EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA PRODUCCIÓN Y USO DE MODELOS CUADRÁTICOS

Johnny Alfredo Vanegas D. - Sara Marcela Henao S.
yovanegasdiaz@gmail.com, saramarcelahenao@gmail.com
Instituto de Educación y pedagogía - Universidad del Valle - Colombia

Tema: La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras claves: Educación matemática realista, modelación matemática, niveles de matematización, modelos cuadráticos.

Resumen

La presente propuesta se enmarca en el enfoque de la Educación Matemática Realista y busca ilustrar algunos de sus referentes teóricos y metodológicos en el diseño de tareas relativas al trabajo con modelos cuadráticos. Se destaca el papel que desempeña el proceso de modelación matemática en la conjugación de las matemáticas y la realidad para la promoción de la formación de conceptos matemáticos asociados a lo cuadrático, donde se asumen los diversos niveles de matematización, como una posibilidad que permite analizar el desempeño matemático de los estudiantes y las implicaciones didácticas y cognitivas, en relación con el proceso de modelación en el ámbito escolar.

1. Contextualización y justificación del problema

Esta investigación surge como resultado del reconocimiento de algunas problemáticas y preocupaciones recurrentes en la investigación en Di*dáctica de las Matemáticas* en relación con la búsqueda, el diseño e implementación de nuevas propuestas de enseñanza formuladas para abordar el (sin) sentido común de los estudiantes en la interpretación y resolución de problemas en diferentes contextos, lo cual a su vez involucra el problema actual de los estudiantes, para conectar la matemática escolar con sus saberes informales.

En la discusión de tales preocupaciones, se reconoce la importancia de estudiar los fenómenos asociados a los procesos de "transferencia" de los conocimientos matemáticos a actividades de la vida diaria. De hecho, Martínez, Da Valle, Bressan y Zolkower (2002) proponen los contextos como un punto de partida importante en este asunto, al poner en juego elementos del sentido común de los estudiantes y conocimientos de lo que ellos saben acerca de cómo son las cosas en el ámbito extraescolar.

Al margen de estas perspectivas, el MEN (1998) plantea que es necesario vincular los contenidos matemáticos con experiencias cercanas a la realidad de los estudiantes, de tal forma que los conocimientos matemáticos sean presentados y enseñados desde situaciones matemáticas concretas para que faciliten su manejo y apropiación, al tiempo que promuevan el desarrollo de ciertas competencias en el pensamiento matemático. Más aún, el MEN (2006) considera que a través de la modelación matemática se posibilita en los estudiantes la construcción de modelos matemáticos propios, favoreciendo el tratamiento y la resolución de problemas, pero también una mejor perspectiva de aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, son diversas las dificultades que se pueden presentar al introducir la modelación en las clases de matemáticas, debido a la complejidad que exige la producción de un modelo, el tiempo de convivencia de los docentes y de los estudiantes ante unos métodos de enseñanza "tradicionalistas", y esto a su vez, puede interferir de manera negativa si los docentes que la usan no tienen la suficiente formación para hacerlo (Biembengut & Hein, 2004; Trigueros, 2009).

Estas preocupaciones convergen en un problema general de formación docente, relacionado con las dificultades y obstáculos que estos presentan para comprender, identificar y diseñar contextos significativos que promuevan la construcción de modelos matemáticos inventados o "reinventados" por los mismos estudiantes.

Frente a estas problemáticas, emerge como una respuesta plausible, la consideración de los *contextos* tal como se utilizan dentro de la Educación Matemática Realista, pues a partir de estos, se promueve el proceso de modelación matemática en las clases, a la vez que se crean puentes para pasearse entre lo abstracto y lo concreto, facilitando diversas conexiones matemáticas y mejores perspectivas de aprendizaje de los contenidos matemáticos.

En particular, el trabajo con contextos que promuevan la producción y usos de modelos matemáticos, es más rico cuando el objeto matemático central que interviene en la situación-problema, también se ha desarrollado y comprendido a partir de consideraciones de la realidad física junto a un proceso constante de matematización.

Uno de estos objetos es la *función cuadrática*, fuertemente reconocida dentro de la disciplina matemática por su papel en la modelación de fenómenos físicos (cinemática, gravitación, fuerza eléctrica) y fundamental en el estudio de las matemáticas escolares, gracias a su poder modelizador y a sus múltiples presentaciones que permiten un mejor acercamiento con otras disciplinas científicas (Luna & Bravo, s.f.).

