

WP-MRM01: ERRORES EN LA TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN DOMINÓ ALGEBRAICO¹

RODRÍGUEZ-DOMINGO, Susana

Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ESPAÑA



CAÑADAS, María C.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ESPAÑA



MOLINA, Marta

Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ESPAÑA



CASTRO, Encarnación

Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ESPAÑA



RESUMEN

Este trabajo forma parte de una investigación cuyo principal objetivo es indagar sobre la capacidad de los estudiantes de educación secundaria para traducir y relacionar enunciados algebraicos en los sistemas de representación simbólico y verbal. La recogida de datos se realizó con 26 estudiantes de entre 14 y 16 años.

La recogida de información se realizó a través de la construcción de un dominó algebraico, diseñado para esta investigación y, el uso en un torneo del dominó realizado. En esta comunicación presentamos un análisis de los errores en los que incurren los estudiantes en dichas traducciones (de simbólica a verbal y viceversa) atendiendo al tipo y frecuencia de cada error y el enunciado algebraico en el que se produce. Para la distinción de los tipos de errores, construimos una categorización a partir investigaciones previas. Entre los resultados obtenidos, destacamos que los estudiantes encontraron mayor facilidad al traducir enunciados desde la representación simbólica a la representación verbal y que la mayoría de los errores identificados al traducir de la expresión verbal a la simbólica son derivados de las características propias del lenguaje algebraico. Por último, presentamos las diferencias observadas entre los errores identificados en ambas fases de esta investigación

Palabras clave: enunciados algebraicos; errores; juego; representación simbólica; representación verbal; traducción entre sistemas de representación.

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de segundo ciclo de educación secundaria tienen dificultades para relacionar el lenguaje verbal y el simbólico (Arcavi, 1994; Bednarz, Kieran y Lee, 1996) . Esto dificulta, entre otros aspectos, la resolución de problemas que requieren del uso del lenguaje algebraico. Conocer los errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico puede ayudar en el estudio de la adquisición del simbolismo algebraico y de la resolución de problemas que involucren al álgebra.

Las dificultades que evidencian los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y la destacada presencia de contenidos algebraicos en el currículo de educación secundaria, a nivel internacional, hacen que este campo sea de gran interés para la investigación en Educación Matemática. Investigadores como Arcavi (1994), Bednarz et ál. (1996) o Kaput (2000) han planteado la problemática existente en la adquisición de dominio y comprensión del lenguaje algebraico. Estudios centrados en la categorización de los errores en los que incurre el alumnado en el estudio del álgebra (Palarea, 1998; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Socas, 1997) dejan abiertas algunas parcelas por investigar. Se he explorado el papel de la escritura verbal en

el aprendizaje del álgebra (MacGregor, 1990; Wollman, 1983) pero apenas existen estudios sobre la traducción de enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólica. El análisis de los procesos de traducción en los dos sentidos pueden ser de utilidad para profundizar en la comprensión que poseen los estudiantes del lenguaje simbólico e indagar sobre las dificultades que tienen para escribir simbólicamente sentencias matemáticas enunciadas de forma verbal.

OBJETIVOS

El objetivo general de la investigación a la que nos referimos es *analizar el proceso de traducción que realizan estudiantes de educación secundaria entre los sistemas de representación verbal y simbólico, de enunciados generales de relaciones numéricas*. Este objetivo se concreta en tres objetivos específicos: (a) construir un instrumento que permita explorar el proceso de traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal, al no haberse encontrado en la literatura consultada ningún otro que permitiera este fin; (b) analizar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar dichas traducciones; y (c) describir las relaciones que los estudiantes ponen de manifiesto entre representaciones verbales y simbólicas de un mismo enunciado algebraico, así como las explicaciones que dan a las mismas.

REFERENTES TEÓRICOS

Los tres elementos teóricos claves en esta investigación son: (a) álgebra, (b) sistemas de representación y (c) errores y dificultades en el álgebra. Las relaciones entre estos elementos así como su consideración en el contexto del juego fundamentan este trabajo. En la Figura 1 representamos un esquema que refleja estos elementos.

