas...ainda não cheguei no interior da superfície...para estes pontos no interior...a gente vai usar o teste da Hessiana...eu descobri os pontos de máximos e míminos..a máximo esta aqui..o mínimo aqui..e o de inflexão..aqui...eu analiso aqui a figura....

No excerto acima (linhas 5 e 6) comprovamos que sua atividade foi apoiada na visualização do objeto fornecido pelo computador. Mais adiante, a dupla 1 confrontou os dados analíticos com os dados obtidos pelo intermédio da percepção visual.

Na *fase de maturação* ainda, questionamos a compreensão de um dos sujeitos da dupla 2. Um dos seus membros escreveu o que exibimos na figura 4.

Semelhante ao cálculo I, aqui também vale que **L1**
o ponto de inflexão é o ponto onde ocorre a mu-
dança de concavidade. Pela figura observamos
que essa mudança ocorre no ponto (3,0).

Quanto aos pontos de máximos e mínimos, **L5**
identificamos facilmente pela figura a região **L6**
na qual eles se encontram. Observamos que
a função vem decrescendo até o ponto (3,-2)
e a partir deste ponto ela volta a crescer,
tratando-se assim de um ponto de mínimo
local. Agora percebemos que a função cresce até
o ponto (3,2) e a partir de então volta a decrescer,
temos aqui um ponto de máximo local.

Figura 15: Um dos alunos da dupla 2 relatou os dados colhidos na visualização

Na Linha 1 da figura 4 evidenciamos que um dos seus membros empregou seus conhecimentos do CUV no contexto do CVV, no espaço IR^3, para a identificação de *ponto de inflexão*. Nas linhas 5 e 6 registramos que a dupla 2 identificou os *pontos extremantes* sob a superfície sem recorrer à nenhum processo algorítmico, com arrimo somente na visualização. Na *fase de solução*, a referida dupla empregou a algoritmização necessária para comprovar ou refutar suas conjecturas.

O diferencial da exploração da tecnologia nas seções de ensino diz respeito às possibilidades de se rever as argumentações e inferências produzidas pelo emprego de teoremas. Reparemos ainda que no caso de algumas duplas, a representações particulares do computador induziu a aplicação do *teste da Hessiana* em pontos nos quais não contamos com as hipóteses exigidas pelo mesmo.

De fato, no ponto (2,1) temos que $\nabla f(2,1) \neq (0,0)$, entretanto, diante do comportamento da superfície, algumas duplas aplicaram o teste neste ponto de modo indevido e, com base na visualização (figura 5) conjecturam que o ponto (2,1) era um ponto de sela, o que constitui uma contradição e nas seções finais da SF tivemos que esclarecer.

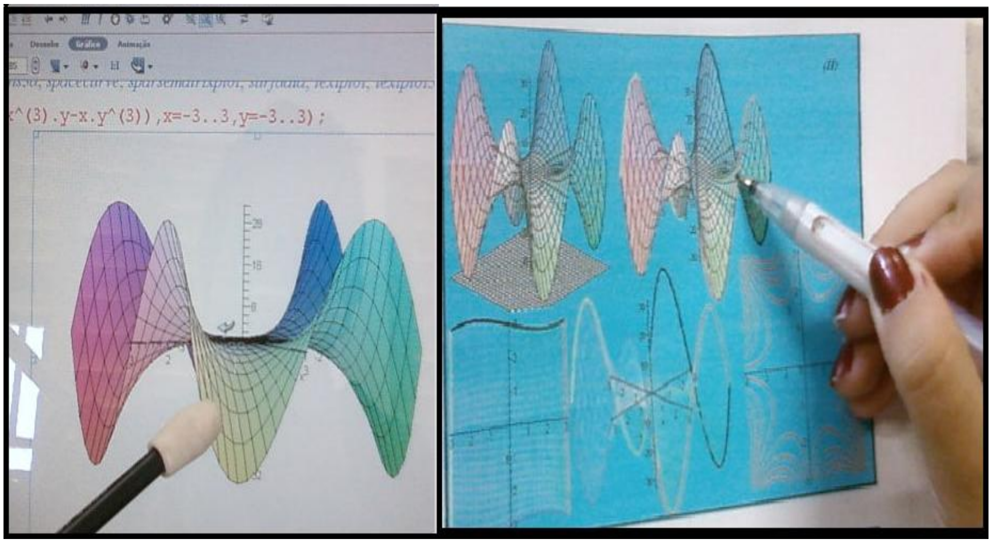
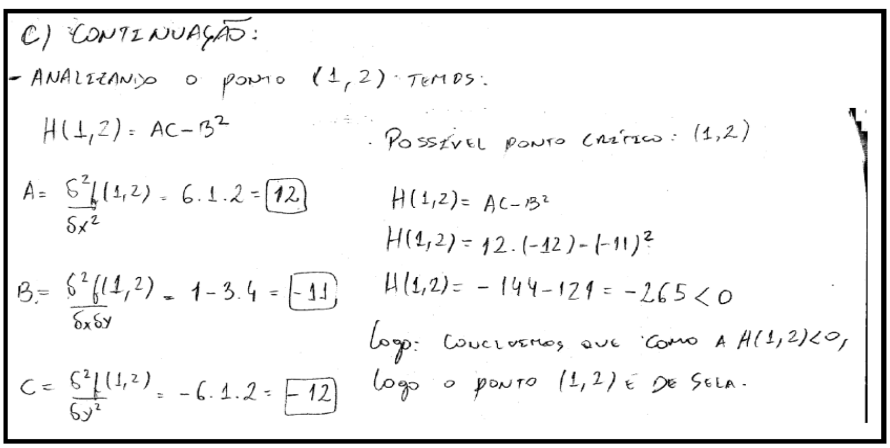