Sin embargo, pese a ser un concepto central en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, su comprensión sigue siendo un asunto problemático para los estudiantes (Lacasta & Pascual, 1998; Azcárate & Deulofeu, 1990) que no se sienten atraídos por las estrategias de enseñanza “tradicionales”, basadas en la construcción de tablas de valores y representaciones gráficas, que entre otras cosas pueden presentar muchas imprecisiones y en ocasiones obstaculizar los procesos de transferencia y aplicación del conocimiento a otros campos (Arboleda & Meneses, 1996).

En el caso de *lo cuadrático* (función cuadrática, ecuación de segundo grado y parábola) el vínculo que se puede establecer con fenómenos físicos del mundo real, favorece que pueda trabajarse significativamente en las clases matemáticas y acercar a los estudiantes hacia una mejor conexión entre el mundo matemático y el mundo real, ayudando también a que se fortalezca la articulación e integración de la modelación matemática en el aula.

Surge de esta manera, un interés de tipo didáctico relacionado con la búsqueda, el diseño y la aplicación de algunas situaciones problemáticas a partir de las cuales se puedan estudiar los procesos de *matematización* de los estudiantes cuando trabajan en la construcción y uso de modelos cuadráticos, principalmente aquellos que tienen cierta cercanía a lo funcional, dejando abierta la posibilidad de que emerjan expresiones algebraicas y representaciones gráficas como la parábola.

2. Marco de referencia conceptual

2.1. Principios de la Educación Matemática Realista

Esta propuesta relativa al proceso de modelación matemática, toma como referencia las principales aportaciones teóricas de la *Educación Matemática Realista.* Dicho enfoque teórico se basa en unos principios de enseñanza y aprendizaje, cuyas directrices para la enseñanza de las matemáticas surgen como consecuencia natural de las ideas alcanzadas sobre el aprendizaje de las matemáticas. (Goffree, 2000).

Principio de actividad: significa que los estudiantes se enfrentan a situaciones problemas en las cuales ellos mismos a través de sus conocimientos informales “reinventan” las matemáticas como participantes activos durante el proceso de aprendizaje. (Panhuizen, 2008). Así pues, inicialmente las producciones de los estudiantes representan la construcción de unas matemáticas que son producto de una actividad de organización o modelación matemática que ellos mismos elaboran. Dicho proceso de modelación matemática se denomina matematización y puede estudiarse a partir de dos niveles, la *matematización horizontal* y la *matematización vertical*.

La matematización horizontal se entiende como el proceso mediante el cual los estudiantes -con ayuda del docente- logran trasladar el problema de su contexto a algún tipo de matemáticas, mediante métodos informales o pre-formales a diferentes niveles de abstracción (Arcavi, 2006). Mientras que la matematización vertical puede entenderse como el proceso que lleva a la elevación del pensamiento matemático abstracto, puesto que en este nivel la organización matemática se realiza dentro del mismo sistema matemático sin referenciar el contexto del cual se desprende la situación problema. (López & Velázquez, 2006)

Principio de realidad: indica que se debe partir de *contextos* y *situaciones realistas* con el ánimo de que los estudiantes sientan la necesidad de matematizar la situación problema. Dichos contextos y situaciones realistas guardan alguna conexión con el mundo real, pero son ante todo situaciones que son reales en la mente de los estudiantes, y por tanto las situaciones realistas tienen un carácter relativo que depende exclusivamente de la experiencia previa de los alumnos y/o de la capacidad de estos para imaginar la situación y no necesariamente implica que los problemas provienen del mundo real. De ser así, las situaciones limitarían las posibilidades de los estudiantes para aprender a operar dentro de los sistemas matemáticos. (Bressan & Gallego, 2011).

Principio de nivel: durante el proceso de modelación matemática los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión: desde la capacidad para inventar soluciones informales estrechamente ligadas al contexto *[modelo de*] pasando por esquematizaciones generales de la situación, hasta llegar a la adquisición de relaciones más amplias aplicables a otros contextos y situaciones *[modelo para*] (Panhuizen, 2008, Bressan & Gallego, 2011).

