DIAGNÓSTICO Y EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: EL CASO DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES[1]

JESÚS GALLARDO ROMERO, gamu@arrakis.es, Universidad de Málaga
JOSÉ LUIS GONZÁLEZ MARÍ, gmari@uma.es, Universidad de Málaga

RESUMEN: La comprensión es objeto de interés creciente en Educación Matemática, si bien los avances producidos hasta el momento no se corresponden con los esfuerzos dedicados a su estudio. La elevada complejidad de este fenómeno pone al descubierto la insuficiencia y las limitaciones de las aproximaciones más recientes y reclama la necesidad de adoptar en el futuro enfoques más operativos y menos preocupados por su naturaleza y funcionamiento interno. En tal sentido se presentan aquí las líneas generales de una aproximación centrada en los efectos observables, que utiliza el análisis de comportamientos y respuestas adaptadas a situaciones expresamente planificadas y que trata de integrar los distintos puntos de vista existentes. Los planteamientos teóricos se ilustran, para terminar, con una breve descripción del estudio realizado sobre el algoritmo estándar escrito de la multiplicación de números naturales.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha venido incrementando el interés por desarrollar una enseñanza de la matemática que favorezca la comprensión. Algunos autores (Hiebert et al., 1997) asumen, incluso, que la comprensión debería ser el objetivo fundamental de la educación matemática, lo que ha dado lugar a programas de enseñanza experimentales (Carpenter, Fennema et al., 1999) y proyectos curriculares orientados a garantizar un aprendizaje comprensivo (Goñi, 2000).

La preocupación por la comprensión alcanza también a la investigación en Didáctica de la Matemática, influyendo en su contenido y desarrollo (Hiebert y Carpenter, 1992) así como en el interés y orientación de algunos autores (Duval, 2000). Sin embargo, esta preocupación aún no ha dado sus frutos ni su importancia ha sido suficientemente valorada, a pesar de la opinión cada vez más extendida de que no se producirán avances significativos en Educación Matemática mientras que no se disponga de unos conocimientos básicos sobre este tema. La explicación puede estar en que los fenómenos en torno a la comprensión son de tal complejidad y las dificultades y limitaciones para su estudio son tan numerosas (Díaz, 2000) que

---

[1] **Gallardo, J. y González, J. L. (2007).** Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.) *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 157-184). Granada: Editorial Universidad de Granada. [ISBN: 8433845429]

no es previsible que dichos avances se den en un breve plazo de tiempo, en particular si se mantiene el empeño en dilucidar directamente aspectos tan complejos como son la naturaleza y el funcionamiento de la comprensión.

A pesar de las dificultades, venimos trabajando sobre una aproximación[2] indirecta, menos teórica que las existentes, integradora, basada en la observación cuidadosa de comportamientos relevantes ante situaciones especialmente preparadas y que busca la operatividad entendida como capacidad para proporcionar categorías, tareas, medios e instrumentos válidos y fiables para la observación y el diagnóstico. De dicha aproximación se exponen en el presente documento, por este orden, las principales ideas previas de las que partimos, los supuestos teóricos que fundamentan el trabajo y unas breves indicaciones sobre la situación del estudio que venimos realizando en esta línea en torno a la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

PRINCIPALES TENDENCIAS

La noción de comprensión adopta distintos significados según el contexto en el que es utilizada. Así, se puede entender como un elemento básico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como un método de investigación para las Ciencias Sociales (Abel, 1964; Habermas, 1981) o como un objeto de estudio para la Didáctica de la Matemática.

Sierpinska (1990) analiza la comprensión reclamando la necesidad de una conceptualización clara y precisa. En concreto, propone considerarla *"como un acto, pero un acto involucrado en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación una dialéctica en desarrollo entre conjeturas cada vez más elaboradas y validaciones de estas conjeturas"* (p. 26).

Por su parte, Davis (1992) presenta una teoría acerca de cómo se produce el fenómeno de la comprensión utilizando la conocida metáfora del puzzle. El autor considera que las ideas son como piezas de un puzzle, que llegan a ser útiles y cobran sentido sólo si encajan en un conjunto de piezas previamente combinadas entre sí para formar una imagen coherente.

En Hiebert y Carpenter (1992) encontramos otro modelo, ampliamente aceptado y calificado por algunos autores como *concepción fundamental*, que considera la comprensión como resultado de establecer conexiones entre representaciones. Se trata de una aproximación que aparece más completa en algunos estudios desarrollados en el seno del Grupo de la SEIEM "Pensamiento Numérico" (Romero, 2000) y que presenta cierta similitud en lo fundamental con la noción de comprensión asociada a las prácticas personales y a los significados del conocimiento matemático (Díaz, 2000).

Otros autores destacan también la faceta cognitiva de la comprensión (Resnick y Ford, 1990; Skemp, 1993; Gusev y Safuanov, 2000). Por su parte, Koyama (1993) propone una aproximación que pretende clarificar los procesos de comprensión en situaciones de enseñanza y aprendizaje mediante un modelo de dos ejes en el que se relacionan niveles de comprensión y etapas de aprendizaje (Koyama, 1997, 2000).

---

[2] Proyecto PB97-1066 "Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático" subvencionado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología durante el trienio 1998-2001.

Pirie y Kieren (1989), en cambio, distinguen ocho niveles potenciales para caracterizar la evolución de la comprensión de cualquier tópico matemático y describen una técnica denominada "mapping" para registrar dicha evolución (Pirie y Kieren, 1994).

A diferencia de los planteamientos anteriores, preocupados básicamente por el origen, la naturaleza, el funcionamiento o la evolución de la comprensión, hay enfoques, como el que se presenta en este documento, que prefieren dar un rodeo a tan importantes y complejas cuestiones para centrar su atención en los efectos observables, en las manifestaciones externas y en su interpretación. Tal es el caso de Duffin y Simpson (1997), cuyas ideas compartimos cuando afirman: *"a menos que la comprensión se manifieste no tenemos ningún modo de inferir algo sobre el nivel de comprensión que tiene el sujeto; incluso, cuando este sujeto está haciendo algo (como dar una explicación o resolver un problema) no podemos ver que la comprensión se está manifestando, únicamente interpretamos nuestras observaciones como el uso de esa comprensión..."* (p. 169). A pesar de todo, la interpretación de los comportamientos observables no está exenta de problemas[3], siendo necesario, tal y como señala Pirie (1988), tomar precauciones debido al carácter primitivo de las herramientas disponibles.

NUESTRA POSICIÓN: UNA APROXIMACIÓN OPERATIVA A LA COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

¿Es posible una teoría de la comprensión del conocimiento matemático? Una justificación para el término "aproximación"

De una primera reflexión sobre los trabajos mencionados nos surge la siguiente cuestión epistemológica: ¿admite solución el problema de la comprensión del conocimiento? En términos similares, ¿es posible elaborar una teoría coherente y plausible que explique y regule todos los aspectos vinculados a la comprensión? Hoy por hoy, parece ser que no existe tal teoría, pero, ¿llegará a elaborarse en un futuro?; es decir, ¿todos los esfuerzos realizados hasta el momento, sin duda valiosos, obtendrán una recompensa futura en forma de explicación completa del fenómeno de la comprensión?

La situación en el campo de la Educación Matemática no es diferente a la de otras áreas, es decir, no existe una posición consolidada, aceptada por la mayoría de investigadores sobre el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, lo que explica que se encuentren pocas argumentaciones sólidas sobre la idoneidad de los distintos enfoques existentes. Por otra parte, hay desacuerdo en cuanto al sentido de la respuesta a la pregunta formulada en el encabezado. De un lado, debido a la cantidad de estudios desarrollados sobre el fenómeno de la comprensión, podríamos concluir que en un futuro no muy lejano se llegará a elaborar una teoría de la comprensión ajustada a la realidad. De otro lado, son diversas las posiciones que surgen desde la historia y epistemología de la ciencia en contra de tal posibilidad, como es el caso de Feyerabend (1991), cuando afirma:

---

[3] Ainley y Lowe (1999) han puesto en evidencia las carencias e ineficacia de los SATs (Standards of Assessment and Testing) como instrumentos de diagnóstico, al comprobar que sujetos a los que dicho estudio les asignaba el mismo nivel presentaban en realidad diferencias entre ellos.

