CB-236

ESTUDO DE PERIODICIDADE:
FATORES DETERMINANTES EM UMA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM

Sonner Arfux de Figueiredo1 – Nielce Meneguelo Lobo da Costa 2
sarfux@uems.br – nielce.lobo@gmail.com
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul- UEMS/Brasil - Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN/Brasil

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Modalidad: CB
Palabras clave: funções trigonométricas; taxonomia; aprendizagem conceitual.

Resumo
O objetivo deste estudo foi identificar características da construção do significado de periodicidade de funções trigonométricas por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Se desenhou um experimento de ensino que contempla a caracterização do mecanismo cognitivo centrado na relação atividade efeitos em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA (hypothetical learning trajectory-HLT), segundo Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004), com uma taxonomia sobre os processos de generalização a partir da ideia de abstração reflexiva de Piaget (1977), para identificar fatores que configuram a trajetória de aprendizagem. Os resultados indicaram uma trajetória determinada pela coordenação em gerar um conjunto de registros sobre a relação entre a ação de modificar parâmetros relativos às funções trigonométricas e estender a relação ao período de uma função dada para expressar analiticamente e geometricamente para casos gerais.

Introdução

Pesquisas educacionais recentes sobre aprendizagem têm se baseado em teorias cognitivas, muitas das quais com foco neopiagetiano. Teorias dessa natureza têm fornecido subsídios significantes e promissores para o desenvolvimento de metodologias, na busca por avanços na compreensão sobre a evolução do conhecimento humano. Essas teorias e pesquisas podem embasar tomadas de decisão no dia-a-dia da sala de aula.

Em particular, em relação aos conhecimentos trigonométricos, são vários os conceitos a serem construídos que devem anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente; Por exemplo: priorizar o ensino das relações métricas no triângulo retângulo e das leis do seno e do cosseno por serem ferramentas essenciais a serem apropriadas previamente pelos alunos para melhor compreensão das funções.

Neste artigo, a partir da ideia de caracterização do significado de periodicidade de funções trigonométricas, investigamos em um experimento de ensino, como os alunos de Licenciatura em Matemática constroem e consolidam o conceito de periodicidade.

O Desenho do Experimento

A investigação desenvolveu-se em um processo de formação inicial no qual se aplicou um experimento de ensino sobre funções trigonométricas usando o *Software* GeoGebra em uma relação entre a atividade efeito com o uso de lápis e papel em um entorno tecnológico, cujo objetivo foi compreender a caracterização do conceito de periodicidade em funções trigonométricas. O processo formativo foi desenvolvido na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, no Curso de Licenciatura em Matemática, da Unidade Universitária de Nova Andradina. Dezesseis acadêmicos de ingressantes no Curso participaram do experimento de ensino sobre funções trigonométricas, que teve duração de 12 seções de 50 minutos divididos em quatro módulos cada um.

A pesquisa foi qualitativa, de natureza descritiva e interpretativa, com características da pesquisa-ação e elementos do *Design-Based Research* (DBR) proposta por Coob, Confrey, Disessa, Lehrer e Schauble (2003). Esse tipo de investigação (DBR) permite ajustes tanto no processo formativo quanto no investigativo e os experimentos de ensino são desenhados de modo a se adequarem ao grupo pesquisado, o que atendeu aos interesses desta pesquisa. Durante as seções do experimento de ensino foram capturadas as telas com as tarefas realizadas pelos acadêmicos, assim como diálogos e produções escritas, com o programa *Gadwin Print Screen*.

Para a construção e consolidação dos conceitos o experimento de ensino foi organizado considerando uma THA com tarefas envolvendo elementos algébricos das representações analíticas dos conjuntos estruturais e recursos tecnológicos. As tarefas dos módulos se articularam a partir dos seguintes pontos:

- ✓ Conceito de função trigonométrica e sua relação com o ciclo trigonométrico (tarefa I);
- ✓ Exploração e conjecturas na validação entre o argumento de função trigonométrica e sua definição com o uso da tecnologia (tarefa II);
- ✓ Exploração gráfica com o Software GeoGebra e ampliação das definições e propriedades de função periódica às funções trigonométricas (tarefa III).

