ALGUNS ASPECTOS DA DEMONSTRAÇÃO EM MATEMÁTICA: UMA DISCUSSÃO SOBRE OS MÉTODOS EMPREGADOS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho
balieiro@mat.feis.unesp.br
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Brasil

Tema: I.4 Pensamento Matemático Avançado
Modalidade: Comunicação Breve
Nível educativo: Terciário – Universitário
Palavras-chave: Demonstração; Filosofia da Matemática; História da Matemática; Fundamentos da Matemática.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo elaborar um referencial teórico que possibilite entender o raciocínio matemático, a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos na construção dessa demonstração. Assim, para elaborar esse referencial, foram utilizadas as pesquisas de Nickerson (2010), que abordam esses três temas que se agrupam e inter-relacionam para possibilitar uma melhor compreensão dos aspectos inerentes aos métodos de demonstração, considerando as seguintes perguntas: Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração? O que constitui uma demonstração? O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração? Como as demonstrações são construídas? Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida? Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração? Além das indagações de Nickerson, optamos por uma orientação histórica, filosófica e matemática para que possamos ter uma reflexão aprofundada sobre os três assuntos ao respondermos essas perguntas. Dando continuidade nesta pesquisa, pretendemos investigar quais as concepções dos alunos de um curso de graduação em Matemática sobre demonstração.

Introdução

As primeiras experiências em formar um quadro ou esquema argumentativo, iniciam-se em nossa infância, quando tentamos persuadir ou convencer os nossos pais ou irmãos em algo que queremos conseguir. E, posteriormente, em vários estágios (primeiro e segundo ciclos do Ensino Fundamental, Médio e Superior) de nossa formação educacional, somos estimulados e orientados – pelas várias disciplinas que compõem as áreas humanas e biológicas – a argumentar de forma coerente diante de uma situação problema que envolve os conteúdos dessas disciplinas. Esse processo argumentativo fica evidente nas áreas exatas, em especial, na disciplina de Matemática. De fato, as primeiras noções de argumentação matemática surgem quando aprendemos aritmética, geometria e álgebra elementar nos anos iniciais de nossa formação. E, em especial, no Ensino Médio, quando em alguns momentos, o professor demonstra alguns resultados relacionados ao conteúdo matemático dessa série. Em virtude dessa experiência, ficamos com a impressão que, em Matemática, os resultados (proposições) devem ser demonstrados para que tenhamos a certeza de sua validade. Já em outros ramos do conhecimento, essa verdade tem certa subjetividade que, algumas vezes, depende de um contexto ou experiência, mas que pode ser contestada numa outra situação ou por meio de um novo experimento. Porém, podemos considerar que esses “momentos” de contato com procedimentos e métodos em demonstração são raros durante nossa formação. E mesmo alguns dos alunos que ingressam na universidade para cursar uma Licenciatura em Matemática, durante sua formação profissional, não têm disciplinas (por exemplo, Introdução à Lógica, que também buscasse discutir os métodos e procedimentos utilizados nas demonstrações em Matemática e Filosofia da Matemática, que discutisse também os aspectos históricos e filosóficos presentes nesses métodos de demonstração) que contribuam para que tenham um conhecimento necessário de métodos de demonstração para um aprofundamento dos conteúdos que fazem parte das disciplinas (Elementos de Aritmética Elementar, Geometria Euclidiana, Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, Análise Real, Teoria Elementar dos Números, etc.) que compõem um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática.

Sobre questões epistemológicas e ontológicas no processo de demonstração

Para Nickerson (2010), se quisermos compreender o raciocínio matemático de uma forma global, temos de entender, pelo menos da perspectiva de nossa cultura e de nosso tempo, sobre a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos na construção dessa demonstração. Diante desses pressupostos, Nickerson estabelece e discute, não nesta ordem, algumas questões, que respondidas poderão orientar e explicitar a primeira indagação e promover um conhecimento aprofundado sobre a segunda e a terceira inquirição. As questões são: *Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração? O que constitui uma demonstração? O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração? Como as demonstrações são construídas? Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida? Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração?*

A primeira pergunta: *Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração?*

