

Mecánica de una Partícula Confinada a una Superficie

Alejandro Daniel Quintero - Jorge Nicolás López

1. Introducción

La enseñanza de geometría diferencial dirigida a estudiantes de grado de carreras matemáticas tradicionalmente no incluye aplicaciones a la mecánica clásica, aunque la relación entre estos dos campos es profundamente conocida. Este trabajo pretende exponer un ejemplo de esta relación a nivel de un alumno universitario de matemática.

En los textos clásicos de geometría de superficies, como [1], se realiza todo el desarrollo de la derivada covariante de una curva sobre una superficie, se aplica esta derivada al propio campo de vectores tangente a la curva y se impone la condición que ésta sea igual a cero, obteniendo así las geodésicas sobre la superficie; si en lugar de eso pedimos que la derivada covariante coincida con un campo podemos desarrollar la mecánica de una partícula confinada a la superficie sometida a dicho campo. Este pequeño agregado regirá el espíritu de este trabajo. No se pretende originalidad en los resultados últimos obtenidos ya que las mismas ecuaciones las encontramos ya en textos de graduación, especialmente dirigidos a estudiantes de física, pero en estos casos el tratamiento es en coordenadas generalizadas y generalmente el desarrollo de las exposiciones sigue un punto de vista lagrangiano y, a veces, es previo a una introducción a métodos variacionales (ver por ejemplo [3], Capítulo 4). En contraste con lo anterior, la exposición en este trabajo es puramente geométrica, aunque usa cierta intuición física del problema que ayuda a la comprensión del tema.

Consideramos que la incorporación de resultados de esta naturaleza revaloriza ante los alumnos los contenidos enseñados y permite un entendimiento más global de lo estudiado.

La exposición pretende ser mínimamente autocontenida, partiendo de conocimientos básicos de cálculo diferencial y álgebra lineal. En la segunda sección se dará la motivación didáctica para el estudio de la mecánica del confinamiento de partículas, el cual podemos resumir como “*conocer el movimiento que realiza una bolita dentro de una copa*”. A continuación, en la sección 3 se presentarán algunas definiciones y resultados básicos del cálculo diferencial sobre una superficie, haciendo hincapié en la geometría intrínseca. Se darán las fórmulas y enunciados requeridos alternando con ejemplos (nunca suficientes!). Ya en la sección 4 se hará una introducción a los campos conservativos en el espacio euclídeo, para luego, en la sección 5 hacer lo propio en una superficie. El punto central será expuesto en la subsección 6.0.2 y consistirá en determinar las trayectorias de una partícula confinada a una esfera, que se producen bajos los efectos de un campo de fuerzas vertical constante -como el campo generado por el peso- sin roce. Complementaremos la exposición en la sección 7 con el teorema de la conservación de la energía sobre superficies. Al final habremos

explicado una pequeña parte de la teoría de la mecánica clásica de un partícula confinada a una superficie sometida a un campo conservativo exterior a la superficie sin mucho esfuerzo adicional al que se tiene habitualmente en comprender los contenidos de un curso de geometría sobre superficies. En la última sección planteamos algunos problemas de aplicación.

2. Motivación

Tomemos una copa de cristal, más o menos esférica, tomemos una *bolita* pequeña y hagamos girar la copa dándole un impulso inicial a la bolita. Luego dejemos la copa quieta y veamos que se observa. ¿Se puede determinar analíticamente la trayectoria de la bolita dentro de la copa?. En el caso real, por fricción, la bolita terminará cayendo al fondo, pero, sin fricción... ¿qué pasa? También notamos que la bolita se puede *despegar* de la copa y eso ya no es de nuestro interés. Reformulamos el experimento ideal considerando una bolita que se encuentra entre dos esferas concéntricas cuya diferencia de radio es igual al diámetro de la bolita, de esta manera nos aseguramos que la bolita realice una trayectoria sobre la superficie de la esfera. También desconcideramos el roce y el giro de la propia bolita sobre si misma. Abstrayendo un poco más tenemos el modelo ideal de confinamiento de una partícula puntual a la esfera sometida a la acción del campo gravitatorio, (que es equivalente al péndulo libre rígido).

La copa no tiene por qué ser exactamente esférica y eso no será un impedimento pues hallaremos resultados genéricos de tal manera que los podremos aplicar a cualquier superficie; aunque el ejemplo numérico lo realizaremos sobre la esfera. También, los resultados serán de suficiente generalidad tal que cambiando el campo de fuerzas que afecta a la bolita también podremos obtener las nuevas trayectorias generadas por este nuevo campo, aunque los ejemplos solo se restringirán a la ausencia de fuerzas y la fuerza generada por el peso.

3. Geometría diferencial sobre superficies.

Adoptaremos todas las convenciones usuales del cálculo diferencial en \mathbb{R}^n .

Notación 1 Si tenemos una función $\vec{X}(u, v)$, adoptaremos la siguiente abreviatura para las derivadas parciales $\frac{\partial \vec{X}}{\partial u} = \vec{X}_u$ y $\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} = \vec{X}_v$. También \vec{X}_{uu} representará $\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u^2}$ y abusos por el estilo.

