

## ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA LINEAR E TECNOLOGIAS DIGITAIS: PERSPECTIVAS DE EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA NO SOFTWARE GEOGEBRA

Andriceli Richit – Maria Margarete do Rosário Farias – Rosana Giaretta Sguerra  
Miskulin – Lêda Ferreira Cabral  
andricelirichit@gmail.com – margarete333@hotmail.com – misk@rc.unesp.br –  
ledafcabral@hotmail.com  
UNESP - Rio Claro, SP, Brasil

Tema: Formação e Atualização de Professores

Modalidade: MC

Nível educativo: Formação de Professores de Matemática

Palavras-chave: Álgebra Linear. Tecnologias Digitais. Software GeoGebra. Exploração Matemática.

### Resumo

*A Álgebra Linear é notadamente uma área da Matemática ligada a diferentes domínios, como sistemas de equações lineares, a geometria, aritmética, estudo das quádras, as transformações lineares, etc (Celestino, 2000). Além disso, constitui parte importante dos conteúdos matemáticos ensinados em cursos iniciais no âmbito da Universidade, sendo reconhecida como uma disciplina fundamental por matemáticos ou outros cientistas que a ela recorrem como ferramenta. Contudo, atualmente é ausente o êxito de grande parte dos estudantes no estudo de Álgebra Linear. Acrescentamos a este fato, os métodos de ensino e os recursos utilizados para promover a aprendizagem dos estudantes, os quais falham em propiciar a eles uma ideia que os façam reconhecer, compreender e aperfeiçoar suas visões e habilidades concernentes ao estudo do assunto aprendido para que possam atingir a construção do conhecimento em um nível mais abstrato (Harel, 1990). Assim, a introdução das tecnologias digitais aos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra Linear traz contribuições no sentido de ampliar compreensões mais abstratas partindo de situações mais concretas, pautadas no aspecto visual e experimental possibilitado por softwares. Buscamos assim, com este minicurso, aproximar e discutir junto a eles, conceitos pilares de Álgebra Linear e suas possibilidades de abordagens no software GeoGebra.*

### Introdução

Neste artigo, primeiramente, tecemos algumas considerações a respeito dos processos de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear e suas problemáticas, e na sequência contextualizamos um panorama de pesquisas que enfocam a investigação de conceitos inerentes a Álgebra Linear articuladas às tecnologias digitais. Nesse sentido, enfatizamos por meio das pesquisas as potencialidades advindas da utilização das tecnologias digitais e suas contribuições para os processos de experimentação e visualização na direção da construção de conhecimento em Álgebra Linear. Entendemos assim que os recursos das tecnologias digitais removem o fardo de manipulação

algébrica inerente a Álgebra Linear e propicia elementos essenciais para pensar matematicamente. No entanto, a utilização das tecnologias digitais na abordagem de conceitos de Álgebra Linear não é uma condição simples, e requer que o professor conheça os recursos específicos do software ou tecnologia a ser utilizada e elabore atividades de natureza investigativa que propiciem a aprendizagem. Sendo assim, a proposta de oficina ora apresentada busca (a) promover aos participantes familiarização ou ampliação de recursos do software GeoGebra e (b) engajá-los em um contexto de investigação matemática em Álgebra Linear com o software GeoGebra.

### **1. Álgebra Linear: Histórico, Processos de Ensino-Aprendizagem, Problemáticas e articulação as Tecnologias Digitais**

O movimento de constituição da Álgebra Linear, principiou aproximadamente no século XVIII quando Leibniz sentiu a necessidade de uma linguagem não geométrica que possibilitasse modos de expressar, além de magnitudes e números indeterminados, ângulo, posição e direção de movimentos, a partir de representações que não fossem de natureza geométrica. Uma tentativa inicial de Leibniz para a criação desta linguagem ainda era fortemente dependente da Geometria (Andrade, 2010). Assim, avançando com os estudos, Leibniz buscava um conjunto de símbolos que fosse capaz de representar simbolicamente entidades geométricas. Sobre isso, Coimbra (2008) nos diz que:

Álgebra Linear teve várias origens. Algumas delas têm ligação com a geometria e outras não têm uma ligação especial com a geometria, como o estudo dos sistemas de equações lineares. A origem “mais” geométrica da álgebra linear parece ser o trabalho de Leibniz. Ele criticou os métodos analíticos de Descartes e Fermat e tentou elaborar um cálculo geométrico que permitiria calcular diretamente dos objetos geométricos. Leibniz não alcançou seu objetivo, mas abriu uma nova linha de pesquisa. Mais de um século mais tarde, Grassmann desenvolveu uma teoria em seu livro: *Die lineali Ausdehnungslehre*, que foi sua própria pesquisa de um cálculo geométrico. Sua teoria é muito geral e abstrata, e fornece muito mais do que cálculo geométrico. Mas a despeito de sua generalidade, a origem geométrica está muito presente (p. 43).

