

ABORDAGEM DE OBJETOS MATEMÁTICOS EM AMBIENTE COMPUTACIONAL

Cristiana Fusco - Marcos Paranhos - Renata Rossini
cfusco@pucsp.br, paranhosm@hotmail.com, renatarsin@gmail.com
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem da Matemática

Modalidade: CB

Nível educativo: terceiro ou bacharelado (superior)

Palavras –chave: aprendizagem significativa - modelação matemática – ambiente computacional – bacharelado

Resumo

O trabalho apresenta um estudo de caso realizado com dois alunos de um bacharelado em Ciência da Computação. Foram aplicadas atividades de modelação elaboradas com o objetivo de investigar como tais atividades em ambiente computacional podem contribuir para a articulação da aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos de Geometria Analítica e Álgebra Linear como, por exemplo, transformações no Espaço Bidimensional utilizando coordenadas polares e equações paramétricas no Espaço Tridimensional de modo a obter uma superfície parabolóide elíptica. O software escolhido foi o Winplot, pois se trata de um software concebido para traçar e trabalhar com curvas e superfícies em ambientes com duas ou com três dimensões. O referencial teórico baseia-se na aprendizagem significativa de David Ausubel (1980) que acredita que para ocorrer uma aprendizagem é necessário partir daquilo que o aluno já sabe. O trabalho também apresenta fundamentos sobre modelação matemática apoiados em Baggio (2008), Bassanezi (1999), Burak (1992) e Biembengut (2003).

Introdução

Pesquisadores em Educação Matemática tem se preocupado em pesquisar novas metodologias de ensino. Professores universitários da área de Matemática estão buscando formas de facilitar a aprendizagem de determinados conteúdos. As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear são, tradicionalmente, oferecidas em cursos da área de exatas. Paranhos (2015) elaborou atividades de Modelação Matemática em ambiente computacional para a sistematização, articulação e aplicação de objetos matemáticos estudados nas disciplinas mencionadas acima.

Neste trabalho vamos apresentar um estudo de caso realizado com dois alunos de um curso de Ciência da Computação. Aplicamos atividades de modelação elaboradas por Paranhos (2015) com o objetivo de investigar como atividades de modelação em ambiente computacional podem

contribuir para a articulação da aprendizagem significativa de conteúdos matemáticos de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Modelagem Matemática

A Modelagem na escola diferencia-se da Modelagem Experimental das Ciências Naturais e da Matemática Aplicada, uma vez que na escola é utilizada primordialmente como forma de ensino e aprendizagem da Matemática.

Para Baggio (2008), a Modelagem Matemática é um método de pesquisa utilizado no ensino e aprendizagem da Matemática, que analisando situações e fenômenos da vida real, tem como objetivo construir um modelo que represente a situação estudada. O método é bastante utilizado e estudado no campo da Educação Matemática, uma vez que o processo que se desenvolve para se chegar ao modelo estudado contribui para o aprendizado do aluno, que tem a oportunidade de aprender conceitos matemáticos e aplicá-los em algum contexto.

Estudiosos apresentam suas percepções sobre o tema:

A Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. Tal processo, que consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvê-los e, então, interpretar suas soluções na linguagem do mundo real, é um processo dinâmico e atraente. (BASSANEZI, 1999, p.15).

Nesse processo o aluno aprende matemática de forma contextualizada, integrada e relacionada com conhecimentos cotidianos. O aluno é quem procura compreender o mundo em que vive, por meio da interação com a realidade. O professor fica encarregado de mediar, auxiliar e orientar as ações do aluno, fazendo com que haja reflexão sobre o que se vai aprender.

Essas percepções convergem em alguns aspectos: “a Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões” (BURAK, 1992, p.62).