Definición 2 Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice superficie regular si para cada $p \in S$ existen un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^3$ de p , un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una biyección $\vec{X} : U \rightarrow V \cap S$, $\vec{X}(u, v) = (X_1(u, v); X_2(u, v); X_3(u, v))$ con las siguientes propiedades:

1. \vec{X} es diferenciable.
2. \vec{X} es un homeomorfismo, o sea, existe \tilde{V} abierto de \mathbb{R}^3 tal que $p \in \tilde{V}$ y existe $F : \tilde{V} \rightarrow U$ continua tal que $F|_{\tilde{V} \cap S} = \vec{X}^{-1}$
3. $D\vec{X}$ es inyectivo, es decir

$$D\vec{X}(q).e_1 = \left(\frac{\partial X_1}{\partial u}(q), \frac{\partial X_2}{\partial u}(q), \frac{\partial X_3}{\partial u}(q) \right) = \vec{X}_u(q)$$

y

$$D\vec{X}(q).e_2 = \left(\frac{\partial X_1}{\partial v}(q), \frac{\partial X_2}{\partial v}(q), \frac{\partial X_3}{\partial v}(q) \right) = \vec{X}_v(q)$$

son linealmente independientes en todo q . La función \vec{X} es llamada parametrización local de S , o también parametrización de un entorno de p .

Definición 3 Sea S una superficie regular, $p \in S$ decimos que v es un vector tangente a S en p si existe una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Al conjunto de todos los vectores tangentes a S en p lo denotamos por $T_p S$.

Más intuitivamente: Los vectores \vec{X}_u y \vec{X}_v pertenecen al plano tangente y forman una base de dicho plano. Así, un vector $w = \alpha'(0)$ en el plano tangente puede ser escrito en la base $\{\vec{X}_u, \vec{X}_v\}$ de la siguiente forma. Consideramos la curva en U

$$t \rightarrow \vec{X}^{-1}(\alpha(t))$$

que podemos escribir como un par de funciones diferenciables $(u(t), v(t))$. Así

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(0) = \frac{d}{dt} \vec{X}(\vec{X}^{-1}(\alpha(t)))_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \vec{X}(u(t), v(t))_{t=0} \\ &= \vec{X}_u u'(0) + \vec{X}_v v'(0). \end{aligned} \tag{1}$$

Abreviaremos la notación escribiendo (u_0, v_0) en lugar de $(u(0), v(0))$ así como (u', v') en lugar de $(u'(t), v'(t))$ y otros abusos de notación similares. Lo expuesto nos sugiere la siguiente proposición.

Proposición 4 Sea $\vec{X} : U \rightarrow S$ una parametrización en un entorno de p , sea $q = \vec{X}^{-1}(p)$ entonces

$$T_p S = \text{Im} D\vec{X}_q$$

3.1. Primera forma fundamental de una superficie

El producto interno natural de \mathbb{R}^3 induce en cada plano tangente $T_p S$ un producto interno que denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Si $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ entonces $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ coincide con el producto interno de w_1 y w_2 como vectores de \mathbb{R}^3 . Este producto interno es una forma bilineal simétrica que define la forma cuadrática asociada $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $w \mapsto \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0$.

Definición 5 I_p se llama *Primera Forma Fundamental (PFF)* de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in S$.

La PFF expresa como la superficie S hereda el producto interno natural de \mathbb{R}^3 , lo cual nos permite hacer distintas mediciones sobre la superficie (longitud de curvas, áreas, ángulos, etc.) sin referirnos al espacio general donde esta se encuentra, es decir sin referirnos a \mathbb{R}^3 .

Hallemos una expresión en coordenadas para la PFF en la base $\{ \vec{X}_u, \vec{X}_v \}$ asociada a la parametrización $\vec{X}(u, v)$ en p . Notemos que toda curva diferenciable en S será escrita de la forma

$$\alpha(t) = \vec{X}(u(t), v(t))$$

con u_t y v_t diferenciables. Por lo tanto, un vector tangente $w \in T_p S$ es el vector tangente de una curva parametrizada $\vec{X}(u(t), v(t))$ con $p = \alpha(0) = \vec{X}(u_0, v_0)$ y $\alpha'(0) = w$, así obtenemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \left\langle \vec{X}_u u' + \vec{X}_v v', \vec{X}_u u' + \vec{X}_v v' \right\rangle_p \\ &= \left\langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \right\rangle_p (u')^2 + 2 \left\langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \right\rangle_p (u')(v') + \left\langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \right\rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + F(u')(v') + G(v')^2 \end{aligned}$$

en donde los valores de las funciones involucradas se evalúan en $t = 0$ y además E , F y G son

$$E(u_0, v_0) : = \left\langle \vec{X}_u, \vec{X}_u \right\rangle_p$$

$$F(u_0, v_0) : = \left\langle \vec{X}_u, \vec{X}_v \right\rangle_p$$

$$G(u_0, v_0) : = \left\langle \vec{X}_v, \vec{X}_v \right\rangle_p$$

que son llamados **coeficientes** de la primera forma fundamental en la base $\{\vec{X}_u, \vec{X}_v\}$ de $T_p S$. Haciendo a p recorrer el entorno coordenado correspondiente a $\vec{X}^{-1}(p)$ obtenemos las funciones $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ que son diferenciables en ese entorno.