"[...] no puede existir ninguna teoría de la razón, del conocimiento ni de entidades similares y ¿por qué? Porque la razón está formada por acciones imposibles de prever, a menos que se encuentren limitadas por medidas totalitarias" (p. 120).

Sea como fuere, lo cierto es que la filosofía de la ciencia nos muestra a través de autores como Kuhn, Lakatos o el propio Feyerabend, que las teorías científicas no son absolutas ni definitivas. En ellas suelen producirse sucesivas y, a veces, profundas modificaciones y reestructuraciones causadas por los continuos debates a los que son sometidas y que, a la postre, las hacen evolucionar. Esta circunstancia, trasladada al ámbito de la comprensión, nos hace pensar que quizás nunca se llegue a desarrollar una teoría que resuelva de modo concluyente el problema de conocer el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático y, por tanto, el de orientar adecuadamente en tal sentido y de forma fundamentada, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Si ello fuera así, a lo más que podría aspirar un investigador es a proporcionar aproximaciones teóricas que admitan alguna contrastación empírica; lo cual, por otra parte, es lo que ha venido sucediendo hasta ahora. Esta es la razón fundamental por la que nuestro trabajo debe ser entendido como una aproximación más; como tal, presentará deficiencias y limitaciones que deberán ser superadas mediante sucesivas reelaboraciones cada vez más cuidadas y completas en un proceso continuo cuyo final no nos aventuramos a pronosticar.

Marco general

La aproximación que se presenta parte de las ideas constructivistas de Piaget sobre la génesis del conocimiento así como de los principios que caracterizan el denominado constructivismo radical (Von Glasersfeld, 1987; Ernest, 1994), es decir:

(1) El sujeto no recibe el conocimiento de un modo pasivo sino que participa activamente en su construcción. El conocimiento es visto como producto de la organización conceptual del sujeto y no como algo que puede ser transferido;

(2) La función de la cognición no es la de describir una realidad ontológica externa al sujeto. Más bien, consiste en construir estructuras cognitivas o conceptuales con las que resolver los problemas que surgen de la propia experiencia del sujeto en su constante interacción con el medio.

Pero, el ajuste a estos principios no es total. Antes bien, entendemos que la construcción de conocimientos no sólo es resultado de procesos cognitivos internos y privados que tienen lugar al margen del entorno, sino que también se explica, en parte, por la existencia de una componente sociocultural, un factor "externo" ligado a la faceta convencional y al carácter compartido del conocimiento matemático, que impregna la fenomenología y condiciona las experiencias correspondientes. Por tanto, tampoco aceptamos en su totalidad los principios del constructivismo social tal y como lo entiende Ernest (1994), sino que preferimos situarnos en una perspectiva integradora concediendo importancia a todas las interacciones posibles del sujeto con el medio que le rodea.

Por otra parte, la construcción de conocimientos no es una labor que siempre pueda realizar el individuo por sí mismo, con plena autonomía y sin necesidad de ayuda alguna. Antes bien, se necesita con frecuencia de ciertos apoyos externos como los que proporcionan, por ejemplo, el profesor o los libros de texto en el medio escolar, lo que nos lleva a considerar también en nuestros planteamientos los principios y supuestos de la perspectiva constructivista propuesta por Arcavi (1995).

Consideraciones preliminares sobre el conocimiento matemático

La aproximación adoptada parte de una concepción particular sobre el conocimiento matemático que condiciona y justifica parcialmente el desarrollo teórico presentado. Es por ello que creemos necesario señalar en lo que sigue los supuestos básicos correspondientes de los que se nutre la aproximación que presentamos.

Nuestras ideas en torno al conocimiento matemático se identifican con algunas de las posiciones epistemológicas consolidadas en los últimos tiempos (De Lorenzo, 2000). Sin entrar en detalles, reconocemos la triple faceta de la matemática como actividad -individual y social- de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado (Díaz y Batanero, 1994). Asimismo, compartimos la tesis de Cañón (1993) acerca de la naturaleza de los resultados matemáticos:

> *"Los resultados de la Matemática son producción cultural, en tanto que son resultado del quehacer humano, y en ese mismo sentido, son relativos a un contexto socio-histórico. Pero este tipo de producción cultural es siempre susceptible de ser expresado en un lenguaje regido por leyes independientes de las culturas o contextos donde se generó"* (p. 402)

En la misma línea, consideramos al conocimiento matemático como un conocimiento incompleto, parcialmente construido, perfectible, dinámico, en continua evolución, cuya creación/descubrimiento se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la hacen posible: las características comunes de la mente humana, del medio y de la interacción entre ambos (González, Pascual y Flores, 1994).

Conviene subrayar, sin embargo, que el conocimiento matemático es empleado en la aproximación como una entidad ya establecida, estática y de referencia, sobre la que se pretende estudiar la comprensión que de ella manifiestan los individuos. Esto es, nos interesa contemplar el conocimiento matemático desde la perspectiva del sujeto cognoscente con aspiraciones de comprensión. De hecho, partimos de una situación en la que existe, por un lado, un conocimiento matemático delimitado y definido de antemano, producto de una actividad humana histórica, y por otro, un individuo concreto cuya comprensión sobre ese conocimiento matemático queremos valorar. Tal disposición da lugar a que consideremos la posibilidad de establecer para cada conocimiento matemático -concepto, procedimiento, teorema, propiedad, definición, etc.- dos estructuras fundamentales asociadas que determinan su naturaleza y existencia:

(a) Una Estructura Epistemológica. Parte del análisis sobre la propia naturaleza interna del conocimiento matemático seleccionado. Esta constituida por:

- Una sintaxis: Las diferentes representaciones externas que admite el conocimiento matemático en cuestión.
- Unos conocimientos previos, constitutivos o referentes: necesarios para conformar el conocimiento matemático dado. Todo conocimiento

matemático se sustenta en unos conocimientos previos, matemáticos y no matemáticos.

- Unas relaciones o conexiones: internas, entre los componentes, elementos básicos o conocimientos previos constitutivos del conocimiento matemático particular.

(b) Una Estructura Fenomenológica. Surge de considerar el conocimiento matemático en relación con las distintas situaciones en las que participa, tiene sentido o se hace legítimo su empleo de algún modo como medio que contribuye a la obtención de las posibles soluciones. Las situaciones, por su parte, son entendidas como aquellas tareas problemáticas surgidas de la experiencia a las que continuamente se está enfrentando el sujeto en contextos diversos.

Ambas estructuras determinan de forma única cada conocimiento matemático, permitiendo establecer a su vez diferencias entre ellos. Como bien puede observarse, surgen de una labor de búsqueda y análisis de información sobre el conocimiento matemático y quedan constituidas al margen de cualquier sujeto con pretensiones de comprensión. Asimismo, van a proporcionar el soporte necesario para operativizar la propuesta teórica de acercamiento al fenómeno de la comprensión.

La comprensión y su diagnóstico: algunos supuestos básicos

Dentro del amplio marco descrito, concebimos provisionalmente la comprensión como un mecanismo básico de respuesta relacionado con una capacidad esencial de la mente humana para gestionar su interacción con el medio y regular el propio equilibrio cognitivo. Dicho mecanismo tiene que ver con los procesos de adaptación y, consecuentemente, con los efectos del aprendizaje y las experiencias sobre la cognición y, en nuestro caso particular, sobre la manera de ver e interpretar el conocimiento matemático como parte de la realidad.

Por tratarse de ideas y constructos inobservables, es necesario emplear una estrategia de acercamiento indirecto -estrategia empírica-. Asímismo, por tratarse de un fenómeno cognitivo y educativo complejo, es conveniente contar con un cierto apoyo del análisis didáctico (González, 1998) y, en particular, del análisis de la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático y de sus múltiples relaciones -estrategia teórica-. El medio general que se emplea coincide con el que proponen Duffin y Simpson (1997), es decir, la interpretación de comportamientos provocados ante situaciones problemáticas. La finalidad inmediata del estudio es encontrar respuestas a las siguientes preguntas: ¿Es posible asegurar que un sujeto tiene una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto?; ¿hasta donde comprende un individuo?, ¿de qué tipo y cuál es la calidad de dicha comprensión?; ¿cuándo -en qué condiciones- y cómo se puede averiguar esto con ciertas garantías? y la finalidad a largo plazo es la de clarificar la cognición matemática para orientar adecuadamente los procesos de enseñanza-aprendizaje. No se hacen postulaciones sobre aspectos no observables sino sólo sobre relaciones entre comportamientos concretos, conocimientos concretos y fenómenos que les dan sentido, entendiendo estos fenómenos como medios privilegiados en los que interactúan el sujeto y el objeto de conocimiento.