Esta questão pode ser respondida de maneira breve, isto é, que sua origem e local de nascimento são obscuros, pois há poucas evidências históricas para respondê-la. Porém, pode-se formular outra resposta, ao rememorar as conquistas matemáticas realizadas pelas antigas civilizações (egípcia, babilônica, chinesa e indiana). Diante disso, pode-se conjecturar que a origem e a noção de demonstração surgiram com o desenvolvimento da Matemática dessas civilizações? Na verdade, Joseph salienta que, houve por parte de alguns historiadores:

> Um entusiasmo excessivo para tudo que é grego, decorrente da crença de que muito do que é desejável e digno de ser imitado na civilização Ocidental teve origem na Grécia antiga, levou a uma relutância em permitir que outras civilizações antigas participassem do patrimônio histórico das descobertas em Matemática. A crença em um "milagre grego" e a maneira de atribuir quaisquer descobertas significativas em Matemática por influências gregas fazem parte dessa síndrome. E subjacente a essa visão é a crença de que a Matemática egípcia, mesopotâmica e grega era proveniente de três diferentes tradições matemáticas. (Joseph, 2011, pp. 177-178)

Uma justificativa plausível para a formação dessa crença e de uma ideologia que não permitiu que essas civilizações “participassem do patrimônio histórico das descobertas em Matemática”, podem ser evidenciadas pela dominação e subjugação de algumas nações europeias em território africano e asiático.

> A maioria das histórias de Matemática tiveram uma grande influência em obras posteriores que foram escritas no século XIX e início do século XX. Durante esse período, dois acontecimentos contrastantes ocorreram e tiveram um impacto sobre o conteúdo e o equilíbrio desses livros, especialmente, produzidos na Inglaterra e nos Estados Unidos. Excitantes descobertas de Matemática antiga em papiros no Egito e tabuletas de argila na Mesopotâmia empurram para trás as origens de registros escritos matemáticos por pelo menos 1.500 anos. Mas, uma influência muito mais forte e de compensação foi o culminar da dominação europeia na forma de controle político de vastas áreas da África e da Ásia. Fora dessa dominação surgiu a ideologia da superioridade europeia que era permeada por uma ampla gama de atividades sociais e econômicas, com vestígios que podem ser encontrados na História da Ciência que enfatizaram o papel único da Europa no fornecimento do solo e espírito para a descoberta científica. As contribuições dos povos colonizados foram ignoradas ou desvalorizadas como parte da justificativa para a subjugação e dominação. E o desenvolvimento de Matemática anterior aos gregos – especialmente no Egito e na Mesopotâmia – sofreu um destino semelhante, rejeitado como de pouca importância para a história posterior do assunto. (Joseph, 2011, p. 4)

Sem dúvida, recentes e aprofundadas pesquisas sobre a Matemática cultivada por esses povos mostram um desenvolvimento considerável de procedimentos, métodos e fórmulas aproximadas e exatas no estudo da aritmética, geometria, álgebra e astronomia. Assim, em especial, sobre a Matemática egípcia, Gillings, afirma:

> Os estudiosos da História e Filosofia da Ciência, do século XX, ao considerarem as contribuições dos antigos egípcios, inclinam-se para uma atitude moderna de que um argumento ou demonstração lógica deve ser *simbólica*, se é para ser visto como rigoroso, e que um ou dois exemplos específicos usando números selecionados não podem ser cientificamente sólidos. Mas, isso não é verdade! Um argumento não simbólico ou uma demonstração *pode* ser muito rigoroso, quando administrado para um valor particular da variável; as condições para o rigor são que o valor particular da variável deve ser *típico*, e que uma generalização adicional para *qualquer* valor deve ser

> *imediata*. Em qualquer um dos tópicos mencionados neste livro, em que o tratamento dos escribas segue tais linhas, ambos os requisitos estão preenchidos, de forma que os argumentos apresentados pelos escribas já estão *rigorosos*; as conclusões das demonstrações não são realmente necessárias, apenas confirmadas. O rigor está implícito no método.
> Nós temos de aceitar a circunstância de que os egípcios não pensaram e raciocinaram como fizeram os gregos. Se eles acharam algum método exato (pode ser que os tenham descoberto), eles não se perguntaram por que ele funcionava. Eles não procuraram estabelecer sua verdade universal por um argumento a priori simbólico, que mostraria claramente e logicamente seus processos de pensamento. O que eles fizeram foi definir e explicar em uma sequência ordenada os passos necessários para o procedimento adequado e, no final, eles adicionavam uma verificação ou prova de que as etapas descritas, na verdade, levavam a uma solução correta do problema. Esta foi a ciência como eles a conheciam, e não é adequado ou apropriado que no século XX comparemos criticamente os seus métodos com os dos gregos ou qualquer outra nação emergente posterior, que, por assim dizer, estava sobre os seus ombros. (Gillings, 1982, pp. 233-234)