En los sucesivos ejemplos iremos introduciendo los elementos de la esfera y del campo gravitatorio que usaremos al final.

Ejemplo 6 *Calculemos la primera forma fundamental de S^2 (la esfera de radio 1 y centro 0 en \mathbb{R}^3) en un punto del entorno coordenado asociado a la parametrización esférica*

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (2)$$

Con dominio $-\pi < \theta < \pi$ y $0 < \varphi < 2\pi$. Observemos que:

$$\begin{aligned} X_\theta(\theta, \varphi) &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ X_\varphi(\theta, \varphi) &= (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta = 1 \\ F(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = -\sin \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi = 0 \\ G(\theta, \varphi) &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

3.2. El diferencial de funciones sobre una superficie

Sobre la superficie es posible definir conceptos análogos a los de las funciones con dominio en \mathbb{R}^n . En particular vamos a definir función diferenciable de una superficie S en \mathbb{R} y el concepto análogo de *diferencial*. Luego haremos lo propio con el gradiente.

Definición 7 *$g : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $p \in S$ si dada una parametrización local \vec{X} de un entorno de p , la composición $g \circ \vec{X} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\vec{X}^{-1}(p)$ (en el sentido de la definición clásica). Una función es diferenciable si es diferenciable en todo punto de la superficie.*

Proposición 8 *Sea $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $p \in S$ y $w \in T_p S$. Sean α y β dos curvas sobre la superficie tales que $\alpha'(0) = w = \beta'(0)$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}(g \circ \alpha)(0) = \frac{d}{dt}(g \circ \beta)(0)$$

Este resultado justifica la siguiente definición.

Definición 9 Sea $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $p \in S$ y $w \in T_p S$. Definimos el diferencial de g en el punto p como la aplicación $dg_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$dg_p(w) = \frac{d}{dt}(g \circ \alpha)(0)$$

donde α es cualquier curva sobre la superficie tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$.

Estaremos interesados en relacionar funciones escalares sobre \mathbb{R}^3 y su restricción a la superficie.

Ejemplo 10 En particular nuestra función de interés en \mathbb{R}^3 será el potencial gravitatorio (suponiéndolo como una fuerza constante vertical hacia abajo), es decir, $H(x, y, z) = gmz$ (g es la gravedad y m la masa). La escritura de la restricción de H sobre la esfera S^2 no tiene ninguna diferencia con la de H pero componiéndola con la parametrización del ejemplo 6 obtenemos una expresión muy útil:

$$h(\vec{X}(\varphi, \theta)) = gm \cos \theta.$$

Estaremos interesados en relacionar el gradiente de la función recién descrita con el gradiente de su restricción que definiremos abajo. Por ahora probaremos un resultado que podríamos considerar técnico, que permitirá establecer la relación sin dificultades.

Proposición 11 Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y S una superficie regular. La restricción de la función F sobre la superficie S denotada por $F|_S$ es diferenciable. Además $(DF_p)|_{T_p S} = d(F|_S)_p$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{D} & DF_p \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ F|_S & \xrightarrow{d} & d(F|_S)_p = (DF_p)|_{T_p S} \end{array}$$

(que un diagrama conmuta significa que partiendo de un extremo -el superior izquierdo en este caso- podemos hacer los recorridos: $\rightarrow \downarrow$ ó $\downarrow \rightarrow$ y llegaremos al mismo punto final).

Demostración. Para cada $p \in S$ existe $X(u, v)$ una parametrización de un entorno de p por ser S superficie regular. Como la composición de funciones diferenciables es diferenciable, $F \circ \vec{X}$ es diferenciable y como $F|_S \circ \vec{X} = F \circ \vec{X}$, la función $F|_S$ es diferenciable. Sea $w \in T_p S$, queremos demostrar

que $(dF \lfloor_S)_p(w) = (DF_p)(w)$. Sea $w = \alpha'(t)$ con $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, como $F \lfloor_S \circ \vec{X} = F \circ \vec{X}$ tenemos que

$$(F \lfloor_S \circ \alpha)(t) = F \lfloor_S (X(u(t), v(t))) = F(X(u(t), v(t))) = F(\alpha(t))$$

con lo cual

$$d(F \lfloor_S)_p(w) = \frac{d}{dt}(F \lfloor_S \circ \alpha)(0) = \quad (3)$$

$$= \frac{d}{dt}F(\alpha(t))_{t=0} = DF_p\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)_{t=0}\right) = DF_p(w) \quad (4)$$

■

Definición 12 Sean $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in S$. Definimos $\text{grad } f(p)$ como el único vector de T_pS que verifica que $\forall w \in T_pS$

$$\langle \text{grad } f(p), w \rangle_p = df_p(w). \quad (5)$$

La existencia y unicidad de un vector con estas propiedades surge del hecho de que $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es un producto interno sobre cada plano tangente.