El método específico, a diferencia de los que proponen los autores mencionados, sigue el siguiente proceso: **a)** *Análisis Didáctico* del conocimiento en cuestión[4]; **b)** delimitación lo más precisa posible de las *estructuras epistemológica y fenomenológica* de dicho conocimiento; **c)** elaboración a partir de ellas de una clasificación para las situaciones vinculadas al conocimiento matemático; **d)** *conversión operativa* de dicha clasificación: análisis sistemático y definición clara y precisa de las acciones interpretables de los sujetos; delimitación, categorización y enumeración de las respuestas posibles y de los *criterios de valoración*; construcción de un modelo centrado en las referencias y categorías que ha de utilizar el observador para interpretar los comportamientos; **e)** construcción de los *instrumentos de observación* -tareas, pruebas, situaciones y protocolos-; **f)** obtención de datos, categorización y valoración de respuestas y conformación de *perfiles de comprensión*; **g)** análisis de resultados en función del problema específico -estudio muestral, comparación, estudio causal, longitudinal, etc.-. Con ello creemos que se conseguirá reducir notablemente los defectos de los instrumentos de observación y aumentar la consistencia de los estudios y la validez y fiabilidad de los resultados.

Profundizando un poco más: Aspectos vinculados a la comprensión

Creemos que una aproximación completa al fenómeno de la comprensión debe tener en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos: naturaleza, origen, funcionamiento, fuentes, evolución, efectos, diagnóstico y evaluación. En este sentido, creemos que otros modelos conocidos son aproximaciones parciales; estudian con cierto detenimiento algún aspecto relevante pero prestan poca atención, o dejan al margen, a otros igualmente importantes. Veamos a continuación las ideas que manejamos sobre dichos aspectos, en el bien entendido que sólo se trata de referencias provisionales para guiar el estudio empírico y no de conjeturas a contrastar directamente.

Origen y fuentes

Situamos el origen de la comprensión en las situaciones de desequilibrio cognitivo en las que se ve implicado el sujeto en su interacción con el medio. Las fuentes se encuentran en las *experiencias* que dichas situaciones generan y que obligan al sujeto a elaborar respuestas[5] adaptadas[6] a cada situación particular. En dicha elaboración intervienen tanto las nuevas informaciones proporcionadas por la propia situación como el bagaje de capacidades y conocimientos previamente adquiridos por el sujeto.

Naturaleza y funcionamiento

La cuestión de cómo se produce la comprensión –funcionamiento- está estrechamente relacionada con el problema de su naturaleza. En principio, creemos que la *concepción fundamental* de la comprensión como conexión entre

---

[4] No exhaustivo, sino orientado a la epistemología y fenomenología en el sentido más amplio.

[5] Responder no se considera sólo en el sentido de hacer algo, sino también en el de adoptar una posición, iniciar o concluir un razonamiento, relacionar, reflexionar, configurar una actitud, etc.

[6] En el mismo sentido que emplea Piaget para el término “adaptación”.

representaciones generadas en procesos mentales aislados es bastante restringida y no refleja adecuadamente el hecho incuestionable de que también intervienen aspectos sociales y culturales (Díaz, 2000) así como la naturaleza del conocimiento matemático. Aún así, la consideramos provisionalmente válida como interpretación teórica que proporciona ideas de carácter general para empezar a trabajar. Por otra parte, coincidimos con Duffin y Simpson (1997) en señalar que la comprensión se puede manifestar en forma de ***acto*** -respuesta puntual que conduce a una modificación cualitativa en la situación cognitiva-, de ***proceso*** -sucesivas experiencias relacionadas con un mismo problema a lo largo de un período de tiempo, proceso de maduración o de elaboración de respuestas provisionales cada vez más adaptadas-[7] o de ***estado*** -conjunto de respuestas potenciales a una situación o fuente de respuestas adaptadas a experiencias o situación cognitiva resultado de actos y procesos de comprensión previos-.

En cuanto al funcionamiento, la comprensión depende de las experiencias y los tipos de respuestas adaptadas[8] en torno al objeto de comprensión. Parece lógico pensar que a mayor cantidad y variedad de experiencias adaptativas, mayores serán las posibilidades de una mejor y más completa comprensión.

Las experiencias, a su vez, están condicionadas por tres elementos: el *objeto de comprensión* -determina la naturaleza y características de las experiencias-; el *sujeto que comprende* -valoración personal del objeto, historia en relación con él, capacidades cognitivas vinculadas-; el *medio de interacción sujeto-objeto* -provoca las experiencias y pone en contacto los dos elementos anteriores; medio social, escolar, etc.-.

Evolución

La comprensión no es un fenómeno estático. Al igual que Pirie y Kieren (1994) defendemos la idea de una evolución no unidireccional con sucesivos avances y retrocesos en un proceso dinámico, continuo y, a priori, sin límites. La complejidad de esta evolución, con tendencia final global positiva, dificulta la tarea de construir modelos válidos para cualquier conocimiento matemático. Una vez más, las experiencias con el objeto de conocimiento son condición necesaria, aunque no suficiente, para que se produzca la evolución en la comprensión.

Efectos y resultados

Se puede decir que los mecanismos asociados a los fenómenos de comprensión producen en el individuo efectos tanto observables como no observables. Entre los primeros podemos citar: comportamientos adaptados, aplicación de conocimientos, facilidad para los aprendizajes, ser buen resolutor de problemas; etc.. Entre los no observables podemos citar: nuevos conocimientos y redes de conocimientos, nuevas estructuras cognitivas, nuevas capacidades, nuevas destrezas, nuevas formas de “ver” las situaciones, nuevas estructuras semánticas, etc.; la mayoría de ellos sólo se

[7] Se puede afirmar, en términos similares a los empleados por Sierpinska (1990), que la comprensión es un proceso plagado de etapas caracterizadas por múltiples actos de comprensión. Los diferentes actos y procesos de comprensión en un individuo devienen, a su vez, en estados o situaciones puntuales de comprensión.

[8] Caracterizadas por la existencia de desequilibrios cognitivos y la participación activa del sujeto para superarlos.

pueden constatar mediante inferencia a partir de los datos que proporcionan los efectos observables.

Medios para observar, diagnosticar y valorar la comprensión

La valoración de la comprensión basada en las representaciones mentales plantea problemas. Es difícil evaluar las representaciones internas de los conocimientos matemáticos; se puede, por ejemplo, obtener información detallada de lo que realizan o manifiestan los sujetos, pero no de lo que sucede en sus mentes. Por este motivo, entendemos que es más factible y apropiado limitar la evaluación a las manifestaciones externas, en términos de "registros objetivos", y considerar las interpretaciones sobre las características internas como conjeturas provisionales y siempre aproximadas a la situación real.

Para observar el estado de la comprensión de un individuo sobre un objeto, es necesario ponerlo en disposición de emplear todas las herramientas, capacidades y conocimientos a su alcance sobre dicho objeto para responder a situaciones especialmente preparadas para ello. En concreto, deben ser situaciones y tareas para cuya resolución se necesite emplear, precisamente, el conocimiento cuya comprensión queremos observar. Asímismo, es fundamental que consigan implicar al sujeto -que éste "haga suya la actividad"-[9] y que demanden respuestas con las que podamos asegurar que se comprende de algún modo el conocimiento en cuestión. Para ello, es necesario que la tarea o situación propuesta sea específica, sencilla de entender, sin distractores, de respuesta controlada, atractiva para el resolutor, a ser posible lúdica, preferiblemente un verdadero problema y de una dificultad media dentro de las de su misma especie.