Para concluir, no decorrer da História da Matemática, pode-se afirma que, em geral, não se descobrem proposições matemáticas simplesmente utilizando um procedimento puramente axiomático, ou seja, a demonstração matemática não pode ser concebida como algo pronto e acabado, pois em sua composição estão presentes os vários processos heurísticos argumentativos (intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, etc.) que contribuem para que se tenha ao final desse processo cíclico uma construção de uma demonstração organizada, lógica e rigorosa.
A segunda pergunta: *O que constitui uma demonstração?*

Consoante Nickerson (2010), as demonstrações matemáticas são relativas de várias formas. Em primeiro lugar, qualquer demonstração matemática existe dentro de algum sistema axiomático específico; em segundo lugar, a História da Matemática mostra uma gama de exemplos de demonstrações que no transcorrer do desenvolvimento da Matemática, após um período de repouso, num tempo considerável, essas demonstrações se mostraram insuficientes para uma geração ou várias gerações posteriores; em terceiro lugar, mesmo as demonstrações que são declaradas perfeitas diferem consideravelmente na sua capacidade de convencer, pois existem muitos teoremas que foram demonstrados de várias maneiras diferentes; em quarto lugar, quando se consideram perfeitas as demonstrações, elas variam também em sua simplicidade (beleza, elegância e atrativas para os matemáticos). As demonstrações deselegantes, complexas e feias, permanecem como desafios para que os matemáticos encontrarem maneiras de deixá-las esteticamente melhores; em quinto lugar, o conceito de demonstração evolui e assinala que as mudanças na ideia do que constitui uma demonstração rigorosa têm gerado revoluções na Matemática; em sexto lugar, mesmo considerando períodos históricos da Matemática, o conceito de demonstração pode ter conotações díspares em contextos diferentes. Finalmente, mesmo entre os matemáticos que concordam com as regras (estabelecidas pela comunidade matemática) que caracterizam uma demonstração, surgem controvérsias sobre a validade das demonstrações específicas. Assim, a Matemática apresentada nos periódicos é validada pela comunidade matemática mediante a crítica e a arbitragem.

A terceira pergunta: *O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração?*

Segundo Rossi (2006), em seu trabalho diário o matemático pode-se utilizar do raciocínio indutivo para elaborar as suas hipóteses matemáticas, porém não é esse procedimento que ele emprega para demonstrar essas suposições, visto que, o método de raciocínio indutivo não garante a veracidade de sua conjectura. Assim, para o matemático demonstrar suas proposições, ele utiliza o método de raciocínio dedutivo, num esquema estabelecido por estrutura axiomática incorporada à Matemática que começa com um conjunto de axiomas e definições que são explicitamente declarados e, em seguida, com base nesses axiomas e definições, os matemáticos fazem conjecturas (proposições ou teoremas) que podem ser demonstradas utilizando uma sequência de argumentos lógicos viabilizados pelas regras da Lógica que fornece de modo convincente a veracidade do resultado.

A quarta e quinta perguntas: *Como as demonstrações são construídas? Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida?*

Para responder às interrogações formuladas acima, necessita-se recorrer à Filosofia da Matemática e à Lógica Matemática, as quais serão importantes para que se estabeleçam considerações consistentes com relação aos aspectos da demonstração. Neste enfoque, a Filosofia da Matemática busca explicitar aspectos intrínsecos relacionados à demonstração matemática e as diversas correntes filosóficas procuram mostrar, dentre os diferentes enfoques epistemológicos e ontológicos, que as várias demonstrações que se apresentam nos múltiplos ramos da Matemática são capazes de fornecer um conhecimento global dessa ciência. Por outro lado, em conjunto, a Lógica Matemática tem contribuído ao abordar esse tema, pois estuda e fornece explicações racionais de padrões axiomáticos utilizados pelos matemáticos na construção de uma teoria e, em especial, em formalizar e avaliar por meio de regras de inferências quando demonstrações em Matemática podem ser construídas e consideradas validas no interior dessa área.