Porém, ao utilizar a Modelagem Matemática os professores encontram algumas dificuldades, Biembengut (2003) apresenta e trata de uma dessas dificuldades. O professor não sabe que caminhos o modelo tomará e muitas vezes esse modelo apresenta dificuldades de adequação ao currículo disponível. Diante disso, Biembengut propõe uma adaptação da Modelagem Matemática para Modelação Matemática, onde o professor pode optar por determinados modelos direcionados a um determinado currículo, de acordo com o nível dos alunos.

A Modelação Matemática baseia-se no conteúdo programático, partindo de modelos matemáticos que possam ser aplicados nas diversas áreas do conhecimento. Proporciona ao aluno compreensão dos conceitos matemáticos, capacidade de interpretar, formular e resolver problemas, além de despertar o senso crítico e criativo. Na Modelação Matemática, o professor atua de duas formas, uma voltada ao ensino do conteúdo programático e outra voltada ao ensino da Modelação Matemática.

É importante ressaltar que a concepção e terminologia Modelação Matemática é a que melhor se aplica ao que se apresenta neste artigo.

Aprendizagem significativa

O referencial teórico fundamenta-se na aprendizagem significativa, ideia central da teoria do psicólogo americano David Ausubel (1918-2008). O autor acredita que para ocorrer uma aprendizagem é necessário partir daquilo que o aluno já sabe. A aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação se ancora em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do estudante, esses prévios conhecimentos são denominados “subsunçores” por Ausubel (Ausubel,1980)

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016) uma das condições para que a aprendizagem seja significativa é a predisposição positiva do aluno para aprender, o que não depende de sua estrutura cognitiva, mas sim de características do ambiente de ensino e aprendizagem e de fatores motivacionais.

O Ambiente Computacional

O Ambiente Computacional foi escolhido neste experimento exatamente por favorecer a dinâmica que se pretende, de articulação de conteúdos e variação de possibilidades. Além de apresentar uma nova maneira de visualizar um objeto ou problema matemático, o ambiente computacional amplia a capacidade de análise e aprendizado da situação estudada. Ideia apresentada na reflexão a seguir:

A importância da flexibilidade representacional destes instrumentos (computadores e calculadoras) reside em dois tipos de razões. Por um lado, diferentes representações de uma ideia complexa permitem salientar diferentes aspectos dessa mesma ideia e, dessa forma, favorecem vários tipos de análise. Por outro lado, é um fato que os alunos diferem na sua capacidade de compreender e utilizar certas representações. Desta forma, ao tornar disponível diferentes representações, com recurso ao computador e à calculadora, alargam-se as possibilidades de aprendizagem matemática em face de uma situação real. (MATOS, 1997, p.42).

O software escolhido foi o Winplot, programa gráfico e gratuito que foi desenvolvido pelo professor Richard Parris da Phillips Exeter Academy, USA. Trata-se de um software concebido para traçar e trabalhar com curvas e superfícies, em ambientes com duas e com três dimensões. Apresenta diferentes possibilidades de entradas para essas curvas e superfícies e vários recursos para se trabalhar com elas, tais como equações, funções, derivadas, integrais, desigualdades no plano cartesiano, curvas paramétricas, curvas polares, curvas cartesianas, expressões analíticas, gráficos e tabelas. É de simples utilização pois os menus são bastante amigáveis, existe ajuda em todas partes do programa e aceita as funções matemáticas de maneira bastante natural.

O software Winplot foi concebido para tratar de curvas e superfícies do ponto de vista da Geometria Analítica, isso o diferencia de outros softwares como o Cabri-Géometre que trata dessas curvas e superfícies do ponto de vista da Geometria Euclidiana permitindo que sejam construídas todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Outros softwares como o Geogebra que reúne geometria, álgebra e cálculo e o Wolfram Mathematica apresentam as mesmas características, porém o Winplot dispensa instalação além de ser leve e gratuito.

Estudo de caso

Esta pesquisa utiliza os pressupostos de estudo de caso, uma metodologia que tem sido utilizada em Educação de maneira mais consistente desde 1975, segundo André (2005).

O renomado pesquisador Robert K. Yin, Yin (1994, p.19), considera que os estudos de caso representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo “como” e “por que” e quando o foco se encontra em fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real.