Proposición 13 Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Consideremos su restricción $f := F \lfloor_S$ y su gradiente $\text{grad } f$. Entonces $\text{grad } f$ es igual a la proyección ortogonal de ∇F , al plano tangente (donde ∇ representa el gradiente ordinario de \mathbb{R}^3). O sea, si consideramos la descomposición

$$\nabla F = \nabla F_N + \nabla F_T$$

donde $\nabla F_T \in T_pS$ y ∇F_N es ortogonal a T_pS , entonces

$$\text{grad } f = \nabla F_T$$

Demostración. Para todo $v \in \mathbb{R}^3$ sabemos del cálculo en \mathbb{R}^n que

$$\langle \nabla F, v \rangle = DF(v)$$

en particular, para todo $w \in T_pS$, por el teorema 11

$$\langle \nabla F, w \rangle = DF(w) = df(w)$$

así

$$df(w) = \langle \nabla F, w \rangle = \langle \nabla F_N + \nabla F_T, w \rangle = \langle \nabla F_N, w \rangle + \langle \nabla F_T, w \rangle = 0 + \langle \nabla F_T, w \rangle$$

por lo tanto ∇F_T está exactamente en las condiciones de la definición del gradiente, o sea, ∇F_T es un vector en $T_p S$ tal que $\forall w \in T_p S$

$$\langle \nabla F_T, w \rangle = df(w)$$

■

Esta demostración puede hacerse directamente expresando todo en coordenadas, sin embargo preferimos esta forma pues pone de manifiesto el poder de la manipulación de los conceptos geométricos.

Intuitivamente el grad g verifica, igual que su análogo en \mathbb{R}^3 , ser el vector que apunta hacia donde la función crece con más intensidad.

Ejemplo 14 *El gradiente (clásico) del potencial gravitatorio $H(x, y, z) = gmz$ es $(0, 0, gm)$ para todo punto de \mathbb{R}^3 . Si consideramos el potencial gravitatorio restringido a la esfera S^2 , para calcular su gradiente, por todo lo expuesto, simplemente proyectamos $(0, 0, gm)$ sobre cada plano tangente de la superficie. En la figura se representa eso pero con los **opuestos** de ambos campos. Notar que tanto en \mathbb{R}^3 , como en S , el **opuesto** del gradiente apunta hacia donde la gravedad empuja.*

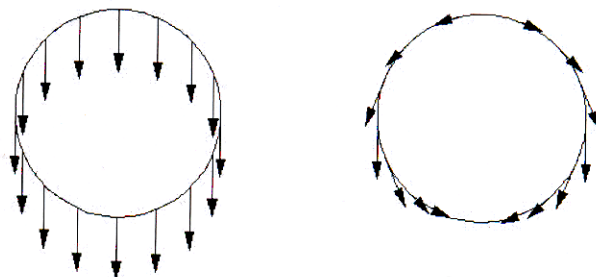


Figura 1: Campo original y campo proyectado

En general, para cualquier función g diferenciable sobre S podemos expresar a grad g en las coordenadas de la base del plano tangente a la superficie, es decir grad $g = aX_u + bX_v$. En la sección 6 encontraremos las expresiones de a y b .

3.3. Campos

Definición 15 *Un campo vectorial en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una aplicación que asigna a cada $q \in U$ un vector $W(q) \in \mathbb{R}^n$. Diremos que W es diferenciable si es diferenciable en cada una de sus coordenadas.*

Ahora transportemos este mismo concepto a las superficies.

3.3.1. Campos sobre una superficie

Definición 16 *Un campo vectorial w en un conjunto $U \subset S$ de una superficie regular S es una correspondencia que asigna a cada punto $p \in U$ un vector $w(p) \in T_p S$.*

El campo vectorial w es diferenciable en $p \in U$ si para alguna parametrización de S en p , $\vec{X}(u, v)$, podemos escribir el campo como $w(p) = a(u, v)\vec{X}_u + b(u, v)\vec{X}_v$, con $a(u, v)$ y $b(u, v)$ funciones diferenciables.

El campo sobre la superficie que nos interesará será el que surge de considerar todos los vectores gradiente de una función diferenciable sobre la superficie.

3.4. Símbolos de Christoffel y Derivada Covariante

Consideramos en cada p la base de \mathbb{R}^3 dada por $\{\vec{X}_u, \vec{X}_v, \vec{N}\}$, donde N es el vector unitario normal al $T_p(S)$. Entonces podemos expresar las derivadas de los vectores \vec{X}_u y \vec{X}_v con respecto a dicha base, de esta manera obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\vec{X}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{X}_v + e \vec{N} \\ \vec{X}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{X}_v + f \vec{N} \\ \vec{X}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{21}^2 \vec{X}_v + f \vec{N} \\ \vec{X}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \vec{X}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{X}_v + g \vec{N}\end{aligned}\tag{6}$$

Los coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ se denominan símbolos de Christoffel de S en la parametrización $\vec{X}(u, v)$. Como $\vec{X}_{uv} = \vec{X}_{vu}$ tenemos $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ y $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Para obtener los valores de los símbolos se realiza el producto interno de cada una de las expresiones con \vec{X}_u y \vec{X}_v . Y así se obtienen tres sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases},$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Como el determinante de los sistemas es $EG - F^2 \neq 0$ tenemos que los tres sistemas tienen solución y de esta manera podemos encontrar los símbolos de Christoffel para cada superficie.