Nesta perspectiva, a construção de uma teoria matemática inicia-se com o estabelecimento de um sistema axiomático que comporta em sua constituição alguns elementos fundamentais: uma linguagem subjacente ao sistema axiomático; um sistema lógico; um vocabulário de palavras não definidas; um conjunto de proposições (axiomas) referente às palavras não definidas; e um conjunto de definições derivadas desse conjunto de palavras não definidas e desse conjunto de axiomas.

Assim, conforme Shoenfield (1967), em sistemas formais, a Lógica Matemática é a estrutura sobre a qual as demonstrações rigorosas são edificadas. Convém salientar que, externo à área da Lógica Matemática, os vários procedimentos utilizados nas demonstrações em Matemática quase nunca envolvem uma lógica formal. Porém, os operadores lógicos básicos (conjunção, disjunção e negação), as combinações primordiais que formam as tautologias e as contradições, método de demonstração por contradição, declarações logicamente equivalentes, declarações condicionais e as equivalências lógicas constituídas com outras declarações, declarações contrárias e contrapositivas e as combinações de sentenças declarativas condicionais estabelecem mediante a Lógica os métodos direto, contrapositivo e indireto com intuito de apresentar uma estruturação correta e rigorosa na validação das demonstrações em Matemática. Assim, para maiores detalhes veja o anexo.

A sexta pergunta: *Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração?*
Ao se percorrer a História da Matemática, em diversos momentos, pode-se observar o surgimento de comunidades matemáticas inseridas em escolas filosóficas, academias antigas, museu, escolas monásticas, escolas catedráticas, escolas palatinas, universidades e academias de ciências; de certo modo, essas comunidades matemáticas foram responsáveis pelo desenvolvimento e divulgação da Matemática e, também, em especial, a partir do século XIX, implicitamente, de definir, julgar e deliberar sobre a validade de uma demonstração. Com efeito, conforme Parshall:

> A Matemática tem uma história com elementos do contingente e do transcendente. Ao longo do século XIX, com o surgimento das nações, foi definida uma nova realidade geopolítica na Europa, a competição entre as nações se manifestou na adoção consciente dos contingentes, padrões culturais de nações vistas como as ‘mais fortes’. No caso de Matemática, esses padrões culturais conscientemente partilhados estavam centrados em ideais educacionais, no desejo de construir comunidades profissionais viáveis e

> produtivas com meios eficazes de comunicação e a convicção crescente que a reputação pessoal e nacional fosse melhor estabelecida em um cenário internacional. (Robson & Stedall, 2009, pp. 85)

Outros aspectos importantes e presentes na formação da ciência Matemática foram: a estruturação, a organização e uma linguagem única em nível internacional professada pelas várias comunidades matemáticas. Realmente, consoante Parshall:

> Neste contexto, a Matemática também se tornou cada vez mais uma 'linguagem falada' e um esforço desenvolvido em nível internacional, isto é, entre os matemáticos das diferentes nações. Por exemplo, no final do século XIX e XX, um estilo italiano de geometria algébrica com seu próprio método muito idiossincrático de formação de teorema e de demonstração – a linguagem da geometria algébrica que essencialmente somente italianos falavam – desenvolvida no contexto de uma recém-unida nação-estado italiana procurando demonstrar a sua competitividade na arena internacional matemática e em paralelo com a tradição alemã muito diferente. Em meados do século XX, no entanto, após o advento da álgebra moderna, com sua abordagem estrutural e organização de matemática, geômetras algébricos quer nas Ilhas Britânicas, Alemanha ou Itália, ou nos Estados Unidos, China ou Japão falavam praticamente a mesma, nacionalmente transcendente, linguagem matemática e abordando importantes problemas em aberto, tal como reconhecidos por todos. (Robson & Stedall, 2009, pp. 85-86)

Além disso, segundo Parshall in Robson e Stedall (2009), outros aspectos importantes à consolidação das comunidades matemáticas são a fundação em 1920, da União Internacional de Matemática (IMU), a internacionalização de periódicos especializados na difusão do conhecimento matemático, a institucionalização em 1897 do Congresso Internacional de Matemáticos, a premiação com a medalha Fields, em 1936, em reconhecimento ao(s) excelente(s) trabalho(s) matemático(s) desenvolvido(s), o estabelecimento de agendas de pesquisas para os vários ramos da Matemática e a consolidação de uma linguagem matemática em nível internacional.