Taxonomia para a Generalização

A primeira dimensão do modelo de análise foi suportada pela taxonomia SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes), Estrutura dos Resultados de Aprendizagem Observados, que surge como base do enquadramento conceitual permitindo explorar o crescimento cognitivo dos alunos. Para Biggs e Collis (1982), a ideia de abstração reflexiva de Piaget (1977) e alguns dos atributos da teoria dos estágios de desenvolvimento foram considerados como pressupostos tais como: (i) a existência de uma sequência de desenvolvimento cognitivo; (ii) a compreensão em níveis particulares de desenvolvimento; (iii) padrões de desenvolvimento e (iv) graus de proficiência na assimilação de certo tipo de experiências.

Aqui a qualidade da aprendizagem não é vista apenas como a classificação qualitativa que um aluno obtém quando responde a uma questão, mas também como o processo qualitativo de produção dessa resposta (raciocínio matemático) utilizando fatos, conceitos e capacidades.

Esta taxonomia SOLO, desenvolvida por Biggs e Collis (1982), estabelece cinco estágios de compreensão classificados por ordem crescente de complexidade: (i) Pré-estrutural; (ii) Uni-estrutural; (iii) Multi estrutural; (iv) Relacional e (v) Abstrato. Estes modos de pensamento são importantes, mas não fornecem informação suficiente para explicar como a complexidade do pensamento matemático ocorre em cada modo ou o que é necessário acontecer de forma que as ideias matemáticas progridam para modos mais elevados observando as diferenças existentes entre experiências de aprendizagem e experiências de repetição.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem e a Construção do Conceito de Periodicidade

Nossa hipótese é que os estudantes, depois de tratarem e compreenderem as indicações e questões das tarefas, se familiarizem com o *applet* e realizem ações experimentais de forma geométrica e analítica (ver Quadro 1). Estas ações deverão ajudar a relacionar o efeito sobre a expressão analítica ao modificar as representações geométricas e vice-versa. Na sequência os estudantes, ao modificarem os períodos e domínios das funções, novamente podem observar o efeito dessas modificações na representação geométrica e vice-versa. Além disso, podem buscar outros exemplos para comparar hipóteses e conjecturar propriedades.

Esperamos que, a partir destas ações, os alunos infiram as propriedades do tipo analítico e geométrico, coordenando as duas linguagens. Neste sentido, entendemos que os processos de reflexão sobre as ações com o estudo da periodicidade de diferentes funções podem auxiliar os estudantes a estenderem as definições e propriedades de função periódica (já conhecidas) às funções trigonométricas.

No quadro abaixo explicitamos e relacionamos as linguagens geométrica e algébrica selecionadas no experimento de ensino.

Quadro 1: Relação entre as linguagens algébrica e geométrica nas tarefas propostas

Atividades	Geométrico	Algébrica	Ações
Tarefa 1: Caracterização da aplicação	Representação Geométrica da função seno e cosseno. A projeção de dois ângulos, por exemplo, α∈1ºQ e β∈2ºQ, tal que β = π – α	Representação algébrica de *f*(x)=sin x e *g*(x)= cos α = y/r, no círculo trigonométrico (raio 1).	Digitar no *software* GeoGebra as funções seno e cosseno
Tarefa 2: Definição da função seno x para círculo de raio 1	Projeção para o estudo da variação $\mathrm{f(x)} = \mathrm{y} = \sin x$ $\mathrm{g(x)} = \mathrm{y} = \cos x,$ para 0≤x≤2 π.	A periodicidade é válida em funções trigonométricas, e como definir suas inversas	Conjecturar e validar as propriedades no ciclo trigonométrico
Tarefa 3: Determinação do argumento de funções trigonométricas	Representação Geométrica de uma função f: R→ R periódica de período T (Ou seja, de uma função tal que $\mathrm{f}(x+t) = f(x)$ para todo $x\epsilon R$. Se T é um período para uma função f, então 2T também é período pois $f(x+2T) = f(x+t) = f(x)$.	Mostrar que a função é periódica se existir um número real *p*, p>0, tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo x de seu domínio.	Movimentar um ponto P sobre a circunferência no sentido anti-horário até completar a tabela e o gráfico

Fonte: Acervo dos autores

Os estudantes também podem estender algumas definições como o conceito de periodicidade para 0≤x≤2 π em qualquer função trigonométrica. Neste sentido mostramos cada uma das tarefas e o que esperamos em consonância da taxonomia de SOLO.