El Modelo: Responder adecuadamente es un síntoma de comprensión

A diferencia de los modelos elaborados para explicar los aspectos estáticos y directos de la comprensión -naturaleza, características, estructura, tipos-, consideramos que los centrados en los aspectos dinámicos e indirectos -origen, funcionamiento, evolución, efectos- son más adecuados para la observación y contrastación empírica. De entre ellos, centraremos la atención en los efectos sobre la capacidad de respuesta adaptativa específica de los sujetos así como en los medios e instrumentos necesarios para observar dichas respuestas. En consecuencia:

Decimos que un sujeto manifiesta una cierta comprensión en relación con un objeto concreto -conocimiento, etc.- cuando elabora y emite a su satisfacción una respuesta adaptada, centrada en dicho objeto, ante una situación de desequilibrio cognitivo que decide voluntariamente abordar. Para ello, el sujeto tendrá que analizar la situación, valorar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de la misma a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando algunos pasos del proceso. Es, en este sentido, en el que decimos que **comprender es sinónimo de responder** o de **elaborar y emitir una respuesta adaptada.** Si un sujeto emite una respuesta adaptada, podemos decir que comprende en los términos de la situación o del problema propuesto. Alternativamente, si el individuo no

[9] Requisito que busca tanto la efectividad de los instrumentos de diagnóstico como la autenticidad de los comportamientos.

responde o lo hace incorrectamente o la respuesta no es adaptada, no podremos afirmar nada sobre la situación de su comprensión por desconocer los verdaderos motivos de ese proceder[10]. Por otra parte, suele haber una variedad de respuestas adaptadas, más o menos completas o evolucionadas, a una situación. En otras palabras:

"*Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende*"

Según sea dicha utilización, en cuanto a alcance, diversidad, complejidad, seguridad, efectividad o disponibilidad, así será el nivel o grado de comprensión que el sujeto maneja o dispone en el momento de responder.

Características de la aproximación adoptada

Nuestra aproximación al estudio del fenómeno de la comprensión presenta las siguientes características:

- Es operativa: Las afirmaciones vendrán respaldadas por datos y resultados empíricos. No tiene sentido construir modelos descriptivos sobre algo inobservable y cuya bondad no puede ser comprobada empíricamente. En su lugar, es más fácil profundizar en aquellos aspectos que pueden ser observados por medio de tareas y situaciones que obliguen al sujeto a responder. Además, se busca expresamente la facilidad para realizar valoraciones objetivas y realizar comparaciones.
- Es indirecta: Reconocemos las limitaciones del investigador para observar de manera directa la comprensión que tiene, emplea o manifiesta un sujeto acerca de un conocimiento matemático. No obstante, ésta puede ser inferida o abordada indirectamente a través del análisis de las acciones que lleva a cabo el individuo en su intento por resolver tareas problemáticas.
- Es fenomenológica: El carácter indirecto de la aproximación remite a los fenómenos, tareas y situaciones que dan sentido al conocimiento matemático en juego, lo que obliga a fundamentar todos los estudios de esta clase en el análisis epistemológico y fenomenológico[11] (Puig, 1997) del conocimiento matemático.
- Es positiva: Nos interesa determinar, por ahora, lo que los alumnos comprenden y no lo que no comprenden o porqué lo comprenden o no. Por tanto, el interés por la identificación de obstáculos epistemológicos, por ejemplo, queda relegado en esta aproximación a un segundo plano.
- Es provisional y abierta: Las conclusiones serán siempre consideradas provisionales. El diagnóstico y la evaluación deben abordarse en términos de aproximaciones sucesivas a una situación cognitiva real que nunca vamos a poder determinar con precisión. Además, no es posible completar al cien por cien el campo de situaciones donde tiene sentido el conocimiento matemático cuya comprensión nos interesa estudiar.

---

[10] Entre otras posibilidades, un individuo que comprende puede negarse a afrontar una situación o puede actuar en privado y no manifestar la respuesta.

[11] Empleado aquí con un propósito diferente al de Freudenthal (1983); el objetivo principal no es la organización de la enseñanza de las matemáticas, sino el diagnostico y la evaluación de la comprensión de un conocimiento matemático.

EL PROBLEMA DE LA DETERMINACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE SITUACIONES

De acuerdo con la aproximación propuesta y con la caracterización de la comprensión del conocimiento matemático en términos de utilización en respuestas adaptadas a situaciones problemáticas, el diagnóstico y la valoración requieren de un análisis situacional que se inicia con una búsqueda de todas aquellas situaciones susceptibles de poderse resolver con el conocimiento matemático en cuestión o en las que tiene sentido su utilización. Pero esta tarea no es fácil; hemos de reconocer que el universo de situaciones a describir suele ser demasiado amplio para elaborar un listado completo de las mismas, lo que aconseja y justifica plenamente la realización de una labor de análisis, categorización y selección de situaciones que organice, simplifique y haga más manejable el universo mencionado.

El análisis de situaciones que proponemos debe ser abordado, por tanto, desde una perspectiva algo diferente a la adoptada por Vergnaud (1988, 1990, 1997), quien con la introducción de la noción de campo conceptual, evidente y oportuna para otros propósitos, traslada el problema de la determinación y selección de situaciones a un ámbito de generalidad reconocido como poco operativo para la investigación[12]. Estamos de acuerdo con Vergnaud, en que el conocimiento matemático no está aislado y que para estudiarlo no conviene obviar sus conexiones con el resto de conocimientos. Pero esto no significa necesariamente que debamos contemplar de forma global campos tan amplios como el de la estructura multiplicativa o el álgebra elemental como condición necesaria para llevar a cabo cualquier labor de clasificación de situaciones. Por el contrario, consideramos factible y, sobre todo, más adecuado, focalizar la atención en el conocimiento matemático particular, aún reconociendo que en dichas situaciones también pueden estar presentes otros conocimientos matemáticos. De este modo, al realizar un seguimiento más controlado del conocimiento seleccionado a través de las distintas situaciones que le dan sentido, pensamos que se reducirá en parte el efecto de generalidad causado por la teoría de los campos conceptuales a la vez que se garantizará un mayor grado de precisión y profundidad en la valoración de la comprensión de los sujetos. Aún así, queda abierta la cuestión de determinar cual sería, si es que existe, la posición intermedia desde la que poder conjugar de forma adecuada la generalidad mencionada con las posibles restricciones surgidas de nuestra perspectiva, todo ello con el fin de afrontar con éxito la tarea de análisis y categorización de situaciones.

Una posible solución

La influencia de la naturaleza del conocimiento matemático en su comprensión por parte de los sujetos es una de las características fundamentales admitida por la aproximación que se presenta. De hecho, la propuesta que hacemos toma como punto de partida la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático, por lo que resulta acertada la selección de conocimientos matemáticos particulares a la hora de diagnosticar y evaluar su comprensión. Sólo a partir de los avances que se produzcan en la investigación sobre la comprensión de conocimientos matemáticos concretos pensamos que se podrán extraer en un futuro resultados y conclusiones

[12] Tómese como referencia la discusión suscitada en el Seminario de la SEIEM-1998 sobre el problema de la clasificación de las tareas de un campo conceptual.

acerca del fenómeno de la comprensión, en cierta medida válidos y generalizables a cualquier conocimiento matemático.

Bien es cierto que el hecho de que los conocimientos matemáticos no estén aislados, sino relacionados entre sí de múltiples formas, dificulta cualquier intento de clasificación de situaciones. Pero, a pesar de ello, entendemos que la decisión de centrar la atención sobre un conocimiento matemático concreto facilita el acercamiento a su campo situacional, y, sobre todo, que la consideración de las estructuras epistemológica y fenomenológica constitutivas del conocimiento seleccionado nos permite establecer unas dimensiones o categorías de situaciones utilizables desde un punto de vista práctico para el diagnóstico y evaluación de la comprensión. Así pues, la comprensión de los sujetos se valorará en términos de capacidad de enfrentar con éxito situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica.

Debemos subrayar que una clasificación como la pretendida no ha de ser interpretada como un sistema exhaustivo donde tiene cabida la totalidad de situaciones posibles, puesto que siempre aparecerán *"posibilidades y singularidades impensadas o no describibles sin salirse del sistema de catalogación"* (Puig, 1998; p.108). De lo que se trata es de seleccionar las mejores situaciones para los propósitos del estudio y garantizar un cierto grado de suficiencia y representatividad en la muestra de tareas, lo que se consigue, por otro lado, mediante las fuentes consultadas para el análisis epistemológico y fenomenológico referido al conocimiento matemático elegido. Estas fuentes son:

- Las investigaciones y trabajos realizados en torno a la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático en estudio.
- Los libros de texto de matemática y las obras de divulgación y entretenimiento matemático.
- El conocimiento de los especialistas en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática.