Para Lüdke e André (1986, p.21), a preocupação central ao desenvolver um estudo de caso é a compreensão de uma instância singular. Isso significa que o objeto estudado é tratado como único, uma representação singular da realidade que é multidimensional e historicamente situada.

Concordando com Lüdke e André (1986) quanto à necessidade de levar em conta o contexto em que se situa uma pesquisa, relatamos que esta pesquisa foi desenvolvida em uma instituição de ensino superior de caráter filantrópico, situada na cidade de São Paulo, Brasil.

Selecionamos dois alunos do curso de bacharelado em Ciência da Computação de uma Universidade particular de São Paulo. Passaremos a denominá-los Aluno 1 (A1) e Aluno 2 (A2). Ambos já haviam cursado as disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear. A1 cursou no

ano anterior da pesquisa e A2 havia cursado há três anos. A1 conhecia o Winplot e A2 teve seu primeiro contato na realização da atividade. Descreveremos apenas um recorte de duas atividades (anexadas no final). Cada aluno dispunha de um notebook com o software Winplot já instalado para trabalhar. Receberam os textos das atividades fotocopiadas. Ao lado de cada um deles estava uma professora observadora para fazer os registros da aplicação das atividades e de seus comentários. Um terceiro professor atuou como tutor, orientando quanto ao uso do software, principalmente o uso da janela equações paramétricas da reta e a animação que o software proporciona. O tutor também esclareceu dúvidas quanto a alguns conteúdos específicos de Geometria Analítica que não tinham sido estudados nas aulas regulares dessa disciplina.

A primeira atividade consistia de transformações no Espaço Bidimensional. Os alunos abriram, sem dificuldade, o software Winplot e a janela 2D. Foram ao menu e escolheram a opção equação e, depois, o tipo paramétrica. Na janela aberta apareceram campos para as coordenadas x e y e intervalos para o parâmetro t . No item a) dessa atividade deveriam criar uma expressão para cada coordenada usando um parâmetro e determinar o intervalo de variação de modo a obter a rotação de ângulo de 45° , em torno da origem e no sentido anti-horário, da reta $y=x/2$. Foi necessária a intervenção do professor que na lousa recordou equação da reta na forma paramétrica. Para tanto utilizou coordenadas polares, explicadas a partir do desenho de uma circunferência de centro na origem e raio 2. Com essas orientações os alunos determinaram a equação paramétrica da reta solicitada na forma polar: $x=\cos t$ e $y=2\cos t+1$.

Em seguida, os alunos leram a introdução da atividade 2 (em anexo) que era sobre equações paramétricas no Espaço Tridimensional. Abriram a janela 3D do software Winplot e no menu escolheram a opção equação, na forma paramétrica. A tarefa consistia em criar uma expressão para cada uma das coordenadas x , y e z , usando ou não os parâmetros t e u , de modo a obter uma superfície parabolóide elíptica. O professor inicia dizendo: “vamos pensar em coordenadas polares?”. Para isso, deveriam analisar a figura do texto, que representa um ponto do Espaço Tridimensional e suas coordenadas polares. Essa figura serve como base para determinar a equação paramétrica do parabolóide elíptico em coordenadas polares. O professor reproduz a figura do texto na lousa, mostra que $x=r\cos(t)\cos(u)$ e que $y=r\cos(t)\sin(u)$. Em seguida indaga: “Como determinar a coordenada z ?” O aluno A1 revê a figura da atividade e não consegue determinar a coordenada z . O professor questiona: “e se fosse um cone, como seria o recorte meridional da figura?” O aluno A1 responde: “Seria uma reta”. O professor faz o esboço do cone e mostra que

o recorte meridional da figura é uma reta. Os alunos pensam, mas não conseguem determinar a coordenada z. Baseado na figura do texto, o professor mostra que a coordenada z se relaciona com a projeção do raio ($r \cos t$) por intermédio de uma parábola. Dessa forma, a coordenada z fica sendo $r \cos^2 t$. Com essas informações, os alunos digitaram as equações de x, y e z no Winplot demonstrando dificuldades com a variação dos parâmetros t e u e, mais uma vez, foram orientados pelo professor que esclarece que o parâmetro t varia de 0 a $\pi/2$ e o parâmetro u deve variar de 0 a 2π e que o π deve ser escrito literalmente pi no campo das variações dos parâmetros. No final visualizam na tela o parabolóide elíptico conforme figura (anexo).