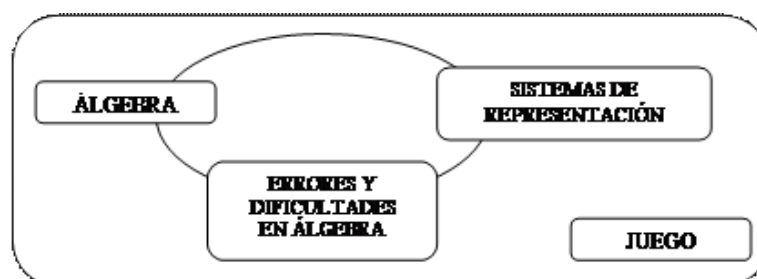


Figura 1. Ideas clave del marco teórico

Una revisión bibliográfica en torno a la concepción del álgebra permite percibir la evolución de la misma a lo largo del tiempo, su conexión con la generalización (Bednarz et ál. 1996; Kaput, 2000), su consideración como lenguaje y su destacada utilidad para la resolución de problemas (Fernández, 2001; Kieran y Filloy, 1989). Dentro del contexto algebraico, nos centramos en los *enunciados que establecen relaciones generales entre cantidades, algunas de ellas desconocidas*, a los que denominamos *enunciados algebraicos*.

Para profundizar sobre las nociones de representación y sistemas de representación nos hemos centrado principalmente en los trabajos realizados en el seno del Grupo "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (FQM-193). En este contexto, prestamos atención a las representaciones externas, pues son las que se pueden observar en el trabajo de los estudiantes. Consideramos que un sistema de representación es el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática y que sigue cierta sistematización (Castro y Castro, 1997; Rico, 1997).

En lo que concierne a los errores y las dificultades de los estudiantes en el estudio del álgebra, partimos de la idea de que los errores provienen de esquemas cognitivos inapropiados (Matz, 1980; Socas, 1997). Pese a que todos incurrimos en errores, éstos suelen tener connotaciones negativas en la escuela y parece ser que más en matemáticas. Rico (1995) reivindica el error como una posibilidad permanente para la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Algunos estudios (Clement, Lochhead y Monk, 1981; Wollman, 1983) determinan fuentes de error en la traducción de enunciados algebraicos verbales en su representación simbólica. Socas (1997) determina tres grandes categorías para los errores según su origen: (a) obstáculo, (b) ausencia de sentido y (c) actitudes afectivas y emocionales. En un trabajo más reciente y con base en el trabajo de Socas, Ruano et ál. (2008) estudian procesos específicos en los que se hace uso del lenguaje algebraico (sustitución formal, generalización y modelización), identificando los tipos de errores en los que incurren los estudiantes. Los autores identifican algunos errores recurrentes relacionados con la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Partiendo de la categorización presentada por los

autores citados hemos elaborado la categorización de errores empleada en el análisis de los datos de esta investigación.

El juego es el contexto en el que se lleva a cabo nuestra investigación, creemos que el juego fomenta el aprendizaje y la motivación en el alumnado. Algunos autores establecen que el juego se manifiesta como una forma natural de la actividad humana (Castro, Olmo y Castro, 2002; De Guzmán, 1984). Los principios pedagógicos de Moyles (1990) establecen que el juego no es la antítesis de trabajo, sino que ambos forman parte de las actividades de los individuos en la vida; y que el juego es potencialmente un excelente medio de aprendizaje. Los estudiantes participantes en esta investigación tienen una falta de motivación considerable para trabajar y aprender, razón por la cual el juego cobra especial relevancia en la recogida de datos de este trabajo.

MARCO METODOLÓGICO

Seleccionamos una muestra intencional de 26 estudiantes de entre 14 y 16 años. Los contenidos que se trabajan en esta asignatura están orientados a dar formación matemáticas a los estudiantes que se prevé finalicen sus estudios con ese curso o que desean cursar en bachillerato la opción de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Los estudiantes pertenecían a tres grupos diferentes a los que la primera autora impartía clase durante el curso académico 2010-2011. El nivel socio-cultural y académico de estos sujetos era bajo, el lugar donde se encuentra el centro educativo es conflictivo y los estudiantes, por lo general tienen poco interés tanto por ir a clase como por estudiar. En cuanto a la situación académica de los 26 estudiantes, 6 repetían 4º curso y la mayor parte del resto tenían alguna asignatura de matemáticas de cursos anteriores sin aprobar. Para preservar el anonimato de los estudiantes, éstos fueron identificados mediante un número, asignado aleatoriamente, y una letra que representa el grupo de 4º de ESO del que es alumno. Por ejemplo, el estudiante 3B es el estudiante 3 del grupo B.