COMPRENSIÓN DEL ALGORITMO ESTÁNDAR ESCRITO PARA LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Los planteamientos teóricos expuestos en los apartados anteriores exigen una primera confrontación empírica con la que mostrar la verdadera potencialidad operativa de la aproximación adoptada. Para tal fin, hemos seleccionado como conocimiento matemático particular el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Los principales motivos que nos han llevado a tal elección son los siguientes:

1.- La enseñanza y el aprendizaje del cálculo aritmético elemental es un campo de investigación en el que las numerosas propuestas elaboradas para garantizar una instrucción efectiva, la mayoría de ellas basadas en estudios de carácter cognitivo, contrastan con las escasas mejoras obtenidas en la consecución de una buena comprensión en aritmética y en matemáticas en general (Burns, 1994; Lindquist, 1997). Al centrar el estudio empírico en un método de cálculo como el elegido, con una amplia presencia en el curriculum de Primaria, pretendemos aportar algunos resultados y conclusiones sobre la comprensión que poseen los estudiantes, con ánimo de que éstos puedan ser de ayuda para mejorar la actual situación del proceso usual de enseñanza-aprendizaje.

2.- Un conocimiento matemático como el algoritmo estándar escrito para el producto, en apariencia tan elemental y evidente en cuanto a su comprensión -en numerosas ocasiones suele considerarse como un simple procedimiento aritmético en el que su comprensión se identifica con su dominio-, refleja, sin embargo, toda la problemática existente en torno al fenómeno de la comprensión, permitiéndonos mostrar con claridad la dificultad y limitaciones que hay que aceptar a la hora de afrontar su diagnóstico y evaluación. De hecho, los sujetos manifiestan diferencias sustanciales y matices importantes respecto a la comprensión de este método de cálculo, al cual consideramos con la suficiente entidad matemática como para abordar el estudio de su campo situacional y emplearlo con posterioridad como medio con el que valorar su comprensión.

Además, la aparente simplicidad de las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al algoritmo garantiza en cierto modo que el estudio sobre la comprensión se desarrolle en un nivel destacable de rigurosidad y profundidad a lo largo de un proceso controlado.

Estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al algoritmo

Desde un punto de vista epistemológico, se considera al algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales como un procedimiento de cálculo con una sintaxis claramente definida, resultado del proceso de refinamiento que ha venido experimentando durante siglos. En la actualidad, su registro escrito se reduce a la clásica y extendida representación en columnas.

Dicho método de cálculo se sustenta en los principios de la numeración decimal, es decir: las cifras del 0 al 9, el agrupamiento decimal, el valor de posición, el cero y el agrupamiento multiplicativo (Gómez, 1999). Todos ellos, junto con los hechos numéricos básicos y el algoritmo estándar escrito para la suma de números naturales, constituyen la base de conocimientos previos que conforman el algoritmo. Estos conocimientos, entendidos como componentes internos o elementos básicos, aparecen conectados o relacionados entre sí dentro del mismo sistema de representación simbólico. Precisamente, la consideración por parte de los sujetos de estas conexiones o relaciones nos va a proporcionar el criterio epistemológico fundamental con el que clasificar las diversas situaciones asociadas al algoritmo.

En lo que respecta a la fenomenología, conviene destacar que las tareas directamente vinculadas con el algoritmo estándar escrito de la multiplicación son las que van a conformar el conjunto de situaciones que nos interesa clasificar. El resto de tareas, sin vinculación alguna con el algoritmo o bien relacionadas indirectamente con él a través de otros conocimientos matemáticos, no serán consideradas como pertenecientes al conjunto situacional asociado a este método de cálculo. Dentro del grupo de situaciones considerado, tomaremos como criterio fenomenológico fundamental de clasificación la posibilidad de que el algoritmo intervenga en una situación concreta de forma evidente o como alternativa entre varios conocimientos matemáticos.

La consideración conjunta de las estructuras epistemológica y fenomenológica del algoritmo, cuyo estudio conduce a la propuesta de unos criterios clasificatorios pendientes de contrastación empírica, va a permitir, por una parte, el establecimiento de unas categorías que agrupen las distintas situaciones en función del uso que se hace en ellas del algoritmo, y por otra, la selección en cada una de las categorías de un subconjunto de *situaciones adecuadas* con las siguientes características:

(a) Que sean representativas del resto. Esto significa que en caso de seleccionar otra situación distinta dentro de la misma categoría, no se obtendría de ella una información sobre la comprensión de los sujetos sustancialmente diferente a la facilitada por la/s elegida/s como representante/s.

(b) Que constituyan un grupo reducido para que puedan emplearse con comodidad como instrumento para la recogida de información.

A través de este proceso de categorización y selección aspiramos a restringir, en la medida de lo posible, el conjunto situacional asociado al algoritmo a sólo unas pocas situaciones, sin tener por ello que renunciar a la representatividad respecto del total. De conseguir este propósito, podríamos afirmar que la aproximación adoptada al estudio de la comprensión garantizaría un alto grado de operatividad.

La pretendida categorización y selección de situaciones surge, por tanto, de conjuntar la reflexión teórica con un estudio empírico exploratorio, siguiendo un proceso dialéctico entre teoría y práctica cuyas ventajas para la investigación han sido reconocidas por algunos autores (Kieran, 1998). A continuación, pasamos a describir de forma resumida el estudio exploratorio realizado.

Estudio Exploratorio

Con el objetivo fundamental de llegar a establecer una clasificación pertinente para las situaciones vinculadas al algoritmo y lograr su conversión operativa[13], hemos llevado a cabo un estudio exploratorio, descriptivo y de carácter cualitativo (Bisquerra, 1989) en el que se ha usado la entrevista como técnica o instrumento para la recogida de información (Cohen y Manion, 1990; Azcárate, 1998). Dicho estudio ha de entenderse en todo momento como un primer intento de acercamiento práctico a la observación, diagnóstico y valoración de la comprensión del algoritmo en base a los planteamientos teóricos expuestos con anterioridad.

Muestra

Para el estudio empírico hemos elegido una muestra intencional compuesta por un total de diez alumnos, distribuidos del siguiente modo: tres alumnos de 5º de Primaria, dos de 1ºESO, dos de 3ºESO y tres de 1º de Bachillerato. Todos ellos pertenecientes a Centros públicos de características socio-culturales similares, uno situado en Córdoba y otros dos en Almería.

Desarrollo de las entrevistas

Se han realizado un total de 9 entrevistas -una de ellas con dos alumnos participantes-, distribuidas en tres bloques diferentes separados entre sí por cortos periodos de reflexión teórica en los que hemos ido extrayendo conclusiones parciales relacionadas fundamentalmente con las categorías situacionales y con la

---

[13] En forma de categorías de respuestas con las que poder interpretar y valorar los comportamientos de los sujetos y extraer de ellos información acerca de su comprensión.

adecuación de las situaciones -en cuanto a formato, complejidad, representatividad,...- para formar parte de la selección buscada.

En cada entrevista, el alumno debía enfrentarse a distintas situaciones susceptibles de poderse resolver con el algoritmo, elegidas de entre las que conforman su conjunto situacional de acuerdo con los criterios clasificatorios provisionales sugeridos de sus estructuras epistemológica y fenomenológica. Antes de continuar con la siguiente situación, se le planteaba al alumno algunas cuestiones tipo acerca de lo que había hecho y cómo lo había hecho en su intento por resolver la situación problemática propuesta. A lo largo de cada entrevista se llegaban a plantear una media de 5 o 6 tareas diferentes.

Todas las entrevistas fueron registradas en audio y tuvieron una duración que osciló entre los 25 y 35 minutos.

Discusión de resultados y conclusiones fundamentales

A continuación exponemos algunos de los resultados y conclusiones más relevantes obtenidos tras el desarrollo de las entrevistas:

1.- Ha sido posible establecer una categorización -siempre entendida de forma provisional- para las situaciones del conjunto situacional asociado al algoritmo. Los criterios clasificatorios sugeridos a priori en la discusión sobre las estructuras epistemológica y fenomenológica han sido contrastados empíricamente de modo favorable al proporcionar unas categorías situacionales que permiten la discriminación de los alumnos en cuanto a la comprensión que manifiestan del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. Las respuestas dadas por los estudiantes a las situaciones reunidas bajo una misma categoría se constituyen en indicadores de primer orden sobre aspectos concretos de la comprensión, que permanecen ocultos en caso de emplear situaciones pertenecientes a categorías distintas. En definitiva, cada categoría situacional va a proporcionar información sobre una parcela diferente de la comprensión del algoritmo.