Principio de entrelazamiento: existe una fuerte interrelación e integración entre los contenidos matemáticos escolares, puesto que la resolución de situaciones realistas a menudo exige establecer conexiones con una amplia variedad de herramientas y conocimientos matemáticos. Así pues, Bressan & Gallego (2011) afirman que este enfoque no hace mayores distinciones entre las unidades curriculares, generando coherencia a la enseñanza y facilitando que se den modos de matematizar muy diferentes.

Principio de interacción: el aprendizaje de las matemáticas es una actividad social donde la interacción colectiva (estudiante-estudiante/s y estudiante-docente) promueve la elevación en los niveles de comprensión. Esto no implica que todos los estudiantes alcanzan el mismo nivel de comprensión, sino que cada estudiante sigue su trayectoria propia de aprendizaje. Además, es esencial que el docente encuentre el momento oportuno para incluir la reflexión en el salón de clases y que anticipe cuando la interacción social puede obstaculizar el proceso de aprendizaje. (Goffree, 2000).

Principio de orientación: Los docentes desempeñan un papel crucial en la forma en cómo los estudiantes adquieren conocimientos, y es indispensable que estos promuevan espacios a través de los cuales se puedan construir los saberes matemáticos. De ninguna forma el docente debe olvidar que es un mediador entre las producciones informales de sus estudiantes y las herramientas formales de la matemática, pues podría caer en el error de mostrar a los estudiantes lo que deben aprender, contradiciendo el principio de actividad.

2.2. Lo cuadrático

Para efectos de esta investigación lo cuadrático se asocia a tres nociones matemáticas: función cuadrática, ecuación de segundo grado y parábola (Mesa & Villa, 2007), aunque se privilegia una perspectiva moderna que posiciona *lo cuadrático* en consonancia con los trabajos de galileo y la variación con cierto acercamiento hacia lo funcional.

Así pues, para los intereses de esta investigación, la producción y uso de modelos cuadráticos por parte de los estudiantes, está limitada a modelos cercanos a lo funcional desde una perspectiva didáctica hacia lo variacional, pues no se alude únicamente al carácter estático de la variable. *Lo cuadrático* se concibe como una relación de dependencia entre dos cantidades que varían y por tanto, las tareas diseñadas se enmarcaron en una perspectiva variacional, donde lo primordial es la relación de dependencia entre las dos o más cantidades que varían y para la cual, los estudiantes pueden construir modelos que logren establecer la manera en que una variable cambia respecto a la otra.

3. Propuesta Metodológica

El diseño metodológico se fundamentó en consideraciones metodológicas de la EMR (*los contextos*, *el análisis fenomenológico* y *la gestión docente*) y algunos elementos de un estudio de casos cualitativo, básicamente un *estudio de casos descriptivo*.

El estudio se basó en el diseño de tres tareas, integradas por una descripción general y algunos modelos plausibles de la actividad constructiva de los estudiantes en diversos niveles de matematización.
En la aplicación de las tareas diseñadas participaron 20 estudiantes de los últimos grados de educación media, seleccionados del proyecto "*semilleros de matemáticas*" de la Universidad del Valle. Se favorecieron los estudiantes que habían integrado los cursos: *algebra y funciones o probabilidad, funciones y limites*, independientemente de sus desempeños académicos, pues lo que se buscaba era la conformación de una clase con conocimientos matemáticos fundamentales, que posibilitarán la visualización de *niveles de matematización* en el desarrollo de cada una de las tareas y la conformación de *grupos heterogéneos* caracterizados por la presencia de estudiantes con diferentes habilidades matemáticas.
La aproximación metodológica permitió el empleo de recursos tales como; la entrevista, videos y grabaciones de audio que ayudaron a realizar con mayor detalle la interpretación y análisis de los resultados obtenidos. De igual manera, la observación participativa y especialmente las producciones de los estudiantes, desempeñaron un papel fundamental para comprender cuáles son los niveles de matematización que presentan estos estudiantes cuando trabajan en la producción de modelos cuadráticos, a través de tareas fundadas en *contextos significativos*.