Antes de la aplicación del instrumento de recogida de datos, estos estudiantes habían trabajado en clase el bloque de aritmética y parte del bloque de álgebra. En concreto habían trabajado los siguientes temas: (a) números enteros y racionales, (b) números decimales, (c) números reales, (d) problemas aritméticos, (e) expresiones algebraicas y (f) ecuaciones e inecuaciones. Posteriormente, continuaron con el tema de sistemas de ecuaciones para finalizar el bloque de

álgebra y el resto de bloques de contenidos (geometría y estadística y probabilidad). En el bloque de álgebra, antes de utilizar el instrumento de recogida de información, los alumnos trabajaron el lenguaje algebraico y la traducción de enunciados, principalmente del sistema de representación verbal al simbólico.

RECOGIDA DE DATOS

Las características del alumnado hicieron necesario utilizar un instrumento de recogida de datos que despertase su interés, por lo que planteamos un instrumento en forma de juego. Elegimos el dominó debido a que los estudiantes estaban familiarizados con el mismo.

La profesora de los estudiantes (primera autora de este trabajo) recogió la información en dos fases:

- Construcción del dominó: fase individual donde los estudiantes tenían que traducir por escrito algunos enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico, y
- Torneo: fase realizada en grupos en la que se pretendía observar las relaciones que establecían los estudiantes al emparejar distintas representaciones de un mismo enunciado algebraico. Esta segunda fase tiene las características de una entrevista clínica no estructurada donde a los estudiantes se les planteó una situación y se les dejó actuar bajo unas reglas establecidas, interviniendo únicamente si alguna regla era incumplida o se requería la repetición de alguna idea.

En la primera fase nuestro interés se centra en analizar los errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico². Para el diseño de esta fase revisamos el trabajo previo que habían realizado los estudiantes, a través del libro de texto y de entrevistas con la profesora. Esto permitió determinar las relaciones numéricas que habían manejado los sujetos: la suma y resta de números, la multiplicidad y divisibilidad, potencias, raíces cuadradas, números consecutivos, pares e impares. Decidimos diseñar 12 enunciados que los estudiantes tenían que traducir de un sistema de representación a otro. Para que hubiera un equilibrio, 6 estaban expresados verbalmente y los otros 6 simbólicamente.

Las relaciones numéricas son la primera variable de tarea considerada. Identificamos tres grupos de relaciones numéricas: aditivas, multiplicativas y

potencias. Considerando las diferentes combinaciones, seleccionamos una relación solo multiplicativa, otra solo aditiva y otra solo de potencia, y los otros tres como combinaciones de los anteriores, tal y como recoge la Tabla 1.

	Aditivo	Multiplicativo	Potencia
Aditivo	x	x	x
Multiplicativo		x	x
Potencia			x

Tabla 1. Relaciones entre los enunciados

Otras variables de tarea fueron:

- el tipo de número: decidimos trabajar sólo con números naturales;
- número de variables en la expresión: la mitad contaban solo con solo una variable y la otra mitad dos variables;
- la mitad de los enunciados son abiertos y la otra mitad cerrados. Entendemos por "enunciado cerrado" aquel que establece una igualdad entre enunciados, es decir, que equivale a una ecuación;
- la mitad de los enunciados verbales son secuenciales y la otra mitad no. Entendemos por "enunciado secuencial" aquel cuya lectura corresponde con la escritura de la expresión algebraica de izquierda a derecha.

En la Tabla 2 presentamos los doce enunciados propuestos. En la primera columna se incluyen los enunciados que fueron presentados verbalmente a los estudiantes para que los tradujeran al lenguaje algebraico, y en la segunda columna los enunciados propuestos en representación simbólica para que los tradujeran a su representación verbal.

Representación verbal	Representación simbólica
Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$x+(x+1)-4$
El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4.\left(\frac{x}{2}\right)=2x$

El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número	$(\sqrt{x})^y$
Un número par menos la cuarta parte de otro número	$x.(x+1)=7x$
El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$x_2-y_2=11$
Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo	$(x.y)^3$

Tabla 2. Enunciados para traducir en la primera fase

A partir de estos enunciados elaboramos unas fichas de dominó incompletas, simulando una partida ya jugada, que los estudiantes debían cumplimentar de forma que fueran correctos los emparejamientos de fichas establecidos (ver Figura 2). Como se observa en la Figura 2, hay fichas donde en un extremo hay un enunciado verbal y la ficha junto a ella está en blanco. Para que estas fichas puedan emparejarse, en la parte en blanco debe estar la representación simbólica correspondiente al enunciado dado. La casilla 11 es un ejemplo de este tipo. En ella debían expresar una expresión simbólica equivalente a "el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número". El procedimiento es análogo para otras casillas.