Segundo Coimbra (2008), Grassmann criou uma teoria com características bastante gerais que podem ser observadas na moderna Álgebra Linear. Muitos outros matemáticos como Maurice Fréchet, Frédéric Riesz, Erhard Schmidt, Norbert Wiener, Hans Hahn e Stefan Banach entre tiveram uma importante contribuição no movimento de construção da Álgebra Linear enquanto ramo da Matemática.

Deste modo, a própria história da Álgebra Linear nos mostra o quanto foi difícil a instauração de uma simbologia que facilitasse algumas operações, sendo muitas vezes incompreendidas até mesmo pelos próprios matemáticos da época, que demoraram a perceber seu objeto próprio cujas ideias poderiam ser aplicadas a outras áreas concernentes a matemática.

Assim, a Álgebra Linear é um ramo da Matemática que estuda os espaços vetoriais e as transformações entre eles e está presente em vários cursos relacionado as ciências exatas, como nas engenharias e Matemática. Para Grande (2006), a Álgebra Linear ainda possui como característica marcante, a possibilidade de unificar o pensamento matemático propiciando o desenvolvimento da abstração e generalização e “constitui-se em uma porta de entrada ao desenvolvimento do pensamento matemático elaborado e formal (Andrade, 2010, p. 20)”. Para os estudantes da Matemática, a Álgebra Linear representa a primeira grande incursão destes no âmbito da abstração e nem sempre se constitui em uma passagem simples.

Nessa direção, a instauração dessa simbologia que foi extremamente importante para o desenvolvimento da Álgebra Linear é hoje, motivo de obstáculos e dificuldades de natureza epistemológica (Coimbra, 2008, Andrade, 2010).

Doerr (2004) enfatiza que os últimos trinta anos de pesquisa em Educação Matemática têm resultado em um corpo sólido de pesquisas sobre conceitualizações teóricas acerca do significado da Álgebra na escola, sobre a aprendizagem da Álgebra pelos estudantes e sobre como a aprendizagem dos estudantes pode ser influenciada pelas tecnologias digitais. Os resultados de tais pesquisas promoveram algumas mudanças nos currículos escolares em diferentes níveis, mas, no entanto, algumas pesquisas que tratam da aprendizagem da Álgebra tem tido impacto limitado nas escolas.

Para a autora, as pesquisas realizadas no âmbito da aprendizagem de Álgebra têm como foco a natureza algébrica das tarefas matemáticas, o desenvolvimento de ideias pelos estudantes e, em alguns casos, tratam da influência da tecnologia, mas com pouca frequência o foco dos estudos dessas pesquisas estão nos professores, na natureza e no desenvolvimento do seu conhecimento e da sua prática de ensino. Ainda nessa direção, Celestino (2000) reitera que algumas “pesquisas desta área procuram levantar os obstáculos epistemológicos e/ou sugerem uma abordagem alternativa, visando facilitar a construção e apreensão de conceitos pelo estudante de Álgebra Linear (p. 89)” e estas

constituem-se no foco das pesquisas desenvolvidas. Entretanto, o autor supracitado pontua que evidências relacionadas as dificuldades dos alunos com esta disciplina vem se mostrando há algum tempo mas o desenvolvimento de pesquisas enfocando o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear são relativamente recentes. Salienta ainda, que os primeiros estudos enfocando o Ensino Superior concentravam-se na área de Cálculo Diferencial e Integral conforme salientam Tall, Smith e Piez (2008).

Algumas iniciativas a nível mundial foram desenvolvidas nesse sentido. As investigações relacionadas aos processos de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear ganharam força nos Estados Unidos em 1990 com a criação do Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG). Na Europa, em específico na França, mais ou menos no mesmo período, algumas investigações enfocando a didática da Álgebra Linear começaram a aparecer. No Brasil, pesquisas nessa direção foram realizadas por um grupo da UNICAMP- Campinas fazendo um levantamento da evasão e reprovação nesta disciplina. Contudo, ainda são tímidos os trabalhos que apontam avanços no sentido de impactar a disciplina e remover um pouco do fardo de manipulação algébrica presentes nesta disciplina e que mostram estratégias de abordagem dos conceitos capazes de construir significados.