Considerações

Ao replicar e analisar as perguntas e as respostas, formuladas por Nickerson, relacionadas sobre a natureza da demonstração matemática, buscou-se a elaboração de um referencial teórico que contribuísse para uma melhor compreensão sobre os processos envolvidos na organização, construção e formalização dessa demonstração. Além disso, para completar as indagações daquele autor, optou-se por uma orientação histórica, filosófica e matemática que possibilitou uma reflexão aprofundada sobre o tema. Desse modo, ao responder a primeira questão, ficou evidente que, no processo de demonstrar uma proposição matemática, estão implícitos alguns procedimentos heurísticos argumentativos (intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, etc.) que cooperam em sua organização lógica. A resposta à segunda questão sancionou que as demonstrações em Matemática possuem existência no interior de um sistema axiomático específico e as demonstrações que são declaradas perfeitas diferem em sua capacidade de convencer. A evolução para a constituição de uma demonstração rigorosa promove revoluções na Matemática e, a comunidade matemática, mediante críticas e arbitragens, legitima as demonstrações em periódicos especializados. As indagações suscitadas ao responder a quarta e quinta questões sinalizam a importância da Filosofia da Matemática para estabelecer considerações consistentes com relação aos aspectos ontológicos e epistemológicos presentes na demonstração e, em conjunto, a Lógica Matemática estabelece e fornece métodos rigorosos de demonstração com intuito de apresentar a validação das demonstrações em Matemática. Por fim, o próximo objetivo desta pesquisa é investigar quais são as concepções dos alunos de um curso de graduação em Matemática sobre alguns aspectos da demonstração.

Referências bibliográficas

Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. New York: Dover.

Joseph, G. G. (2011). *The crest of the peacock: non-European roots of mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Nickerson, R. S. (2010). *Mathematical reasoning: patterns, problems, conjectures, and proofs*. New York: Psychology Press, Taylor & Francis Group.

Robson, E., & Stedall, J. (2009). *The Oxford of the History of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical Logical*. Reading: Addison-Wesley.

Anexo

Sejam P e Q declarações, a declaração "P e Q" é denominada a *conjunção* daquelas declarações e simbolicamente representa-se por $P \wedge Q$; a declaração "P ou Q" é denominada a *disjunção* e representa-se por $P \vee Q$; e a declaração "não P" é denominada a *negação* e representa-se por $\neg P$. Ao construir as tabelas verdade da conjunção, da disjunção e da negação encontram-se declarações que são sempre verdadeiras (tautológicas) e as que são sempre falsas (contraditórias). Por exemplo, $P \vee \neg P$ e $\neg(P \wedge Q) \vee (P \vee Q)$ são tautologias; $P \wedge \neg P$ é uma contradição. Em geral, segundo Rossi (2006), demonstra-se que se P é uma declaração, T uma tautologia e C uma contradição, então $P \vee T$ é uma tautologia, e $P \wedge C$ é uma contradição. As declarações tautológicas e contraditórias desempenham um papel fundamental em Matemática. Em especial, o método de demonstração por contradição, também denominado demonstração indireta ou por *reductio ad absurdum* utiliza-se essa ideia.

Duas declarações são logicamente equivalentes quando têm tabelas verdade idênticas. Por exemplo, $\neg P \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$, P e $\neg(\neg P)$, $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$, $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$, as leis de De Morgan: $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$, $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ são logicamente equivalentes.

Em geral, quando se trata de demonstrar proposições, em Matemática, essas declarações são expressas da seguinte forma "a declaração ou função proposicional P implica a declaração ou função preposicional Q", denotada por $P \rightarrow Q$. Assim, considerando (H) hipótese e (C) conclusão, uma proposição condicional pode ser enunciada das seguintes formas: "se H, C"; "C se H"; "H somente se C"; "C desde que H"; "assumindo que H, então C"; "C dado que H"; "H é suficiente para C"; "C é necessário para H". Desse modo, podemos definir a declaração contrária e a contrapositiva de $P \rightarrow Q$, respectivamente, como $Q \rightarrow P$ e $\neg Q \rightarrow \neg P$ e demonstrar que $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ são logicamente equivalentes. Além disso, podemos demonstrar o teorema "se P e Q são declarações, então $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$" e seu corolário "se P e Q são declarações, então $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$". Utilizando a sentença declarativa condicional $P \rightarrow Q$ podemos demonstrar proposições pelos métodos direto, contrapositivo e indireto. O primeiro método, conforme Rossi (2006), segue o seguinte padrão:

