CB-268

EL DESARROLLO DEL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS. APORTES PARA TRABAJAR EL ÁLGEBRA EN EL AULA.

Jimena Fernández García
surrumbu@gmail.com
Uruguay

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: Pensamiento algebraico, símbolos, sentido.

Resumo
Hemos observado en nuestro trabajo como docentes, que generalmente los estudiantes logran desempeños aceptables en relación a la manipulación simbólica de las diferentes expresiones (resolver ecuaciones o inecuaciones por procedimientos estándar, operar con polinomios, reducir a común denominador dos fracciones algebraicas, etc.). Pero cuando el trabajo va más allá de la manipulación, cuando incluye la interpretación de los símbolos, la elaboración de expresiones, el uso creativo del álgebra como una herramienta capaz de brindar información sobre una situación o como un instrumento de investigación, los mismos estudiantes que mostraron ser capaces de realizar manipulaciones algebraicas presentan serias dificultades. Esto nos lleva a cuestionarnos al respecto del trabajo que realizamos en nuestras aulas como docentes: ¿Estamos realmente enseñando álgebra a nuestros alumnos? ¿O estamos reduciendo simplemente el álgebra a la manipulación simbólica de expresiones? Basándome en la propuesta desarrollada por Arcavi (1994) en relación a lo que él denomina "el sentido de los símbolos" y los comportamientos que este incluye, propongo una selección de actividades tendientes a promover el desarrollo de este "sentido de los símbolos". Esto se realiza a partir del trabajo en torno a incentivar los comportamientos descriptos por Arcavi como deseables en una persona que aprende álgebra.

Introducción

Una afirmación a la que suelen adherir muchos profesores de matemática es la que realiza Sigrid Wagner en su artículo de 1993: "Los símbolos literales son fáciles de usar pero difíciles de entender". Con símbolos literales la autora hace referencia a las letras que utilizamos comúnmente en matemática para representar números cumpliendo diferentes roles: como variables en una relación funcional, como incógnitas, como números generales, etc. Según Wagner los estudiantes son capaces de manipular símbolos y resolver diferentes situaciones, pero al indagar acerca de los significados en las tareas que realizan, hasta los estudiantes más capaces se muestran desconcertados. En general, esta situación planteada por la autora, no es ajena a ningún profesor de matemática, sea cual sea el nivel en que desarrollemos nuestro trabajo.

Al analizar variadas investigaciones relacionadas con el aprendizaje del álgebra es posible apreciar una preocupación generalizada en relación a las dificultades que el trabajo con los símbolos presenta en estudiantes de todos los niveles de la educación y, particularmente, en la formación de profesores.

Según la NCTM (2000)[17] las competencias relacionadas con el álgebra son de suma importancia para la educación matemática de los individuos. No solo debido a que los métodos y las ideas del álgebra son fundamentales para el trabajo en diversas áreas de la matemática, sino también por la importancia del aprendizaje del álgebra en la vida adulta de los individuos, tanto en lo que refiere a la educación matemática en particular, como en la formación integral de las personas.

Debemos tener presente que es muy frecuente identificar el álgebra con la manipulación simbólica para resolver ecuaciones y simplificar expresiones algebraicas. Los símbolos algebraicos y los procedimientos para trabajar con ellos constituyeron un logro fundamental en la historia de la matemática y son vitales en el trabajo matemático. Sin embargo, el álgebra es mucho más que la simple manipulación simbólica. Es importante en la enseñanza del álgebra, que los estudiantes comprendan los conceptos del álgebra, las estructuras y principios que rigen las transformaciones algebraicas. La NCTM afirma que los estudiantes deben comprender cómo los símbolos pueden ser utilizados para registrar ideas y obtener conocimiento de las situaciones a las que se enfrentan. En especial en los tiempos que corren, donde las nuevas tecnologías son capaces de producir gráficos, realizar operaciones con símbolos y realizar cálculos inmediatos con diferentes datos, los estudiantes deben ser capaces de interpretar las representaciones que les brinda la tecnología y de utilizarla de manera adecuada.