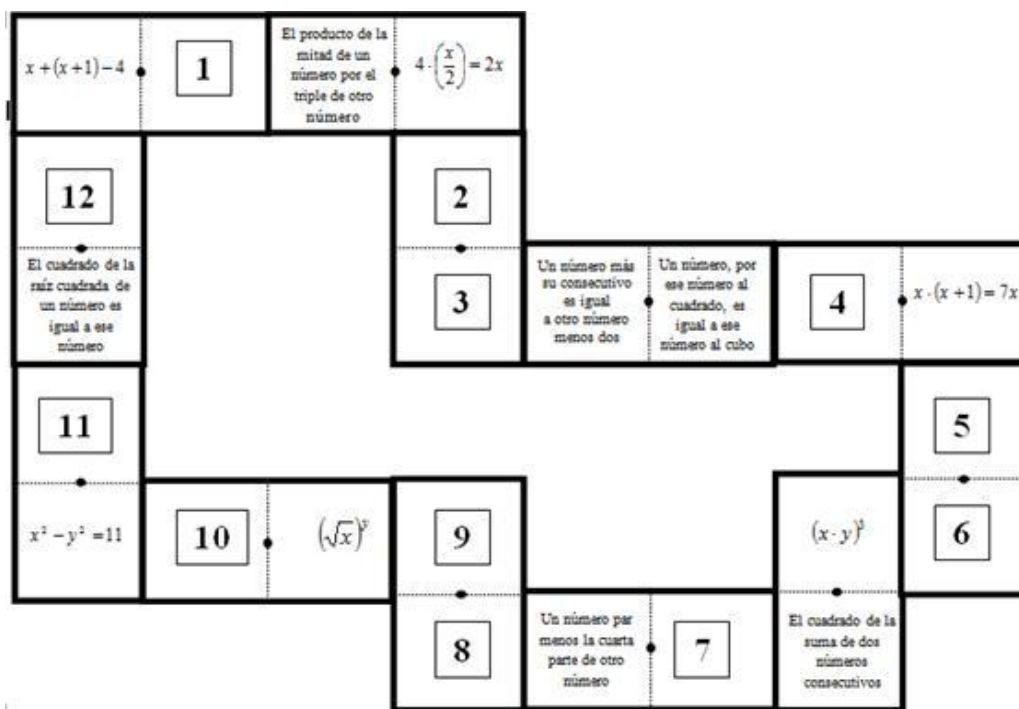


Figura 2. Documento para la primera fase de la recogida de información

REALIZACIÓN DE LA PRIMERA FASE

Los estudiantes trabajaron de forma individual y anotaron su nombre en la hoja. Informamos a los estudiantes de la manera en que debían rellenar las casillas en blanco y de la ausencia de fichas dobles y fichas en blanco, a diferencia del dominó clásico.

REALIZACIÓN DE LA SEGUNDA FASE

Los estudiantes jugaron un torneo de dominó en la segunda fase, en grupos de tres o cuatro componentes. Cada grupo disponía de 30 minutos para jugar diferentes partidas. De cada grupo se seleccionaba al jugador ganador para la siguiente fase, hasta llegar a la final del torneo. Para el torneo, elaboramos unas fichas plastificadas con las 12 fichas de dominó construidas en la primera fase, con sus correspondencias entre los sistemas de representación verbal-simbólico correctamente asignadas. Añadimos otras 12 fichas dobles donde en cada una de ellas aparecía un mismo enunciado de los mismos considerados en las otras 12 fichas, en sus representaciones verbal y simbólica. Las partidas de dominó se

llevaron a cabo fuera del aula habitual de clase, de modo que ninguno de los grupos conocía la actividad de sus compañeros. Las 24 fichas se repartían al inicio de cada partida y los estudiantes debían estar atentos a sus jugadas y a las de sus compañeros, dado que la forma de conseguir puntos era la siguiente:

- 1 punto si justificaban de manera correcta la colocación de sus propias fichas
- 2 puntos si corregían algún error en el que incurriera algún compañero y lo justificaban
- 1 punto para el jugador que primero colocara todas sus fichas

Finalmente, el jugador ganador de las sesiones era aquel que obtenía más puntuación en los 30 minutos estipulados. Los estudiantes fueron informados de las reglas del juego al inicio de cada sesión y se les informó que el jugador ganador recibiría un premio.