El criterio epistemológico, que toma en consideración las posibles relaciones detectadas entre los componentes internos del algoritmo como condicionante del tipo de utilización que el sujeto hace de él cuando de enfrenta a una situación particular, suministra las siguientes categorías:

(1) Categoría Técnica: Reúne a todas aquellas situaciones donde el algoritmo se emplea de forma mecánica o rutinaria como un instrumento de cálculo. La comprensión exigida para solventarlas se limita al dominio de los diversos pasos que conforman el procedimiento completo. Las relaciones a establecer entre los elementos básicos del algoritmo son las usuales que posibilitan recorrer la secuencia procedimental establecida en el sentido apropiado.

(2) Categoría Analítica: En ella se incluyen las situaciones que exigen para su resolución un uso reflexivo del algoritmo. No basta con la simple aplicación rutinaria mencionada en la categoría anterior; se requiere además de un análisis sobre la estructura y el funcionamiento externo del mismo que incluye el empleo premeditado de unas relaciones externas no usuales entre las distintas componentes del algoritmo que permiten, por ejemplo, recorrerlo en sentidos diferentes al establecido.

(3) Categoría Formal: Constituida por todas las situaciones que precisan, para poder resolverse, de la utilización de los principios básicos en los que se fundamenta el algoritmo. Las tareas incluidas en esta categoría demandan del resolutor un conocimiento explícito de las relaciones internas que sustentan y validan el mecanismo subyacente al algoritmo.

A las situaciones que permiten ser resueltas empleando de más de una forma el método de cálculo elegido las denominamos *situaciones frontera* y pueden pertenecer a varias categorías. La figura 1 recoge las respuestas, no necesariamente correctas, dadas por algunos de los alumnos entrevistados a situaciones propias de cada una de las categorías consideradas.

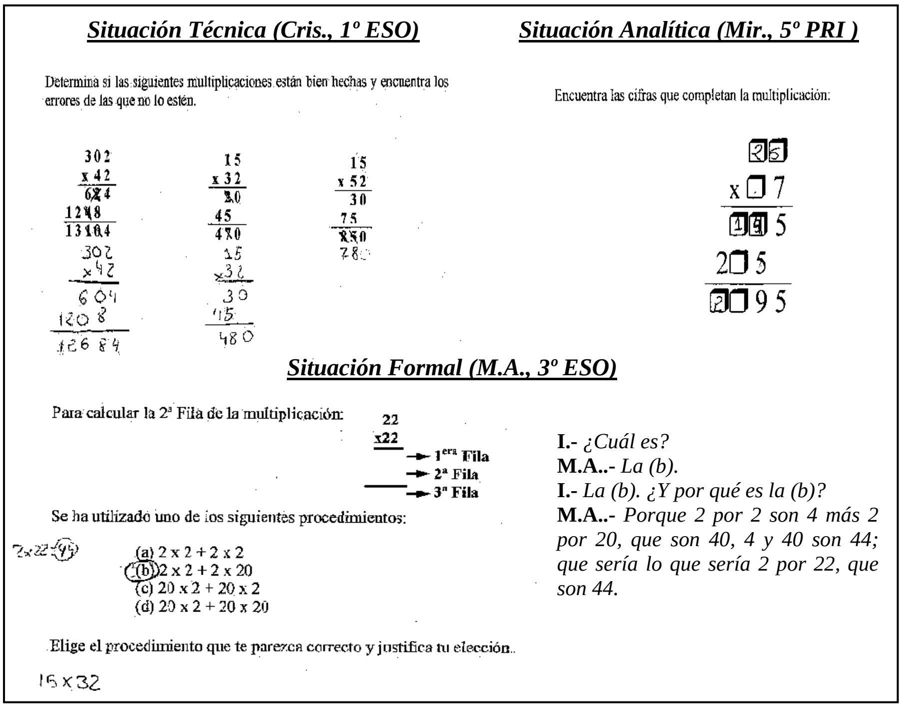


Figura 1. *Ejemplos de situaciones propias de la categoría Técnica, Analítica y Formal.*

Por su parte, el criterio fenomenológico propuesto nos proporciona los siguientes tipos de situaciones de acuerdo con el grado de evidencia en la identificación y utilización del algoritmo:

(a) Situaciones Exclusivas: donde el empleo del algoritmo se muestra evidente para el sujeto, es decir, las identifica de forma inmediata como pertenecientes al conjunto de situaciones susceptibles de poder resolverse con el algoritmo. Podemos afirmar que en tales situaciones el algoritmo se sitúa en una posición muy favorable en cuanto a su uso respecto a otros conocimientos matemáticos. Las tareas contenidas en la figura 1 son ejemplos de situaciones Exclusivas.

(b) Situaciones No-Exclusivas: que pueden resolverse de diferentes formas, una de ellas mediante el empleo del algoritmo estándar escrito de la multiplicación. Ante una situación de este tipo, el sujeto tendrá que identificarla como apta para poder ser resuelta con el algoritmo y decidir utilizar este método de cálculo en lugar de otros conocimientos matemáticos alternativos. En tales situaciones, el algoritmo se muestra a priori como una opción más dentro de otras posibilidades de empleo de conocimientos matemáticos igualmente válidos. En la figura 2 de la página siguiente se muestra un ejemplo de situación No-Exclusiva, que a su vez es frontera, resuelta con distintos conocimientos matemáticos, uno de ellos el algoritmo empleado de forma Técnica y Analítica.

Los criterios de clasificación establecidos nos permiten disponer de un espacio, surgido del cruce entre las distintas categorías, donde situar a cada situación en relación con las demás. El modelo tetraédrico de la figura 3 permite visualizar de un modo claro la posición relativa de las categorías y la ubicación de las situaciones en ellas.

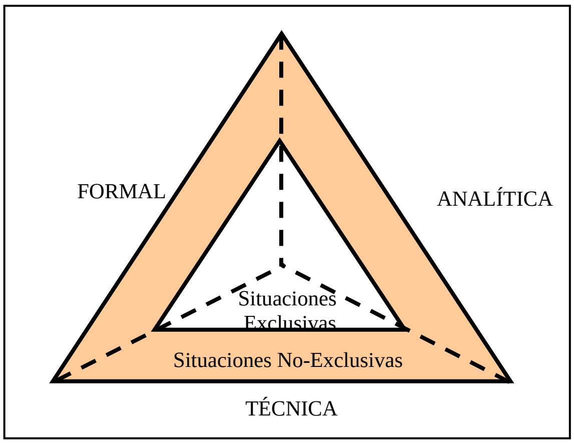
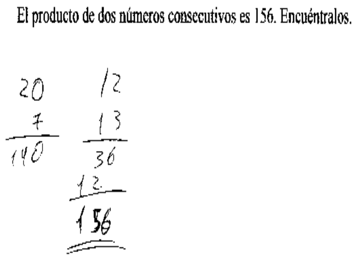


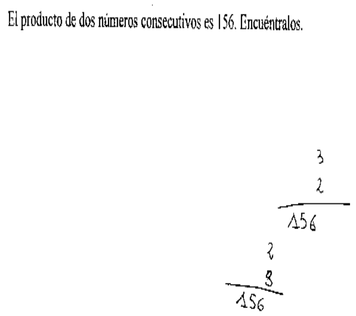
Figura 3. C*lasificación de situaciones asociadas al algoritmo.*

Respuesta de Alv. (1º Bach.): uso Técnico del algoritmo



Alv.- *20 por...¡no! 20 por 10, 200; 20 por 8...¿puede ser? 8 por 0, 0...no. 8 por 2, 16. 8 por siet..., 20 por 7. ¡¿No?! ¿Puede ser o no?*
...
Alv.- [Unos instantes en silencio] *Así sería, ¿no? 12 por 13.* [Realiza el cálculo en silencio].
I.- *Explica un poco cómo has obtenido esos dos números.*
Alv.- *¡De cabeza, buscando!*
I.- *¿Sí?*
Alv.- *10 por 11 da 110, pues, más o menos aproximándote...pues, 12 por 13, 156....¿No?, ya está.*