Dentro de esta propuesta metodológica también se elaboró un *análisis predictivo* sobre la forma en que los estudiantes pretenden dar solución a cada una de las situaciones-problema, el cual sirvió de base para identificar y definir algunas características que delimitaban los *niveles de matematización* cuando se trabajaba con las tareas diseñadas. En consecuencia, fue importante obtener una visión más profunda, por ejemplo, de cómo los estudiantes utilizan sus conocimientos informales para producir modelos o cómo estos modelos evolucionan dentro de la misma matemática. Más aún, este esfuerzo por llegar a comprender los procesos individuales de los estudiantes, permitió la creación de unas categorías de análisis "parciales" asociadas a cada *nivel de comprensión*, de tal modo, que las acciones y modelos de los estudiantes podían asignarse a un *nivel de comprensión* particular.

Finalmente, se realizó un *análisis prospectivo* en el que se contrastó las suposiciones integradas en el *análisis predictivo* con lo que realmente habían construido de manera interactiva los participantes. De esta manera, se analizó en qué medida los estudiantes construyeron los modelos esperados (discutidos en el *análisis predictivo*) y otros que no fueron tomados en cuenta, pero que podían asociarse a uno de los cuatro *niveles de comprensión.* Así pues, se confrontaron los planteamientos expuestos en ambos tipos de análisis culminando con la caracterización de los niveles de matematización de los participantes y con el aporte de elementos desde la práctica que permitían ampliar el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista.

4. Algunas conclusiones

Los resultados obtenidos en este trabajo nos permiten reflexionar acerca de tres aspectos importantes:

- ✓ Nuestra investigación dio lugar a un marco teórico y una aproximación metodológica que permitió establecer nexos e interrelaciones entre los procesos de matematización, el diseño de tareas y el trabajo con modelos cuadráticos en el contexto de la EMR. En este orden de ideas, se identificaron elementos que posibilitaron la conceptualización de base para abordar el problema y la metodología.
- ✓ El trabajo con la modelación matemática desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista exigirá estrategias de formación y cualificación de docentes que en el mediano plazo y largo plazo, permitan su asimilación. En este sentido la experiencia de trabajo con estudiantes permitió identificar una vía inicial en términos de los dispositivos y acciones a desarrollar.
- ✓ La Educación Matemática Realista, ofrece un marco teórico y metodológico que podría ser fructífero para promover un acercamiento particular a los procesos de modelación matemática en el aula y materializarse en estrategias de intervención en las aulas de matemáticas. En efecto, este trabajo de investigación en el contexto de la EMR puede extenderse a otros dominios matemáticos (lo exponencial, lo trigonométrico, lo logarítmico) y entrar en contacto con enfoques en *Didáctica de las Matemáticas* que también abordan desde lo teórico y metodológico la modelación matemática o entrar en contacto con enfoques de la modelación matemática que se realizan en el marco del trabajo con las tecnologías de la información y la comunicación en la escuela.

Referencias bibliográficas

Arboleda, N. & Meneses, R. (1996). Función polinómica de segundo grado: modelo diseñado con hoja de cálculo. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-112709_archivo.pdf. Consultado el 13/11/2011.

Arcavi, A. (2006). *Lo cotidiano y lo académico en matemáticas.* http://www.sinewton.org/numeros/numeros/63/Articulo01.pdf/ Consultado 2/02/2012

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid, España.

Biembengut, M. & Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática,* 16(002), 105-125

Bressan, A. & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista: Bases teóricas. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una educación matemática realista. En Gorgorió, Balachef y otros (comp.), *Matemática y Educación. Retos y cambios en una perspectiva internacional*, ICE, Universidad de Barcelona, Ed. Graó.

Lacasta, E. & Pascual, J. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid, España.

Luna, J. & Bravo, M. (s.f.). Enseñanza de la función cuadrática interpretando su comportamiento al variar sus parámetros. Disponible en: http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at05/PRE1178753682.pdf. Consultado el 23/12/2011.

López, F. & Velázquez E. (2006). Un ejemplo de la utilidad de los contextos en la matemática realista: los algoritmos de suma y resta por columnas. Disponible en: www.box.com/shared/static/a2497an0iv.pdf. Consultado el 20/12/2011.

Martínez, M., Da Valle, N., Bressan, A. & Zolkower, B. (2002). La relevancia de los contextos en la resolución de problemas de matemática. *Paradigma*, 22 (1), 59-94.

Mesa, Y. & Villa, J. (2007). Elementos históricos epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. Disponible en: http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/169. Consultado el 20/12/2011.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Bogotá: Magisterio.

Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los países bajos: un recorrido guiado. *correo del maestro,* 149,23-54.

Trigueros, G. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9 (46), 75-87.