> Dado um teorema da forma $H \rightarrow C$, uma demonstração direta de $H \rightarrow C$ começa com o pressuposto das hipóteses do teorema. Valendo-se das hipóteses, é construída uma

sequência de declarações lógicas que conduz à conclusão do teorema. Quando a sequência de argumentos lógicos que conduzem valendo-se das hipóteses (H) para a conclusão (C) for válida, então o teorema terá sido demonstrado com uma demonstração direta. Um diagrama de uma demonstração direta normalmente segue o padrão $H \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to \cdots \to C$ em que H conduz a uma conclusão C_1, C_1 conduz à conclusão C_2, e assim sucessivamente até que C, a conclusão desejada, seja alcançada. Este método de demonstração direta é denominado a abordagem direta para frente. Note-se que uma demonstração direta para frente começa assumindo que a hipótese (H) é verdadeira e então prossegue para frente, com uma sequência de argumentos lógicos que conduz à conclusão (C). (Rossi, 2006, p. 51-52)

O segundo método, consoante Rossi (2006), segue o seguinte padrão:

Recorde-se que, sempre que "Se H, então C" é um teorema, então a contrapositiva para esse teorema é também um teorema; isto é, cada teorema "Se H, então C" tem um teorema dual "Se não C, então não H", que também é verdadeiro. Além disso, se uma demonstração de "Se C não é verdadeira, então H não é verdadeira" for encontrada, então isso é equivalente a demonstrar "Se H é verdadeira, então C é verdadeira". Assim, um segundo método de demonstração direta que pode ser usado para demonstrar "Se H é verdadeira, então C é verdadeira" é demonstrar a contrapositiva desse teorema: "Se não C, então não H". Demonstrar um teorema $H \to C$, demonstrando sua contrapositiva é denominado uma *demonstração por contrapositiva*. Note-se que o método de demonstração por contrapositiva também é outro método de demonstração direta e, muitas vezes, é usado quando uma demonstração direta para frente de um teorema não pode ser encontrada.
Agora, uma demonstração por contrapositiva começa com o pressuposto de que a conclusão do teorema é falsa, em vez de iniciar com as hipóteses do teorema. Com base na negação da conclusão (ou seja, $\neg C$), uma prova direta da negação das hipóteses $(\neg H)$ é desejada como se segue. Uma típica demonstração por contrapositiva começa com o $\neg C$, o que conduz a uma conclusão C_1, o que conduz a uma conclusão C_2, e assim sucessivamente até que possa concluir que a hipótese H é falsa. (Rossi, 2006, p. 56)

O terceiro método, conforme Rossi (2006), segue o seguinte padrão:

Uma demonstração indireta do teorema "Se H é verdadeira, então C é verdadeira", começa por assumir que a hipótese (H) é verdadeira e a conclusão (C) é falsa. Trabalhando com base nessas duas declarações, uma sequência de conclusões lógicas é seguida até que uma contradição se desenvolva. Lembre-se que a contradição é uma declaração que é sempre falsa.
Agora, trabalhando valendo-se de H e $\neg C$, uma contradição comprova o teorema $H \to C$ mostrando que $H \wedge \neg C$ é sempre falsa, e desde que $H \wedge \neg C$ é logicamente equivalente a $\neg(H \to C)$(por $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$), segue-se que a negação do teorema também é falsa. Agora, se a negação do teorema é sempre falsa, então se tem o caso que o teorema é sempre verdadeiro. Assim, o método de demonstração por contradição comprova $H \to C$, demonstrando que $\neg(H \to C)$ nunca pode ser verdadeiro. (Rossi, 2006, pp. 58-59)

Por fim, além desses métodos de demonstração explicitados anteriormente, existem outros métodos especializados de demonstração, que decorrem dos já citados, que são comuns em Matemática. Em especial, esses métodos são utilizados nas demonstrações por casos, por indução, de existência e de unicidade.