- ✓ *Tarefa 1. Caracterização da função trigonométrica*

Esta tarefa objetiva gerar um conjunto de registros sobre a relação entre a ação de modificar parâmetros relativos às funções seno e cosseno e o efeito produzido.

Consideremos a função seno do ângulo α, definida por sin α = y/r, num círculo trigonométrico de raio r=1. Então, temos sin α = y.

- ✓ *Tarefa 2. Periodicidade e uma função*

O objetivo da tarefa 2 é associar o conceito de periodicidade de uma função trigonométrica conjecturando suas propriedades. Além disso, observar que as respectivas inversas não são injetivas quando se toma o domínio R das funções trigonométricas – ou seja, para um determinado argumento das funções trigonométricas inversas, estas devolvem como solução uma infinidade de ângulos possíveis, separados de um número inteiro de períodos da função trigonométrica original (2π no caso do seno, cosseno, secante e cossecante, e π no caso da tangente e cotangente). Desse modo, é necessário restringir o domínio da função trigonométrica para então definir a sua inversa. Por exemplo, deve-se escolher uma restrição do domínio da função seno tal que os seus elementos representem todos os valores possíveis da imagem da função seno.

✓ *Tarefa 3: Estender o conceito de periodicidade.*

O objetivo da tarefa 3 é levar os alunos a estender e fazer inferências. A partir do estudo do período das funções seno ou cosseno levar os alunos a concluírem que a periodicidade pode ser estendida às demais funções trigonométricas, generalizando as suas propriedades, sejam ela algébricas ou geométricas.

Na figura 2, apresentamos um dos *applets* utilizados na tarefa 3. Suponhamos que P=A e, P se movimenta sobre a circunferência no sentido anti-horário até completar uma volta completa no ciclo, enquanto isso o gráfico da função seno é traçado.

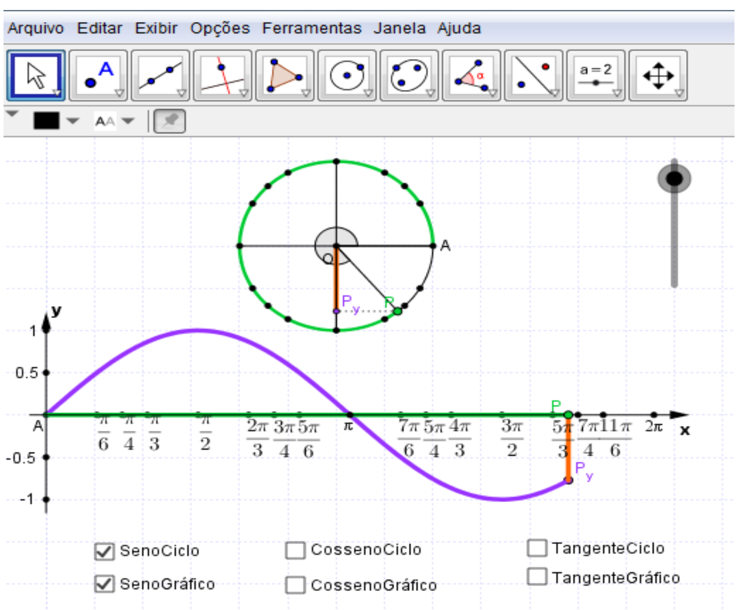

Figura 3: Imagem do *applet* funções trigonométricas para o estudo de periodicidade
Fonte: Figueiredo, 2015, pág.231.

Na mesma atividade os alunos exploraram outro *applet* disponibilizado com um recurso a mais, de forma a caracterizar e generalizar suas conjecturas e afirmações sobre o conceito abordado (Ver figura 3)