Considero al álgebra como un pilar fundamental dentro de la enseñanza de la matemática, debido a su vinculación con sus diferentes ramas, por las posibilidades de investigación que brinda al permitir modelar patrones, y por la utilidad que tiene en los diferentes ámbitos de la investigación científica actual en varias ramas de las ciencias. Considero también, que el aprendizaje del álgebra constituye un aporte muy importante en la formación integral del individuo, las actividades de

[17] The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), presentó en el año 2000 "Principles and Standards for School Mathematics" donde realizan recomendaciones y sugerencias para el aprendizaje y la enseñanza de la matemática.

búsqueda de patrones y de generalización, fomentan razonamientos que pueden serles de gran utilidad en la vida cotidiana y en sus desempeños laborales, sea cual sea el trabajo que realicen.

El sentido de los símbolos.

Arcavi plantea que el "sentido de los símbolos" es un complejo y multifacético 'sentimiento' hacia los símbolos. Describe y discute distintos comportamientos que ilustran el significado que él atribuye al "sentido de los símbolos",

Los comportamientos que Arcavi describe como los componentes más importantes que demuestran haber construido un "sentido de los símbolos" son:

1) Amigabilidad con los símbolos. Esto incluye la comprensión de los símbolos de forma que estén fácilmente disponibles para ser usados cuando es conveniente y para ser dejados de lado en el caso en que sean una opción engorrosa.
2) Capacidad para 'manipular' y también 'leer a través de expresiones simbólicas', como dos problemas complementarios en la resolución de problemas algebraicos. Esto incluye la capacidad de adoptar una visión global de las expresiones simbólicas y, por otro lado, poder separarse de los significados para que las manipulaciones sean rápidas y eficientes. La lectura de y 'a través de' las expresiones simbólicas con el objeto de captar significados agrega niveles de conexión y razonabilidad a los resultados.
3) Tomar conciencia de que puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresen cierta información dada o deseada.
4) Ser capaz de reconocer en expresiones simbólicas equivalentes, significados 'no equivalentes'. La manipulación simbólica de las expresiones algebraicas nos permite obtener expresiones equivalentes, sin embargo cada expresión con la que nos enfrentamos puede ser fuente de nuevos significados.
5) La capacidad de seleccionar una representación simbólica y, en ciertos casos, reconocer nuestra propia insatisfacción con esa elección e ingeniárselas para buscar una mejor.
6) Realizar manipulaciones simbólicas guiadas por un objetivo buscado, evitando realizar operaciones circulares y teniendo una visión global ("gestalt") en la que se ven a los símbolos organizados de una determinada manera y no solo como una concatenación de letras.
7) Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la resolución de un problema o durante la inspección de un resultado,

y comparar esos significados con las intuiciones acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema.

8) Conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en distintos contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias.

El sentido de los símbolos en el aula.

Arcavi (2007) plantea:*"Ser educadores matemáticos, significa, por lo menos en parte, diseñar e implementar intervenciones con el objetivo de maximizar el potencial de aprendizaje de los alumnos. Por lo tanto, debemos hacer hincapié en lo que se puede aprender, en lugar de sucumbir a la visión fatalista de que nacemos con capacidades innatas y que poco o nada podemos hacer al respecto mediante la educación."* (Arcavi 2007). Y continúa: *"el desarrollo del hábito de usar el sentido común y buscar significados está fuertemente ligado a la cultura del aula que lo apoya o lo suprime, y por lo tanto, no es necesariamente una cuestión de habilidades matemáticas innatas. Una conclusión posible, es que debemos redirigir nuestra atención hacia lo que nuestras prácticas de aula recompensan."*

Entonces, el desarrollar sentido de los símbolos no está únicamente vinculado con los aspectos cognoscitivos del individuo. Se relaciona directamente con lo que se espera del individuo, con lo que se valora que realice, con lo que es aceptado. Aunque no es novedad que la cultura del aula es un factor determinante en lo que se aprende y lo que se desarrolla, se pone en primer plano a la hora de fomentar el desarrollo del sentido de los símbolos en los estudiantes. Para Arcavi, el sentido de los símbolos debe ser cultivado y para ello se debe proporcionar prácticas de enseñanza apropiadas. Por ejemplo, incitar a los estudiantes a que se acostumbren a no abalanzarse sobre los símbolos, sino a analizar el problema usando el sentido común, a esbozar gráficos o figuras, estimular que describan lo que ven y que razonen sobre ello. Si este tipo de actividades no son estimuladas en el aula, si no se le brinda aprobación a este trabajo, el uso del sentido común quedará relegado a un segundo plano o quizás no sea utilizado en absoluto.