Observación 17 *Los símbolos de Christoffel solo dependen de la primera forma fundamental y de sus derivadas.*

3.4.1. Derivada covariante

Definición 18 *Sea w un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in S$. Sea $y \in T_p S$ y consideramos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ una curva parametrizada tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = y$. Sea $w(t)$ la restricción del campo vectorial w a la curva α (i.e. $w \circ \alpha$). Definimos la derivada covariante de w en dirección de y en el punto p como la proyección ortogonal en el $T_p S$ de $\frac{d}{dt}(w \circ \alpha)(0)$ y la notamos $D_y w$ o también $\frac{Dw}{dt}(0)$.*

Es posible demostrar que en realidad la derivada covariante depende apenas de y y no de la curva α tal que $\alpha'(0) = y$.

Hallemos una expresión para la derivada covariante para un campo vectorial en coordenadas. Consideremos $\vec{X}(u, v)$ una parametrización de S en p , $\alpha(t) = \vec{X}(u(t), v(t))$ con $\alpha(0) = p$. Podemos escribir el campo restringido a la curva como

$$w(t) = a(t) \cdot \vec{X}_u(u(t), v(t)) + b(t) \cdot \vec{X}_v(u(t), v(t))$$

entonces

$$\frac{dw}{dt} = a'(t) \vec{X}_u + a(t) (\vec{X}_{uu} \cdot u' + \vec{X}_{uv} \cdot v') + b'(t) \vec{X}_v + b(t) (\vec{X}_{vu} \cdot u' + \vec{X}_{vv} \cdot v')$$

Utilizando (6) y asociando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & (a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1) \vec{X}_u + \\ & +(b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2) \vec{X}_v + \\ & +(au'e + av'f + bu'g + bv'f) \vec{N} \end{aligned}$$

Como la derivada covariante es la proyección ortogonal $\frac{dw}{dt}$ sobre el $T_p S$ entonces eliminamos el término con \vec{N} y así obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= (a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1)\overrightarrow{X}_u \\ &\quad + (b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2)\overrightarrow{X}_v \end{aligned} \quad (8)$$

Observación 19 En el caso del plano resulta que $\Gamma_{ij}^k = 0 \forall i, j, k$, y por lo tanto $\frac{Dw}{dt} = a' \overrightarrow{X}_u + b' \overrightarrow{X}_v$, que coincide con la derivada de campo usual.

Definición 20 Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada en S , un campo diferencial w a lo largo de α es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un vector $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$ y definimos la derivada covariante del campo w por(8).

Intuitivamente es difícil de interpretar la derivada covariante de un campo o de un campo a lo largo de una curva. Sin embargo la derivada covariante a lo largo de la curva α , en la dirección de α' , del campo generado por la propia derivada de la curva, puede interpretarse como la *aceleración* de la curva vista desde la superficie. De hecho, $\frac{D\alpha'}{dt}$ es la proyección sobre el plano tangente de α'' . Por lo tanto, si $\alpha(t)$ es una curva sobre S , podemos imaginarla como la trayectoria de una partícula que se mueve sobre la superficie. Entonces $\alpha'(t)$ es la velocidad, $\alpha''(t)$ la aceleración que sufre la partícula, y la derivada covariante $\frac{D\alpha'}{dt}$ es la componente tangencial de la aceleración $\alpha''(t)$. Y así podemos pensar que $\frac{D\alpha'}{dt}$ es la aceleración que sufre la partícula para un observador que *vive* dentro de la superficie.

En coordenadas: como $\alpha' = u'X_u + v'X_v$ tomamos en la ecuación (8) $a = u'$ y $b = v'$. Entonces el sistema anterior queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{D\alpha'}{dt} &= (u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2 u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1)X_u + \\ &\quad + (v'' + (v')^2 \Gamma_{11}^2 + 2 u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2)X_v \end{aligned} \quad (9)$$

4. Mecánica clásica.

Planteamos ahora algunas definiciones y resultados en \mathbb{R}^3 sobre cuestiones de mecánica clásica. Luego definiremos y trabajaremos con los conceptos análogos reproducibles en superficies. Además de la evidente analogía tendremos entre los conceptos en \mathbb{R}^3 y la superficie una relación más. Los segundos podrán surgir como restricciones de los primeros. Por ejemplo, como S está incluido \mathbb{R}^3 , un campo de fuerzas de \mathbb{R}^3 lo podremos restringir a S y proyectarlo sobre los planos tangentes obteniendo así un campo de fuerzas sobre la superficie.

Definición 21 Llamaremos **sistema de segundo orden** a la ecuación diferencial de la forma

$$x'' = W(x) \quad (10)$$

con $x \in \mathbb{R}^3$ y $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. W será llamado **campo de fuerzas** del sistema. La ecuación puede ser pensada como la condición que debe respetar una trayectoria para ser considerada solución del sistema. Si una curva $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ verifica

$$x''(t) = W(x(t)) \quad (11)$$

entonces es una **solución** (o trayectoria) del sistema. Llamaremos a (10) o a (11) **ecuación** del sistema.