Figura 16: Na fase de prova algumas duplas compararam os dados obtidos nas fases anteriores e aplicaram o teste de Hessiana de modo indevido

Na figura 6 registramos a produção escrita de um aluno da dupla 2. Influenciado pela visualização no computador, empregou o *teste da Hessiana* de modo inadequado no ponto $(2,1)$ pertencente ao interior da superfície.



C) CONTINUAÇÃO:

- ANALISANDO O PONTO (1,2) TEMOS:

$H(1,2) = AC - B^2$

$A = \frac{\delta^2 f(1,2)}{\delta x^2} = 6.1.2 = \boxed{12}$

$B = \frac{\delta^2 f(1,2)}{\delta x \delta y} = 1 - 3.4 = \boxed{-11}$

$C = \frac{\delta^2 f(1,2)}{\delta y^2} = -6.1.2 = \boxed{-12}$

· POSSÍVEL PONTO CRÍTICO: (1,2)

$H(1,2) = AC - B^2$

$H(1,2) = 12.(-12) - (-11)^2$

$H(1,2) = -144 - 121 = -265 < 0$

LOGO: CONCLUÍMOS QUE COMO A $H(1,2) < 0$,

LOGO O PONTO (1,2) É DE SELA.

Figura 17: A dupla 2 aplicou o teste da Hessiana no ponto $(2,1)$

Conclusão

Artigue (1995a, 1995b) critica o ensino acadêmico que prioriza o tratamento algorítmico. Em nossa ED, valorizamos os dados inferidos com apoio na visualização e percepção das propriedades geométricas envolvidas. Deste modo, algumas noções do CUV foram exploradas no espaço IR^3, o que geralmente é negligenciado pelos livros didáticos. As habilidades de visualização e identificação perceptual das propriedades geométricas fortalece o processo de *transição interna* do CUV para o CVV descrito na tese de Alves (2011) e em outros escritos científicos (Alves; Borges Neto, Hermínio & COSTA, 2007).

Nosso posicionamento metodológico possibilitou a verificação das hipóteses com o confronto dos dados analíticos e as sentenças proposicionais produzidas com a visualização dos elementos da superfície descrita por $f(x,y) = x^3 y - xy^3$. O uso da tecnologia proporciona a evolução de modelos mentais e imagens, a partir de percepção de propriedades dos objetos. A SF proporciona a adaptação de conhecimentos do CUV no contexto do CVV e uma investigação apoiada na intuição e percepção, sem o emprego precipitado de propriedades formais ou modelos algébricos sem um entendimento real por parte do estudante.

Por fim, o uso da tecnologia, permitiu e comparação dos dados obtidos por meio da inspeção da figura no computador com os dados analíticos produzidos na fase de solução. Observamos que sem o auxílio do computador, tarefas da natureza como a que exploramos neste estudo se resumem ao quadro analítico, o que alias é a tônica do ensino acadêmico, como assim critica Artigue (1995a; 1995b).

Referências

Alves, Francisco. R. V; Borges Neto, Hermínio & Costa, Rosélia, M. (2007). Uma sequência de ensino para a aquisição do conceito de derivadas parciais, direcionais e teoremas correlatos no Cálculo em várias variáveis. In: *Conexões, Ciência e Tecnologia*, v. 1, 34-42. Disponível em: http://www.ifce.edu.br/pesquisa-e-inovacao/revista-conexoes.html. Acessado em: 13 de abril de 2012.

Alves, Francisco. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, p. 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, H. & Ingar, Kátia, V. (2012). Aplicações da Sequência Fedathi: sobre o ensino de pontos críticos e de inflexão IR^3. *Anais do VI Colóquio Internacional sobre la enseñanza de las Matemáticas*. 62-64. Disponível em: http://irem.pucp.edu.pe/. Acessado em: 10 de abril de 2012.

Alves, Francisco. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, 1, CLXV-CLXXIX. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/index. Acessado em: 04 de Abril de 2012.

Almouloud, Saddo Ag. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

Artigue, Michelle. (1995a). Ingénierie didactique. In: Brun, J. Didactiques des Mathématiques. Paris : Délachaux et Niestle, 243-263.

Artigue, Michelle. Ingenieria Didática. Artigue, Michelle ; Douady, Régine ; Moreno, Luis & Gomez, Pedro. (1995b). Ingeniéria didatica en Educacion Matemática. Bogotá : Grupo Editorial Iberoamericano, 33-61. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf. Acessado em: 10 de abril de 2012.

Borges, Hermínio. et al. (2001). A *Seqüência Fedathi* como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, In: *Anais do XV EPENN - Encontro De Pesquisa Educacional Do Nordeste*, São Luís, 590-609.