Respuesta de Sil. (5º PRI.): uso Analítico del algoritmo



I.- *¿Qué estabas pensando? Explícame un poco qué estabas intentando.*
Sil.- *Pues,* [fragmento ininteligible; problemas de vocalización] *...por 6, entonces si... dos por... espérate. 2 por 4, te tienes que llevar 1 para que te dé 0...¡No me sale!*
I.- *¿No te sale? Tú has puesto 2 por 3. ¿Por qué has puesto el 2 y el 3?*
Sil.- [Instantes de silencio] *Porque he ido multiplicando haber lo que me salía...*
I.- *Para que diera...*
Sil.- *Sí.*
I.- *Para que diera 6.*
Sil.- *O 16... espera.*
I.- *O 16.*
Sil.- [Tras un minuto aprox. de reflexión en silencio]. *¡No me sale!*

Respuesta de Bea. (1º Bach.): uso de un conocimiento matemático alternativo

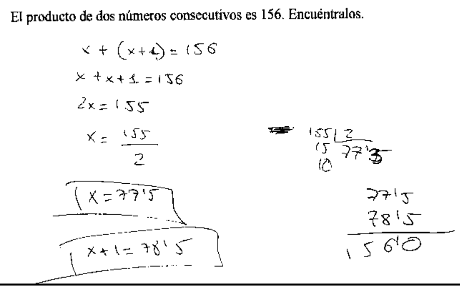
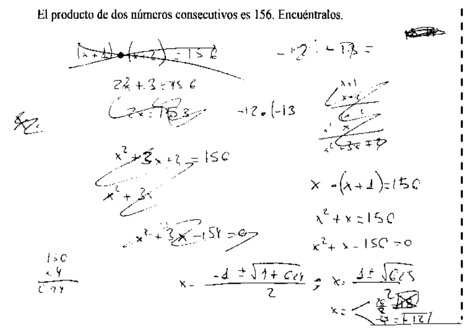
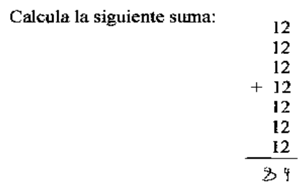


Figura 2. *Ejemplo de situación No-Exclusiva frontera de la categoría Técnica y Analítica*

2.- El problema de la selección de *situaciones adecuadas* admite una solución parcial. Por la propia naturaleza de las situaciones No-Exclusivas resultará imposible determinar representantes de clase en las categorías de empleo Técnica, Analítica y Formal. Así por ejemplo, el que un sujeto decida en un momento determinado utilizar el algoritmo para resolver una situación No-Exclusiva de empleo Técnico no garantiza necesariamente su uso posterior en otra situación del mismo tipo. Este hecho se ha puesto de manifiesto con varios de los alumnos entrevistados. En la figura 4 pueden observarse las respuestas proporcionadas por un alumno de 1º de Bachillerato a dos situaciones No-Exclusivas consideradas de empleo Técnico del algoritmo. La tarea de la izquierda es resuelta algebraicamente mediante una ecuación de segundo grado, mientras que en la derecha se emplea el algoritmo estándar del producto -de un modo mental- para sumar 7 veces 12.





Est.- He cogido, he contado cuántos 12 hay y he multiplicado. O sea, como había 7, he dicho, pues 12 por 7 y lo he contado... más fácil.

Figura 4. *Respuestas de Esteban (1º Bach.) a dos situaciones No-Exclusivas diferentes de empleo Técnico del algoritmo*

Las situaciones Exclusivas, en cambio, son diferentes en este sentido y, tal como se ha visto en el transcurso del estudio empírico, se prestan más a generalizaciones del tipo: *"Si un individuo resuelve con éxito la situación Exclusiva A, mostrará una comprensión del algoritmo tal que le capacita a priori para resolver con éxito otra situación Exclusiva B, siendo ambas de la misma categoría de empleo Técnico, Analítico o Formal "*. La representatividad, por tanto, parece quedar garantizada sólo en las Situaciones Exclusivas.

El formato y la potencialidad de las tareas como instrumentos de obtención de información son otros aspectos a considerar que influyen en la selección de situaciones adecuadas. La determinación del formato idóneo para una situación constituye un problema complejo para el que aún no hemos obtenido una solución definitiva. Con el estudio exploratorio hemos pretendido, entre otras cosas, depurar la presentación de las distintas tareas seleccionadas en un principio, observando para ello las reacciones de los estudiantes ante los diferentes contextos mostrados. A lo largo del proceso seguido hemos ido manteniendo algunas situaciones y descartando o modificando otras que presentaban dificultades añadidas e irrelevantes.

Además, el formato puede considerarse como un factor que condiciona la elección del instrumento de observación a emplear. Con las entrevistas realizadas se ha podido mostrar que no todas las situaciones asociadas al algoritmo se adaptan por igual a una misma técnica de recogida de información. Por un lado, existen tareas para las que resulta apropiado su empleo en un cuestionario ya que la producción escrita elaborada por el alumno aporta la información suficiente con la que valorar su comprensión, siendo innecesario por tanto cualquier tipo e diálogo posterior que corrobore las acciones realizadas. Las *multiplicaciones con cifras desconocidas*[14] se encuentran entre las tareas de este tipo. Por otro lado, también existen situaciones en las que se necesita establecer un diálogo con el estudiante a fin de aclarar el registro escrito producido o simplemente para aclarar una respuesta verbal exigida. El cálculo de una suma de sumandos iguales sería una tarea propia de esta clase.

Como conclusión, esta circunstancia motiva la recomendación de utilizar diversos instrumentos de recogida de información -aquellos que se ajusten mejor a las condiciones de las situaciones adecuadas-, en los estudios empíricos que con base en la aproximación adoptada vayan dirigidos a diagnosticar y evaluar la comprensión de los sujetos sobre conocimientos matemáticos concretos.

3.- En estrecha relación con el punto anterior extraemos dos consecuencias claras. En primer lugar, la posibilidad de concretar un *conjunto fundamental* reducido de situaciones Exclusivas pertenecientes a las tres categorías de empleo del algoritmo, que serán las que proporcionen una primera información básica acerca de la comprensión que poseen los sujetos. En segundo lugar, la necesidad de diferenciar los dos tipos de situaciones, Exclusivas y No-Exclusivas, de cara a la observación y valoración de la comprensión. A diferencia de las primeras, las situaciones No-Exclusivas se destinarían a completar los perfiles iniciales de comprensión proporcionados por las mencionadas situaciones Exclusivas; por ejemplo, estableciendo posibles diferencias entre sujetos de “comprensión fundamental” equivalente o haciendo explícitas peculiaridades de la comprensión de los sujetos inadvertidas en un primer momento.

Uno de los efectos evidenciados con las situaciones No-Exclusivas hace referencia a la tendencia que tienen algunos alumnos a emplear en dichas tareas otros conocimientos matemáticos, conocidos pero más sofisticados que el algoritmo, y, de este modo, a reducir el uso del procedimiento de cálculo a las situaciones Exclusivas y otras pocas donde es contemplado como la alternativa más sofisticada -ver Figura 4-. De acuerdo con los planteamientos teóricos en los que nos basamos, este fenómeno podría interpretarse como una pérdida de la comprensión del algoritmo que tiene como principal consecuencia la progresiva disminución de la misma al ámbito de lo fundamental. Esta conclusión, no obstante, queda pendiente de confirmación.

4.- La operativización deseada se obtiene de las respuestas dadas por los sujetos al conjunto fundamental de situaciones Exclusivas. El análisis de estas respuestas permite la identificación de regularidades y características comunes entre ellas con las que poder definir categorías asociadas a diferentes tipos de comprensión sobre el

---

[14] En un trabajo previo (Gallardo, 2001) realizamos un estudio sobre las características y la potencialidad de este tipo de tareas como instrumento para observar la comprensión que poseen los alumnos del funcionamiento y la estructura externa del algoritmo, según se puso de manifiesto a través de un cuestionario pasado a una muestra de estudiantes de 10 a 14 años en el que tenían que resolver tareas de este tipo.

algoritmo. En el estudio empírico desarrollado hemos realizado los primeros avances en este sentido. A continuación, mostramos como ejemplo las respuestas dadas por cuatro alumnos a la cuestión Formal de: "*¿por qué hay que ir desplazando los productos parciales un lugar hacia la izquierda?*". Las distintas respuestas manifiestan una comprensión diferente del algoritmo por parte de los alumnos entrevistados:

(A) Mir (5ºPri.) .- [Utiliza como apoyo visual la multiplicación 302 x 42, resuelta con el algoritmo]. *Porque siempre hay que ponerla debajo de la cifra que estás multiplicando. Si tú multiplicas 4 por 2 pues tienes que ponerlo debajo del 4 porque es la cifra que estás multiplicando, por eso siempre se deja hueco, porque se pone debajo de la cifra que se multiplica.*