Teniendo presente estas cuestiones consideradas anteriormente, es posible pensar qué tipo de trabajo es posible realizar en el aula con los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra para promover y estimular el desarrollo del sentido de los símbolos.

Hay que tener en cuenta que es posible conversar con los estudiantes y reflexionar meta-matemáticamente desde muy temprano, quizás antes de empezar a trabajar en los procedimientos rutinarios, y este tipo de reflexión puede ser un apoyo para el desarrollo del sentido de los símbolos, si se realiza de forma continuada. Generar espacios para que los estudiantes puedan expresar sus percepciones y sus preferencias a la hora de utilizar una u otra representación, posiblemente les brinde a los estudiantes oportunidades de desarrollar aspectos del sentido de los símbolos y de conversar acerca de ellos. De esta manera es posible reconocer el potencial de las situaciones relacionadas con el sentido de los símbolos y estimular la expresión de percepciones subjetivas acerca de los símbolos. Es deseable entonces, que las prácticas que se desarrollen en el aula se centren en cultivar la búsqueda de los significados de los símbolos, en paralelo y a continuación de la resolución de problemas, así como previamente a la aplicación automática de reglas. Un hábito que puede ser estimulado por los docentes, es el de realizar un análisis a posteriori de la solución del problema, que puede ser útil a la hora de revisar el uso de técnicas automáticas. Estas actividades pueden brindar la oportunidad de hacer conexiones entre los distintos tipos de enfoques que puedan surgir, ya sea simbólicos o no, y también de ver a otros realizar estas conexiones.

Otras actividades que Arcavi (2007) destaca como una práctica de aula destinada a apoyar el desarrollo del sentido de los símbolos, son aquellas que busquen compartir con los estudiantes el sentido del propósito de los símbolos. Mediante actividades en las que les hagan sentir a los estudiantes que están ganando comprensión de una situación y adquiriendo poder sobre ella. Ellos deben vivenciar desde sus primeros aprendizajes del álgebra, que el uso de los símbolos nos brinda poder y comprensión sobre una multitud de situaciones. La manipulación simbólica debe ser enseñada en contextos ricos, que provean a los estudiantes oportunidades para aprender cómo y cuándo utilizar dichas manipulaciones.

A continuación propongo algunas actividades que, trabajadas como se describió anteriormente, pueden colaborar a fomentar el desarrollo del sentido de los símbolos. Algunas de ellas son actividades que comúnmente se plantean en las aulas, lo que propongo es darle un giro a la forma en la que se suelen trabajar y mirarlas desde otra perspectiva.

Considera un rectángulo cualquiera. ¿Qué sucederá con su área si una de sus dimensiones (su largo o su ancho) es aumentada un 10%, y la otra dimensión es reducida en un 10%? (Extraído de Arcavi (1994))

La respuesta a este ejercicio contradice la intuición, ya que es posible que una respuesta inicial sea que no hay cambio, o que el cambio depende de cuál dimensión sea aumentada y cuál reducida.

Sin embargo, se puede observar que en todos los casos el área disminuye. Podemos llamar x e y a las dimensiones del rectángulo original, de esta manera el área del nuevo rectángulo sería $1{,}1x \times 0{,}9y$ o $0{,}9x \times 1{,}1y$. En ambos casos el área del nuevo rectángulo sería $0{,}99xy$. Al observar el área del nuevo rectángulo expresada de esta manera podemos ver que siempre decrece un 1%.

¿Puedes resolver esta ecuación en el conjunto de los reales sin realizar operaciones: $x^4 + 4x^2 + 10 = 0$ *?*

Es muy probable que al enfrentarse a esta ecuación un individuo tienda instintivamente a comenzar a realizar transformaciones algebraicas que permitan resolver la ecuación. Sin embargo, la restricción a la operatoria tiene como objetivo el forzar a que el alumno deba buscar otros caminos. Es posible notar que sea cual sea el valor de x, los términos que resultan son todos positivos o cero, por lo tanto la suma de esos números va a ser un número positivo o cero. Al sumar 10 al resultado anterior obtendremos siempre un número positivo (en el caso de que $x = 0$ obtendremos el mismo 10 como resultado). Por lo tanto no es posible obtener como resultado de esa suma al 0, la ecuación no tiene raíces reales. En este caso vemos cómo el dedicarle unos minutos a analizar el problema, nos permite encontrar la respuesta sin realizar procedimientos mecánicos. Esta instancia es otra muestra de haber desarrollado sentido de los símbolos.