Assim, grande parte das dificuldades inerentes a Álgebra Linear reside no fato de os alunos desenvolverem habilidades de manipulação algébrica mas nem sempre conseguirem construir um entendimento dos conceitos pois “a variedade de linguagem e símbolos presentes em seu contexto escolar requer diferentes modos de pensamento para sua compreensão (Andrade, 2010, p. 23)”.

No que tange as linguagens, Hillel et al (1999) citado por Andrade (2010) identificam três diferentes linguagens – a aritmética, a algébrica e a geométrica sendo estas intrínsecas aos modos de pensamento - analítico aritmético, analítico estrutural e sintético geométrico os quais possibilitam ao estudante diferentes perspectivas sobre um mesmo conceito sendo estas responsáveis pela ampliação ou restrição da profundidade da compreensão do estudante de acordo com as situações por ele vivenciadas (Hillel et al, apud Andrade, 2010).

Nesse sentido, compreendemos que essa variedade de linguagens só é articulada quando há uma mobilização de diversas representações a qual é propiciada por softwares de Geometria Dinâmica, os quais possibilitam manipular diferentes representações.

Ademais, ao utilizarmos recursos das tecnologias digitais no âmbito educacional, o foco dos processos de ensino e aprendizagem não está somente nos procedimentos utilizados para solucionar determinado problema, mas, também, na aprendizagem visto que a utilização dos recursos das tecnologias digitais pode conduzir os estudantes a modos diferentes de pensar e produzir conhecimentos. Esses conhecimentos podem ser favoráveis à compreensão destes e envolvem aspectos como a visualização, a simulação, o aprofundamento do pensamento matemático, conjecturas e validações por parte dos alunos, entre outros.

Scucuglia (2006) aponta que o processo de experimentação e investigação é mais evidente em contextos que se fazem presentes recursos informáticos. A este respeito, o autor supracitado evidencia que

Pautando-se nessa abordagem de caráter experimental, condicionada por potencialidades das tecnologias informáticas, estudantes podem investigar temas matemáticos com base em argumentações que privilegiam as inferências abduativas, isto é, um enfoque que potencializa a abordagem dos conceitos a partir desses diversos tipos de inferências e que é ressonante com disciplinas de caráter empírico, sendo assim indicada a estudantes de cursos de física, ciências biológicas, química, ecologia, etc (p.109).

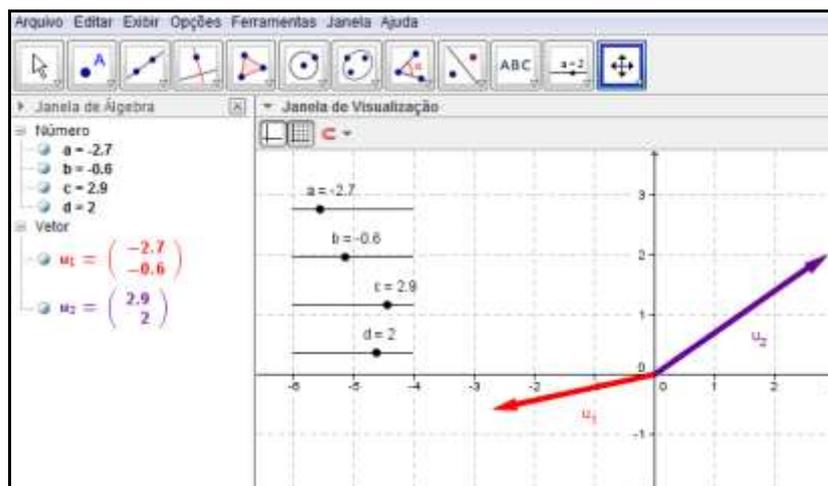
Sobre as contribuições de softwares para os processos de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, Andrade (2010) pontua que:

O uso de abordagens com registros geométricos para a aprendizagem de objetos matemáticos como os de Álgebra Linear são sugeridos por permitir a visualização diferentes características dos objetos não perceptíveis em outros tipos de registros como os de natureza algébrica (p. 32).

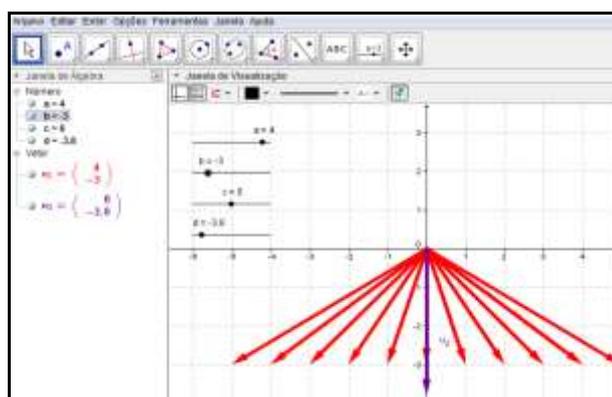
Nesse viés, entendemos que a utilização de recursos tecnológicos (como o software GeoGebra, entre outros) na abordagem de conceitos de Álgebra Linear permite que a natureza geométrica inerente a Álgebra Linear seja resgatada, e que seja menos enfatizada a abordagem algébrica. Podemos observar, que ao longo dos anos, não houveram mudanças substanciais na forma como grande parte dos conceitos de Álgebra Linear são abordadas. A abordagem de tais conceitos, ainda pauta-se em tecnicidades, formalismo e rigor, aspectos estes que distanciam e muito da forma como estes conceitos foram constituídos e formalizados. Contudo,