(B) M.A (3º ESO) .- [Utiliza como apoyo visual la multiplicación 15 x 32, resuelta con el algoritmo]. *El espacio ese es como si hubiera un 0.*
I.- *Es como si hubiera un 0.*
M.A..- *Claro.*
I..- *¿Y por qué?*
M.A..- *Ya es más difícil. ¿Por qué? Porque... 0 no vale.*
I.- *0 no vale.*
M.A..- *Pero ahí sí sale.*
I.- *Sí, pero yo digo que el 450 de dónde sale.*
M.A.- *De...* [instante de silencio] *...450 sale de... de sumar así esta multiplicación. ¡Qué no sé! Que no sé lo del 0 ni lo del espacio de donde viene.*

(C) Bea. (1º Bach) .- [Como apoyo visual al razonamiento se emplea la multiplicación 703 x 36 resuelta con el algoritmo] Es como si multiplicaras 30 por 703... y 6 por 703, y luego lo sumas.
...
Est. (1º Bach).- Porque aquí coges el... esta es la multiplicación de 6 [el resultado del primer producto parcial] y esta es la multiplicación de 30 [el resultado del segundo producto parcial].
Bea.- Sí.
Est.- ¡Claro!, de 30, por eso se deja aquí este 0.
...
Bea.- Y luego lo tienes que sumar para que te dé el producto final porque tú quieres 36. Por eso se suman.
Est.- Y si hubiera centenas pues sería otro hueco... y fuera nada más como... multiplicamos como si fuera un número por 100.
I.- Ya.
Est.- O sea, va multiplicando unidades primero, después decenas y después las centenas y después las sumas.
Bea.- Creo, porque yo nunca lo he comprobado... Y luego se suman por eso, porque primero tienes la multiplicación del 30...
Bea.- ... luego tienes la multiplicación del 6. Tú quieres la del 36, pues sumas la del 30 y la del 6.
Est.- Es que esto en verdad no es 2109 sino es 21090, por eso la suma...
Bea.- Es que esto no es 2109, es 21090. Lo que él ha dicho.
Est.- Porque si no estarías sumando 4218 y 2109 y en verdad eso sería una multiplicación de 6 y de 3, nada más.

CONCLUSIÓN

En este documento hemos querido presentar las ideas centrales que configuran el marco teórico desde el que proponemos examinar la comprensión del conocimiento matemático. Dada la complejidad que encierra dicho fenómeno y el estado actual en el que se encuentran los conocimientos relacionados con él, consideramos más factible y adecuado aproximarnos a su estudio desde una perspectiva holística, que contemple todos los aspectos relevantes vinculados a la comprensión, y al mismo tiempo operativa, con el énfasis puesto en aquellos aspectos que permiten ser observados por el investigador.

Con objeto de ir aportando datos empíricos en favor de esta aproximación, hemos realizado un estudio exploratorio de carácter cualitativo en el que, mediante entrevistas a una muestra reducida de alumnos, se han extraído los primeros resultados y conclusiones acerca de la operatividad real del modelo para observar, diagnosticar y valorar la comprensión de los sujetos en el caso particular del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEL, T. (1964). La operación llamada “Verstehen”. En I. L. Horowitz (Coord.) *Historia y elementos de la sociología del conocimiento*, Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires, pp. 185-196.

AINLEY, J. Y LOWE, A. (1999). Can written questions differentiate between degrees of understanding? *Mathematics Teacher*, 168, 32-35.

ARCAVI, A. (1995). …Y en matemáticas, los que instruimos, ¿qué construimos? *Substratum*, 6, 2, 77-94.

AZCÁRATE, C. (1998). *Las entrevistas en investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Análisis de algunas experiencias próximas.* II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Navarra: Universidad de Pamplona, pp. 25-31

BISQUERRA, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa. Guía Práctica*, Barcelona: CEAC.

BURNS, M. (1994). Arithmetic: The Last Holdout. *Phi, Delta, Kappan*, febrero, 471-476.

CAÑÓN, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento*, Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

CARPENTER, T., FENNEMA, E., FUSON, K., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A. Y WEARNE, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.) *Mathematics classrooms that promote* understanding, Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 45-61.

COHEN, L. Y MANION, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*, Madrid: La Muralla.

DAVIS, R. B. (1992). Understanding “Understanding”. *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 225-241.

DE LORENZO, L. (2000). *Filosofías de la matemática. Fin de siglo XX*, Valladolid: Universidad de Valladolid.

DÍAZ-GODINO, J. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.

DIAZ-GODINO, J. Y BATANERO, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355.

DUFFIN, J. Y SIMPSON, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4,* Lhati, Finland, pp.166-173.

DUVAL, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, Hiroshima, Japan, pp. 55-69.

ERNEST, P. (1994). Varieties of Constructivism: Their Metaphors, Epistemologies and Pedagogical Implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.

FEYERABEND, P. (1991). *Diálogos sobre el conocimiento*, Madrid: Cátedra.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht: Reidel Publishing Company.

GALLARDO, J. (2001). Comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación: un estudio exploratorio en escolares de 10 a 14 años. En M.Ortiz (Ed.) *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)*, Palencia: Universidad de Valladolid.

GÓMEZ, B. (1999). El futuro del cálculo. *Uno*, 22, 20-27.

GONZÁLEZ, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. *European Research in Mathematics Education (ERME 1), Vol., 2,* pp. 245-256.

GONZÁLEZ, J. L., PASCUAL, J.R. Y FLORES, P. (1994). Epistemología y Educación Matemática. En L. Rico y J. Gutiérrez (Eds.) *Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria*, Granada: ICE de la Universidad de Granada, pp. 25-39.

GOÑI, J. Mª (2000). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. En J. Mª Goñi (Coord.) *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*, Barcelona: Grao, pp. 23-57.

GUSEV, V. A. Y SAFUANOV, I. S. (2000). Some theoretical problems of the development of mathematical thinking. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3,* Hiroshima, Japan, pp. 17-24.

HABERMAS, J. (1981). *Teoría de la acción comunicativa I,* Madrid: Taurus, 1999 (Ed. Usada).

HIEBERT, J. Y CARPENTER, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D.A.Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: MacMillan Publishing Company, pp.65-97.

HIEBERT, J., CARPENTER, T. P., FENNEMA, E., FUSON, K.C., WEARNE, D., MURRAY, H., OLIVIER, A. Y HUMAN, P. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding,* Portsmouth, N. H.: Heinemann.

KIERAN, C. (1998). Models in Mathematics Education Research: a Broader View of Research Results. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics*

Education as a Research Domain: A Search for Identity, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 213-255.

KOYAMA, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

KOYAMA, M. (1997). Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process model by analyzing an elementary school mathematics class. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 5, 21-33.

KOYAMA, M. (2000). A research on the validity and efectiveness of "two-axes process model" of understanding mathematics at elementary school level. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3*, Hiroshima, Japan, pp. 159-166.

LINDQUIST, M. M. (1997). Foreword. En J. Hiebert, T.P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier y P. Human *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*, Portsmouth, NH: Heinemann, pp. vii-xvii.

PIRIE, S. Y KIEREN, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding**.** *For the Learning of Mathematics*, 9, 3, 7-11.

PIRIE, S. Y KIEREN, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

PIRIE, S.E.B. (1988). Understanding: Instrumental, Relational, Intuitive, Constructed, Formalised...? How Can We Know? *For the Learning of Mathematics*, 8, 3, 2-6.

PUIG, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Barcelona: Horsori.

PUIG, L. (1998). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.). *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Granada: SEIEM-Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, pp. 106-118.

RESNICK, L. B. Y FORD, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Barcelona: Paidós-MEC.

ROMERO, I. (2000). *Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico*. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva (paper).

SIERPINSKA, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.

SKEMP, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Madrid: Morata.

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates – NCTM, pp. 141-161.

VERGNAUD, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge, GB: Cambridge University Press, pp. 14-30.

VERGNAUD, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. En T. Nunes y P. E. Bryant (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics*, London: Psycology Press, Ltd., pp. 5-28.

VON GLASERSFELD, E. (1987). Learning as a Constructive Activity. En C. Janvier (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 3-17.