Considerações finais

O grau de complexidade das atividades de modelação utilizadas nesse estudo mostra que elas não são totalmente autorrealizáveis, isto é, faz-se necessário que um professor resgate alguns pré-requisitos necessários de conceitos matemáticos para que os alunos consigam avançar e atingir o que lhes é solicitado. A escolha do software Winplot foi apropriada por ser de fácil utilização. Questionamos os alunos quanto ao grau de dificuldade de utilização do Winplot e numa escala de 0 a 10 atribuíram valores 2 e 3.

Esta pesquisa mostra que as atividades propostas de modelação de curvas contribuem de forma efetiva para uma articulação entre conteúdos matemáticos já estudados em Geometria Analítica e Álgebra Linear. Por exemplo, um dos ganhos interdisciplinares foi a articulação entre equações paramétricas da reta e a matriz de rotação em torno da origem e na base canônica do \mathbb{R}^2 conforme descrito abaixo:

Exemplificando a situação, sejam a reta r de equações paramétricas $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ e M a

matriz de rotação de ângulo a, na base canônica do \mathbb{R}^2 , cujo ponto fixo é a origem do sistema de

coordenadas, $M = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$. O produto das matrizes

$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \cos a & -t \sin a \\ 2t \sin a & t \cos a \end{pmatrix}$ fornece as equações da reta s após a rotação de

ângulo a:

$$s: \begin{cases} f(t) = 2t \cos a - t \sin a \\ g(t) = 2t \sin a + t \cos a \end{cases}$$

A utilização do software Winplot permite inserir as funções $f(t)$ e $g(t)$; fazer uma animação, variando automaticamente o valor de a , o ângulo de rotação. Dessa forma, a reta original

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ gira em torno do ponto } (0,0).$$

Os alunos conseguem movimentar retas e superfícies variando parâmetros e intervalos. A visualização dos objetos matemáticos e, ainda mais, com movimento que os transformam torna a aprendizagem muito mais significativa; o aluno sai de um ambiente estático como a folha de um livro ou caderno para um ambiente dinâmico. A utilização desse recurso computacional vai ao encontro das afirmações de Almeida, Silva e Vertuan (2016, p.36), de que “a aprendizagem significativa dos estudantes sofre a influência de diversos fatores tais como o material de ensino”.

Referências

Almeida, L.W.; Silva, K.P.; Vertuan, R.E. (2016). *Modelagem Matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto.

Ausubel, D.P. et al. Tradução Eva Nick (1980). *Psicologia Educacional* 2 ed. Rio de Janeiro: Interamericana.

André, M.(2005) *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. Brasília: Liber Livro Editora.

Baggio, T. M. *Uma proposta de modelagem matemática como estratégia de ensino*. (2008) <http://www.diaadiaeducação.pr.gov.br/>Consultado 20/11/2012.

Bassanezi, R.C.(1999) Modelagem matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. *Revista BioMatemática – IMECC –UNICAMP*, Campinas, 9, 9-22.

Biembengut, M. S.Hein, N.(2003). *Modelagem matemática no ensino*. 3.ed. São Paulo: Contexto.

Burak, D.(1992). *Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem*. Tese de Doutorado em Educação – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Ludke,M.;André,M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. Coleção Temas básicos de educação e ensino. São Paulo: EPU..

Matos, J. F.(1997) Modelação matemática: o papel das tecnologias de informação. *Revista Educação Matemática*, Lisboa: APM, 45, 41-43.