Notemos como la ecuación (11) se interpreta como la segunda ley de Newton $ma = F$, tomando $m = 1$.

Definición 22 Un sistema se dice **conservativo** si su campo es el opuesto del gradiente de una función, es decir, si existe una función $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $W = -\nabla H$. La función H será llamada **potencial** del sistema. Entonces la ecuación del movimiento de un sistema conservativo queda determinado por la siguiente expresión

$$x'' = -\nabla H, \quad (12)$$

es decir

$$x''_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(t), \forall i = 1, \dots, n \quad (13)$$

Definición 23 Dado un sistema conservativo, a la función $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (que verifica $W = -\nabla H$) la llamaremos **energía potencial** del sistema. Si $x(t)$ es un camino (solución o no) llamaremos a $V(t) := \frac{1}{2} \langle x'(t), x'(t) \rangle$ **energía cinética** del camino $x(t)$ y

$$E(t) := H(x(t)) + V(t)$$

será llamada **energía total**.

Notemos como en este contexto la energía depende de la curva que estemos analizando.

Teorema 24 (de la conservación de energía en \mathbb{R}^3) La energía total de un sistema conservativo es conservada, es decir, si $x(t)$ es solución del sistema, entonces $\frac{dE}{dt} = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d(H + V)}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle x', x' \rangle \right) + \frac{dH}{dt} \\ &= \frac{1}{2} 2 \langle x'', x' \rangle + \langle \nabla H, x' \rangle \\ &= \langle x'' + \nabla H, x' \rangle = 0 \end{aligned}$$

pues por la ecuación del movimiento es $x'' = -\nabla H$. ■

5. Analogía sobre una superficie.

Todo lo recién expuesto puede definirse y demostrarse sobre una superficie como lo haremos a lo largo del resto del trabajo, motivando todo a partir de un ejemplo concreto. Por simplicidad tomaremos la masa de la partícula, a estudiar, unitaria.

Queremos estudiar trayectorias de cualquier partícula sobre S^2 , bajo los efectos del campo gravitatorio. Para ello utilizemos las ecuaciones del movimiento de un sistema conservativo, enunciadas anteriormente pero en un contexto de superficies.

Definición 25 Llamaremos *sistemas (de segundo orden)* a la ecuación

$$\frac{D\alpha'}{dt} = w(\alpha(t)) \tag{14}$$

donde α es una curva sobre la superficie y w es un campo sobre la superficie. w será llamado **campo de fuerzas** del sistema. Toda α que verifique (14) será llamada **solución del sistema**. Llamaremos a (14) **ecuación del sistema**.

Nuevamente notemos que la ecuación (14) puede ser interpretada como la clásica $ma = F$ (con $m = 1$) pero no en el simple \mathbb{R}^3 sino en una superficie. Más aún, si $w \equiv 0$, entonces obtenemos la ecuación de las curvas conocidas como *geodésicas*. Así las geodésicas deben ser interpretadas como las trayectorias de una partícula libre de fuerzas confinada a la superficie.

Definición 26 Un sistema será **conservativo** si el campo es el opuesto al gradiente de una función, es decir, si existe una función h tal que $w = -\text{grad } h$ así la ecuación del sistema será

$$\frac{D\alpha'}{dt} = -\text{grad } h \tag{15}$$

En nuestro ejemplo h será el potencial gravitatorio **sobre** la esfera, que es la restricción del potencial gravitatorio de \mathbb{R}^3 .

6. Ecuaciones en coordenadas.

Notemos que para la ecuación (12) tenemos (13), su forma en coordenadas. Nos dedicaremos ahora a encontrar las ecuaciones en coordenadas de (14).

Dada una parametrización $\vec{X}(u, v)$ calculemos la expresión del grad h , en un punto de la superficie, respecto a la base del T_pS .

Sea a y b tales que $\text{grad } h(p) = a\vec{X}_u + b\vec{X}_v$. Como $\text{grad } h(p)$ verifica $\langle \text{grad } h(p), z \rangle_p = dh_p(z), \forall z \in T_pS$, en particular, consideramos los siguientes casos $z = \vec{X}_u$ y $z = \vec{X}_v$, así obtenemos

$$\begin{aligned} \langle a\vec{X}_u + b\vec{X}_v, \vec{X}_u \rangle &= h_u(p) \\ \langle a\vec{X}_u + b\vec{X}_v, \vec{X}_v \rangle &= h_v(p) \end{aligned}$$

donde abusamos de la notación usando

$$h_u = \frac{d}{du}h(\vec{X}(u, v)) \quad h_v = \frac{d}{dv}h(\vec{X}(u, v))$$

Resolviendo el producto interno tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} aE + bF = h_u \\ aF + bG = h_v \end{cases}$$

El cual tiene solución pues $EG - F^2 \neq 0$, así obtenemos los valores de a y b . Y por lo tanto

$$\text{grad } h(p) = \frac{h_u \cdot G - h_v \cdot F}{EG - F^2} \vec{X}_u + \frac{h_v \cdot E - h_u \cdot F}{EG - F^2} \vec{X}_v \quad (16)$$

Notemos que $\frac{D\alpha'}{dt}$ y $-\text{grad } h$ son dos vectores tangentes a la superficie. Las escrituras de ellos en la base $\left\{ \vec{X}_u, \vec{X}_v \right\}_p$ son únicas. Por lo tanto, la ecuación (14) se traduce en las ecuaciones de igualdad de sus coordenada. Considerando $\alpha' = u'X_u + v'X_v$, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} u'' = \frac{h_u \cdot G - h_v \cdot F}{EG - F^2} - ((u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2 u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1) \\ v'' = \frac{h_v \cdot E - h_u \cdot F}{EG - F^2} - ((u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2 u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2) \end{cases} \quad (17)$$

que sigue de (8) y de (15), despejando u'' y v'' .