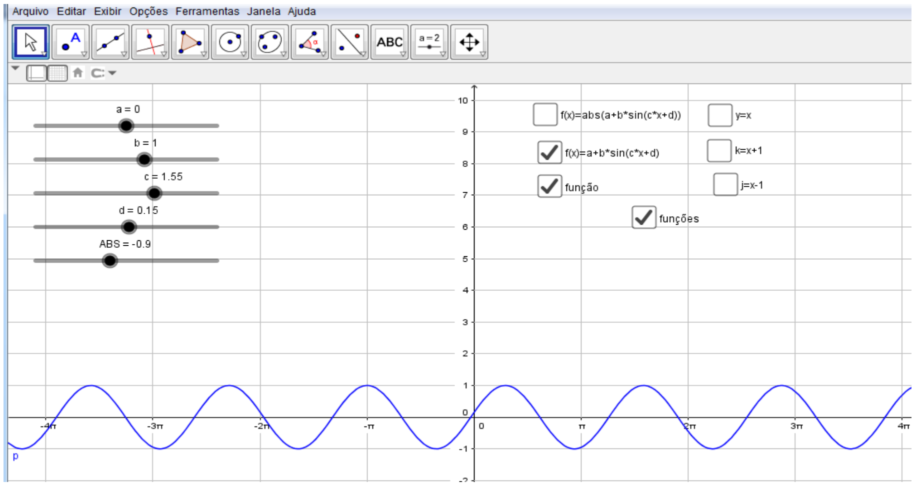

Figura 4: *Applet* para estudo e conjectura das definições e propriedades trigonométricas
Fonte: Figueiredo, 2015, pág.151.

Com este *applet*, os alunos puderam conjecturar e validar a definição de função periódica, ou seja, a função *f*(x) é periódica se existir um número real *p*, p>0, tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo x de seu domínio. O menor número positivo *p* que satisfaz essa condição é denominado período da função. Assim, podem estender o conceito de função periódica no caso de uma função que é trigonométrica, o que significa dizer que, no caso de uma função como *f*(x)=sin x, a curva obtida no intervalo [0,2π] vai se repetir a cada intervalo 2π. Neste outro *applet* o aluno poderia conjecturar, entre outros, também sobre o comportamento de uma função trigonométrica modular e seu período. Em geral, o aluno verifica que kT é um período, onde k é um número inteiro. Destacamos, no quadro 2, os tipos de generalizações esperadas.

Quadro 2: Tipos de generalizações esperadas na tarefa de periodicidade

Tipos de generalizações	Tarefa: periodicidade
Relacionar	O pensamento geométrico sintetizando e utilizando a linguagem de figuras geométricas com suas representações gráficas e analíticas, ou seja, objetos geométricos que expressam analiticamente a representação geométrica e vice-versa.
Estender	A partir de casos particulares, estender ao caso geral. A relação entre o período de uma função seno (expressado analiticamente e geometricamente)
Definir	Conjecturar e definir as propriedades (algébricas ou geométricas).
Afirmar	Afirmar identificando as propriedades além dos casos particulares tais como, estender definições como o conceito de periodicidade para $0 \le x \le 2\pi$ em qualquer função trigonométrica.

Fonte: Acervo dos autores

Análise e Discussão dos Dados

Os dados foram transcritos a partir das comunicações orais das seções que foram ilustradas com a captura das telas dos computadores dos alunos, em seguida as indicações das ações realizadas em cada cena com o *software* e *applets*.

Para análise, cada uma das seções com os alunos foi considerada uma unidade de análise. A cada uma delas foi associado um tipo de ação, segundo a taxonomia de SOLO, seja de generalização ou o produto da generalização.

Para analisar as respostas de alunos às tarefas 1, 2 e 3, no tocante à periodicidade, utilizamos a Taxonomia SOLO para identificar o tipo de pensamento exibido pelas respostas de estudantes, submetidos às tarefas sobre periodicidade em funções trigonométricas. Nesse artigo relacionamos os Quadro I e II para análise da Tarefa 3.

Por fim, apresentamos a categorização em cada um dos itens da Taxonomia de SOLO.

A modelação das ações dos estudantes

Investigamos nas respostas dos alunos se nos diálogos havia referência e se compreendiam o conceito de periodicidade de uma função trigonométrica com um indicador completo de informações generalizadas sobre o processo de construção. O excerto da fala de um dos alunos, ao explorar o primeiro *applet*, nos permite observar quando tenta entender e interiorizar o conceito.