[...] as possibilidades advindas do uso de tecnologias no ensino e aprendizagem de matemática têm alavancado muitas pesquisas e, com isso, estratégias pedagógicas diferenciadas têm emergido, revelando peculiaridades nas formas de produzir matemática e conhecimento usando esses recursos. Nesse sentido, avaliamos que recursos tecnológicos que permitem representações múltiplas de conceitos matemáticos, como o software *GeoGebra*, podem ampliar e aprofundar a abordagem de conteúdos nessa disciplina na medida em que fomentam a articulação entre as distintas formas de representá-los (Richit, Richit e Tomkelski, 2009, p.2).

Com o intuito de elucidar as potencialidades do software GeoGebra no processo de compreensão de conceitos matemáticos, apresentamos uma possibilidade do mesmo ao estudar o conceito de vetores e suas propriedades. O software GeoGebra possibilita uma ferramenta poderossíssima que é o trabalho com parâmetros, permitindo assim trabalhar de maneira dinâmica. Suponhamos que exista um parâmetro  $a$  e um parâmetro  $b$ , sendo estes as coordenadas de um vetor  $u_1$ . Do mesmo modo, tomemos um vetor  $u_2$  expressos por coordenadas representadas pelos parâmetros  $c$  e  $d$ . A figura abaixo representa a situação descrita.



Se lançarmos mão do recurso animar do GeoGebra, poderemos visualizar a potencialidade de representação dinâmica dela. Produzindo uma animação no parâmetro  $a$ , o vetor  $u_1$  terá fixa a coordenada  $b$  e variável a coordenada  $a$ , mostrando os distintos vetores que teremos:



Além disso, operações entre esses vetores podem ser realizadas, como soma, diferença, produto, multiplicação por escalar, possibilitando que o estudante articule as diferentes representações e compreendendo geometricamente o que aqueles procedimentos algébricos que ele realiza representam.

## 2. Características Metodológicas da Oficina

O desenvolvimento da oficina aqui proposta dar-se-á em Laboratório de Informática (sendo este equipado com 20 computadores, data show e software GeoGebra instalado) e no máximo 20 participantes poderão participar da mesma, podendo os participantes serem alunos da Licenciatura/Bacharelado em Matemática, professores da Educação Básica ou Ensino Superior.

Principiaremos a oficina com a apresentação do software GeoGebra e suas respectivas funcionalidades. Prosseguindo, desenvolveremos junto aos participantes uma atividade para familiarização dos mesmos com o Software GeoGebra e prosseguiremos com atividades envolvendo alguns conceitos concernentes a Álgebra Linear como Vetores e suas operações, Combinação Linear, Dependência e Independência Linear, Transformações Lineares. Deste modo, durante o desenvolvimento da oficina trabalharemos numa perspectiva de exploração de tais conceitos lançando mão do software GeoGebra.

## 3. Referências

- Andrade, J. P. G (2010). *Vetores: interações à distância para aprendizagem de Álgebra Linear*. Dissertação ( Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
- Celestino, M. R (2000). *Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação ( Mestrado em Educação Matemática) — Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, PUC-SP, São Paulo, Brasil.
- Coimbra, J. L (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Belém/PA, Brasil.
- Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 267 - 290). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Harel, G. (1989). Applying the Principle of Multiple Embodiments in Teaching Linear Algebra: Aspects of Familiarity and Mode of Representation. *School Science and Mathematics – Vol. 89* (1).
- Richit, Andriceli. *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de

- Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- Richit, Andriceli ; Richit, Adriana ; Tomkelski, M. L.(2009). *Representações Matemáticas e Algébricas no Software GeoGebra*. In: VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 2009, Puerto Montt. Anais do VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. v. 01. p. 2078-2083.
- Scucuglia, R. *A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- Tall, D, Smith, D. & Piez, C. Technology and Calculus. In M. Kathleen Heid & Glendon M Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*, Volume I: Research Syntheses, (pp. 207-258).