Paranhos, M.M. (2015). *Parametrização e movimentação de curvas e superfícies: Para uso em Modelação Matemática*. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo

Yin, R.(2001) *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Trad. Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman.

Winplot para Windows 95/98 / ME / 2K / XP / Vista / 7 (846K).

<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>. Consultado: 24/04/2014.

Anexos

Atividade com Equações Paramétricas no Espaço Bidimensional

Essa atividade destina-se a determinar Equações Paramétricas de Curvas no Espaço Bidimensional com o uso do software Winplot.

Na forma paramétrica as Coordenadas Cartesianas são determinadas pelas equações $x=f(t)$ e $y=g(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) e a curva é formada pela variação de t .

Abra o software e escolha janela 2D.

No menu escolha a opção equação e, depois, paramétrica.

Na janela aberta existem campos para as coordenadas x e y e um intervalo para o parâmetro t .

Crie uma expressão para cada coordenada, usando ou não o parâmetro t , e caso use-o, determine o seu intervalo de variação de modo a obter:

a) A reta $y= x+1$ (fazer de duas maneiras diferentes da forma, $x= t$ e $y= t+1$).

b) Uma circunferência de raio 1

c) A elipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

d) A elipse $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

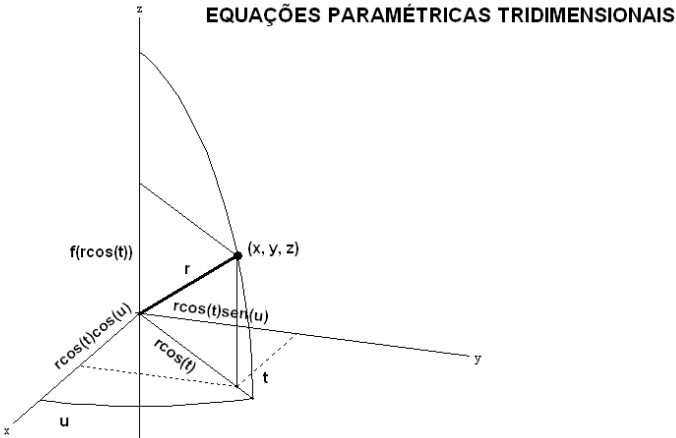
e) Uma espiral no intervalo $[0, k\pi]$, $k \in \mathbf{N}$ (fazer de três maneiras diferentes).

Sugestão: Em alguns casos, substitua x e y pelas projeções trigonométricas do raio.

Salve as telas para entrega ao professor.

Atividade com Equações Paramétricas no Espaço Tridimensional

Essa atividade destina-se a determinar Equações Paramétricas de Curvas e Superfícies no Espaço Tridimensional com o uso do software Winplot.



Na forma paramétrica as Coordenadas Cartesianas são determinadas pelas equações $x = f(t,u)$, $y = g(t,u)$ e $z = h(t,u)$ ($t, u \in \mathbf{R}$) e a curva ou a superfície é formada pela variação de t e u .

Abra o software e escolha janela 3D.

No menu escolha a opção equação e, depois, paramétrica.

Na janela aberta existem campos para as coordenadas x , y e z e intervalos para os parâmetros t e u . Crie uma expressão para cada coordenada, usando ou não os parâmetros, e caso use-os, determine os seus intervalos de variação de modo a obter:

- a) Uma superfície parabolóide elíptica
- b) Uma superfície cônica
- c) Uma superfície esférica
- d) Uma superfície cilíndrica em torno do eixo x e outra em torno do eixo z
- e) Uma região do plano $z = x + y$
- f) Uma região da superfície $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
- g) A reta intersecção do plano, bissetriz do 1º quadrante, com o plano $z = x + y$
- h) A circunferência de raio=1, centro na origem e contida no plano $z = x + y$

Sugestão: Em alguns casos, substitua x , y e z pelas projeções trigonométricas do raio conforme a figura. Salve as telas para entrega ao professor.