Observemos que estas expresiones son genéricas, es decir sirven para cualquier superficie S , parametrización X , y función h . Lo cual nos permitiría hacer un estudio del movimiento de una partícula sobre cualquier superficie bajo los efectos de cualquier campo en cualquier sistema de coordenadas.

6.0.2. Las ecuaciones para el caso de la copa

Para el estudio de nuestro caso motivacional el campo tangente sobre la copa será el que ejerce la gravedad. Intuitivamente es claro (e incluso desde un punto de vista físico es posible de demostrar) que este debe ser la proyección tangente del campo gravitatorio ordinario de \mathbb{R}^3 . Como estamos tomando la masa de la partícula $m = 1$, este campo es $W = (0, 0, -g)$. Recordemos que $W = -\nabla H$ donde $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, esta definida por $H(x, y, z) = gz$. Este es el campo sobre todo \mathbb{R}^3 , como ya mencionamos, lo restringimos sobre la superficie de la esfera. Por la proposición (13) esta proyección coincide con $-\text{grad}(h)$ donde h es la restricción de H sobre la esfera.

Ahora veamos como queda el sistema (17) para la esfera, considerando que fue parametrizada por las coordenadas esféricas como en el ejemplo 6. Ya vimos que $F = 0, G = 1$ y $E = \sin^2 \theta$. Calculamos los símbolos de Christoffel asociados a esta parametrización resolviendo las ecuaciones (7); así obtenemos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}$$

Por otro lado, una vez dada la parametrización determinamos fácilmente la expresión de $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ que viene dada por $h(\vec{X}(\varphi, \theta)) = g \cos \theta$. Así, las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}h_{\varphi} &= 0 \\ h_{\theta} &= -g \sin \theta.\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema definido en (17) queda determinado por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \varphi'' = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \theta' \varphi' \\ \theta'' = g \sin \theta + \sin \theta \cos \theta (\varphi')^2 \end{cases} \quad (18)$$

De esta manera obtuvimos un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que determina las ecuaciones del movimiento sobre la esfera al someter una partícula al campo gravitatorio.

Antes de estudiar algunas de las soluciones de este sistema, analicemos el caso en que no hubiese gravedad.

Si no hubiese gravedad afectando a la esfera, ni ningún otro campo, lo que tenemos es $W \equiv 0$ y por lo tanto $h \equiv 0$. Así es que la derivada covariante queda igualada a cero, es decir $D\alpha'/dt = 0$, cuya forma en coordenadas (18) resulta ser

$$\begin{cases} \varphi'' = -2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\theta'\varphi' \\ \theta'' = \sin\theta\cos\theta(\varphi')^2 \end{cases} \quad (19)$$

Las soluciones de este sistema son los círculos de radio máximo (*rectas* de la esfera o geodésicas de la esfera) recorridos uniformemente (i.e. con rapidez constante). Vale la observación que esto no resulta evidente de las ecuaciones planteadas, apenas se nota la solución $\varphi(t) = \varphi_0$ y $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, que corresponde a los meridianos recorridos uniformemente.

Si hacemos un paralelismo con el plano, una partícula que se mueve sin ninguna aceleración que actúe sobre ella, describe un MRU (movimiento rectilíneo uniforme). Ahora bien, si hay algún tipo de aceleración que afecta a la partícula entonces ésta realiza una trayectoria que no es MRU; sería lógico que ocurra algo similar en la esfera, o sea, que al considerar una aceleración **no** nula obtengamos trayectorias que **no** son círculos máximos recorridos uniformemente. Veamos que esto es así estudiando dos soluciones particulares de (17).

1. Supongamos el caso en que $\varphi = ctte$, entonces se verifica trivialmente que

$$\varphi'' = -2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\theta'\varphi'$$

pues $\varphi' = \varphi'' = 0$ y la otra igualdad queda de la siguiente manera

$$\theta'' = g\sin\theta,$$

que nos proporciona una ecuación idéntica a la del péndulo plano. Su solución, aunque está contenida en un círculo máximo, no lo recorre uniformemente

2. Ahora consideremos que $\theta = ctte$ entonces tenemos que

$$\begin{cases} \varphi'' = 0 \\ 0 = \sin\theta(g + \cos\theta(\varphi')^2) \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi' = \omega \\ \varphi' = \pm\sqrt{-g\cos\theta} \end{cases}$$

entonces tenemos que $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$, donde ω es la velocidad angular y existe para $\cos\theta \leq 0$, o sea para $\theta \geq \pi/2$ y éstas son solución del tipo *ruleta*, es decir, la partícula se desplaza horizontalmente -sin caer- como la hace aproximadamente una bola de ruleta al ser arrojada apropiadamente por el grupier. Es destacable notar que las imágenes de estas trayectorias son los paralelos de la esfera por debajo del ecuador y nunca por arriba.