Resuelve en R la ecuación: $\dfrac{4x+3}{2x-5} + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{3+4x}{5-2x} + x$

Aquí presentamos una ecuación que no presenta mayores dificultades. Esta ecuación no tiene solución en *R*. El objetivo es reflexionar con los estudiantes para notar que al inspeccionar esta ecuación, podemos reconocer sin hacer transformaciones que la ecuación no tiene solución, ya que en ambos miembros tenemos el término $\dfrac{4x+3}{2x-5}$ (en el segundo miembro aparece como $-\dfrac{3+4x}{5-2x}$) y al cancelarlo obtenemos $\dfrac{5}{2} = x$, pero $\dfrac{5}{2}$ no es solución de la ecuación (al sustituir el denominador se hace 0).

A) Completa las celdas vacías para obtener un 'cuadrado mágico' cuya constante es 30 (los números de cada fila, de cada columna o de cada diagonal, suman 30).

	10	
4		8

B) Completa las celdas vacías para obtener un 'cuadrado mágico' cuya constante es 15 (los números de cada fila, de cada columna o de cada diagonal, suman 15).

	6	
7		5

¿Qué observas? ¿Por qué sucede esto?

Este ejercicio fue extraído de un artículo de Arcavi (2007), pero se le realizó una mínima modificación. En el primer 'cuadrado mágico' la solución se puede encontrar sin mayores dificultades. En el segundo caso es imposible completar las celdas de forma que se cumpla la condición pedida. La pregunta "¿Por qué sucede esto?" apunta a que los estudiantes reflexionen en torno a cuándo es posible que un 'cuadrado mágico' funcione y cuándo no. Para esto, recurrir a los símbolos nos puede llevar a la respuesta.

Si consideramos a, b y c como los números dados en las celdas señaladas y S la suma pedida al completar las casillas podemos notar que la fila del medio no incluye a S, por lo tanto si queremos que la suma sea S, necesitamos que S=3b.

¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} y = (x+2)(x-1) \\ x^2 - 3x + y = 0 \end{cases}$

¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} y = x^2 \\ x = (y+1)(y+3) \end{cases}$

El primer sistema de ecuaciones tiene dos soluciones, y el segundo sistema de ecuaciones no tiene solución. Cómo la pregunta es solamente la cantidad de soluciones, no es necesario averiguar qué pares ordenados verifican cada sistema, es por esto que estos problemas se resuelven con mucha facilidad recurriendo a las representaciones gráficas de las ecuaciones, que son parábolas.

Al observar estas representaciones gráficas se observa fácilmente que el primer sistema tiene dos soluciones, mientras que el segundo no tiene solución.

Este ejercicio tiene como objetivo fomentar la inspección de las expresiones para saber si es necesario recurrir a los símbolos, o si es mejor dejarlos de lado para buscar nuevos abordajes más adecuados.

La siguiente tabla de valores corresponde a una función f de dominio real:

x
f(x

¿Puedes hallar una expresión analítica para dicha función? En caso afirmativo preséntala, en caso contrario indica por qué no es posible.

icio tiene cómo intención fomentar la creación presión analítica a partir de la información que se brinda en la tabla de valores. Incentivando así uno de los comportamientos que componen el sentido de los símbolos.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense- making in Formal Mathematics.En *For the Learning of Mathematics 14*, 24-35. Canadá: FLM Publishing Association.

Arcavi, A. (1995). Teaching and learning Algebra: Past, present, and future. En *Journal of Mathematical Behaviour 14,* 145-162.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. En *For the Learning of Mathematics* 25, 42- 48. Canada: FLM Publishing Association.

Arcavi, A. (2007) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Conferencia realizada como Profesor visitante, CRICED, Tsukuba University- Japan. En http://ebookbrowse.com/arcavi05-el-desarrollo-y-el-uso-del-sentido-de-los-simbolos-doc-d37871752 (01/06/2011)

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principals and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.

Wagner, S. (1983) What are these things called variables? En *Mathematics Teacher76,* 474-479