> **Aluno:** Seremos capazes de encontrar a forma algébrica disto?
> <referindo-se ao gráfico plotado e a expressão algébrica anotada em seu caderno>
> **Aluno:** Se eu movimentar esse ponto P no ciclo aqui vejo o comportamento do gráfico ao lado. Seria isto mesmo? O Período é o intervalo da função aqui! Que na circunferência é 2π, e no gráfico está em "x". E aqui vejo que a hora que o ponto P chega em 2π no ciclo o período também se completa.

O discurso de generalização do aluno, coloca em um momento particular e geral para o conceito. Sua estratégia que usa as anotações para criar o contexto no *applet* ao qual pode conjecturar as observações geométricas no gráfico observando o ciclo. Podemos interpretar que o aluno interioriza o conceito de periodicidade, e segundo a taxonomia SOLO, ele relaciona e identifica informações relevantes para que os conhecimentos envolvidos de forma a relacionar os conhecimentos entre si.

No segundo *applet* descrevemos a generalização realizada pelo mesmo aluno:

> **Aluno**: bom agora este ao habilitar as funções vejo que posso modificar tanto o período como a amplitude. A única dúvida é como vou transportar as definições aqui?
> Se referindo às definições.
> Quando movimento " não altera em nada o período só sobe e desce.
> < Se referindo ao deslocamento vertical do gráfico em relação ao eixo y>
> **Aluno**: E quando movimento o "d" também não altera, mas tem um deslocamento no eixo x somente.

As observações do aluno foram capazes de adiantar-se aos resultados nos casos possíveis da função seno.

> **Aluno**: agora sim, quando dizemos que 2π é o período da função $f(x)=\sin x$, estamos falando do período "fundamental" que diz aqui no caderno.
> <se referindo a teoria e definição registrado em seu caderno >
> **Aluno**: Mas, para um ângulo $\alpha + 2\pi$, a função toma o mesmo valor que para o ângulo α, e também está em crescimento[12]. O mesmo se passa para outro ângulo $\beta + 2\pi$, relativamente a 2π. Ou seja, ao fim de uma volta completa os valores de seno repetem-se.
> < se referindo a teoria e definição registrados e anotados em seu caderno>
> O mesmo se passa para a função cosseno, como se poderá facilmente verificar.

Observamos que nos diálogos acima os estudantes foram capazes de manifestar adiantando os resultados e associar o conceito de periodicidade em uma função trigonométrica. O processo de construção no primeiro diálogo o estudante realizou o processo pré-analítico a partir das figuras geométricas plotadas no gráfico, realizando verbalizações e interações para resolver a tarefa. No segundo diálogo se tratou em caracterizar a participação do aluno no contexto da manipulação do Ponto P do gráfico e conjecturar (validar as propriedades).

Na terceira etapa e última se tratou de estabelecer se os estudantes utilizaram corretamente as definições algébricas para validar e conjecturar o conceito de periodicidade em uma função trigonométrica.

A análise permitiu constatar que a atividade dos alunos em contexto tecnológico, integrando diferentes representações inter-relacionadas, ajudou os alunos a avançarem na construção do conceito de periodicidade em funções trigonométricas, de forma que a interação e o dinamismo das ações de relacionar, buscar e estender facilitaram a coordenação interna entre as representações analíticas e geométricas. Neste sentido a investigação confirma que o uso simultâneo de representações geométricas e algébricas dinâmicas em atividades interativas podem auxiliar a avançar na compreensão e na construção de conceitos matemáticos

Agradecimentos

Agradecemos à Fundação de Apoio ao Desenvolvimento do Ensino, Ciência e Tecnologia do Estado de Mato Grosso do SUL (FUNDECT) pelo subsídio ao Projeto nº59/300.304/2016 e CIAFEM 26150, ao qual se refere este artigo.

Referências Bibliográficas

Biggs, J., Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

[12] Observe: $\alpha + 2\pi$ corresponde a uma volta completa, mais um arco α, ou seja, coincide com a posição do arco α no ciclo.

Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. (2003).Design experiments in education research. Educational Researcher, v.32, n.1, p. 9-13.
Figueiredo, S. A de. (2015). Formação Inicial de Professores e a Integração da Prática Como Componente Curricular na Disciplina de Matemática Elementar. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo.
Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. And Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. Journal for Research in Mathematics Education, 35(5), 305-329.
Piaget, J. (1977). Studies in Reflecting Abstraction. Sussex: Psychology Press.