Otras soluciones pueden ser apreciadas en las figuras.

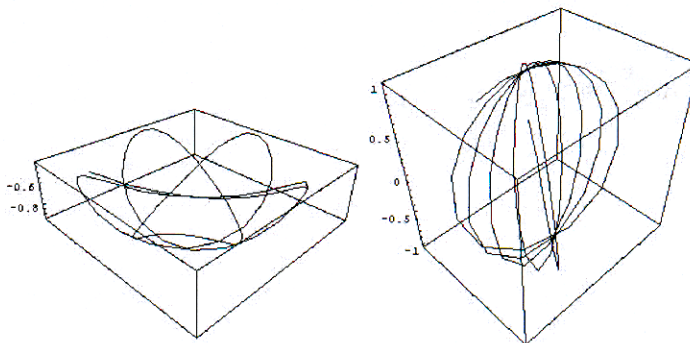


Figura 2: soluciones con diversas formas

Notemos que las ecuaciones fueron planteadas sin necesitar de conservación de energía o de momento angular, lo que posibilita un rápido acercamiento para los alumnos de matemática que muchas veces no han adquirido habilidades en esos temas. Para un tratamiento desde un punto de vista no-geométrico puede consultarse [4] (III. § 18) donde desarrolla el problema del péndulo esférico, que es totalmente equivalente.

7. Campos conservativos sobre una superficie.

El teorema de la conservación de la energía vale también para superficies. Así, al estudiar la ecuación

$$\frac{D\alpha'}{dt} = -\text{grad}h$$

podemos definir las energías análogamente.

Definición 27 A la función $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ la llamaremos *energía potencial* del sistema. Llamaremos a $V_S(t) := \frac{1}{2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}$ *energía cinética* de un camino $\alpha(t)$ y notaremos por

$$E(t) := h(\alpha(t)) + V_S(t)$$

a la *energía total* del camino.

Teorema 28 (de la conservación de energía en las superficies) La energía total de un sistema conservativo es conservada, es decir $\frac{dE}{dt} = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d(h + V_s)}{dt} = \frac{dV_S}{dt} + \frac{dh}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} \right) + \frac{dh(\alpha(t))}{dt} \\
&= \frac{1}{2} 2 \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} + \frac{dh}{dt}(\alpha'(t)) \\
&= \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} + \langle \text{grad}h(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} \\
&= \langle \alpha''(t) + \text{grad}h(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}
\end{aligned}$$

descomponemos $\alpha''(t)$ en el espacio tangente y en el normal

$$\alpha''(t) = \alpha''(t)_N + \frac{D\alpha'}{dt}$$

y así

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha''(t) + \text{grad}h(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} = \\
&= \left\langle \alpha''(t)_N + \frac{D\alpha'}{dt} + \text{grad}h(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle_{\alpha(t)} \\
&= \langle \alpha''(t)_N, \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} + \left\langle \frac{D\alpha'}{dt} + \text{grad}h(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle_{\alpha(t)} \\
&= 0 + \left\langle \frac{D\alpha'}{dt} + \text{grad}h(\alpha(t)), \alpha'(t) \right\rangle_{\alpha(t)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues por hipótesis $\frac{D\alpha'}{dt} + \text{grad}h(\alpha(t)) = 0$. ■

Complementariamente notemos que la proposición 13 nos asegura que la restricción de un campo de \mathbb{R}^3 conservativo es un campo conservativo en S .

Aplicado a nuestro caso de la partícula confinada a la esfera este resultado permite sacar diversos tipos de conclusiones, como por ejemplo, que cuando la partícula pasa por la parte inferior de la esfera, se desplaza con la mayor rapidez (tal cual la intuición nos indica), pues al ser h mínimo, V debe ser máximo.

Notemos que al trabajar con la formulación geométrica la generalización a variedades Rimanianas es inmediata.

8. Problemas planteados

Dejamos como ejemplo didáctico los siguiente problemas. En coordenadas cilíndricas son de fácil tratamiento.

Problema 29 ¿Es posible arrojar una bola dentro de un cono recto erguido de tal forma que se mantenga siempre a la misma altura? ¿Y si desciende, es posible que luego suba?

Problema 30 El mago Magneto nos consulta sobre el siguiente truco: sobre una mesa lisa hacer girar en forma circular una bolita apenas dándole un empujón inicial. La idea del mago es usar una bolita de metal y un imán **inmóvil** en el piso. ¿Qué tan posible es hacer el truco?

Referencias

- [1] Do Carmo, Manfredo – *Geometría diferencial de curvas y superficies*.
- [2] Santalo, Luis – *Vectores y Tensores con sus aplicaciones*.
- [3] Arnold, V. I. – *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlang 1989.
- [4] Somerfield, A. – *Mechanics, Lectures on Theoretical Physics*. Academic Press 1969.

Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad Nacional de Mar del Plata.