Se grabaron en audio y se transcribieron todas las sesiones del torneo.

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para el análisis de los datos, estudiamos las dos fases por separado.

PRIMERA FASE

En la primera fase atendimos a: (a) tipo de traducción (de simbólico a verbal o viceversa) que los estudiantes realizaron en cada caso, (b) tipo de error en que incurrieron, (c) frecuencia con que incurrieron en cada tipo de error y (d) el enunciado en el que se produjo el error.

Recogemos el número de errores diferentes en los que incurrieron los estudiantes en los diferentes enunciados incluidos en las fichas de dominó en la Tabla 3.

De verbal a simbólica	Nº errores	De simbólica a verbal	Nº errores
Enunciado 1	13	Enunciado 2	1
Enunciado 3	7	Enunciado 5	4
Enunciado 4	1	Enunciado 6	2

Enunciado 7	8	Enunciado 9	4
Enunciado 8	14	Enunciado 10	2
Enunciado 11	0	Enunciado 12	2
Total	43	Total	15

Tabla 3. Número de errores en la traducción de enunciados

Teniendo en cuenta clasificaciones de estudios previos sobre errores (Palarea, 1998; Socas, 1997) y la adaptación necesaria a las respuestas de los estudiantes en nuestra investigación, construimos la categorización de errores que presentamos en la Tabla 4. La columna final recoge los códigos que asignamos a cada uno de los tipos de errores considerados.

Categoría	Subcategoría o tipo	Código
I. Según la completitud del enunciado	Incompletos	I.1
	Desmedidos	I.2
II. Derivados de la aritmética	Paréntesis	II.1
	Fracción - Producto	II.2
	Potenciación - Producto	II.3
	Suma - Producto	II.4
	Fracción - Potenciación	II.5
III. Derivados de las características propias del lenguaje algebraico	Generalización	III.1
	Particularización	III.2
	Variables	III.3
	Complicación estructural	III.4

Tabla 4. Clasificación de errores

En primer lugar, distinguimos tres grandes grupos de errores: (a) según la completitud del enunciado, (b) derivados de la aritmética y (c) derivados de las características propias del lenguaje algebraico. La primera hace referencia a errores que tienen que ver con enunciados en los que falta o sobra algún símbolo o palabra para que la expresión, ya sea simbólica o verbal, pueda ser considerada correcta. Si falta, se corresponden con la subcategoría de "incompletos" (I.1) y, si sobra, con la subcategoría "desmedidos" (I.2). En los errores *derivados de la aritmética* consideramos aquellos que provienen de la incorrecta interpretación de los símbolos, operaciones o relaciones entre ellos. Distinguimos cinco subcategorías. La subcategoría "paréntesis" (II.1) corresponde a errores debidos a la mala posición de un paréntesis o a la falta del mismo y que hacen que la expresión algebraica no sea correcta. Las demás subcategorías se refieren a errores en los que las operaciones referidas en el nombre de la subcategoría no son correctamente interpretadas. Por ejemplo, si se requiere representar verbalmente el enunciado dado por $(\sqrt{x})^y$, y los sujetos lo enuncian como "la raíz cuadrada de un número por otro número distinto", entendemos que ha cometido un error en la interpretación de la potencia, al haber expresado en su lugar un producto (II.3). Consideramos errores dentro de la categoría III aquellos que *derivan de las características propias del lenguaje algebraico* usado al interpretar los enunciados verbales o simbólicos. En esta categoría diferenciamos otros tipos de errores:

- Errores en los que se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto. Por ejemplo, en vez de especificar que en la expresión simbólica $x+(x+1)-4$ "se resta el número cuatro", expresa "se resta un número par" (III.1).
- Errores debidos a la particularización de números o relaciones concretas de una expresión general (III.2). Por ejemplo, al traducir simbólicamente el enunciado "Un número par menos la cuarta parte de otro número" se particulariza el número "par" a un número concreto como $2 - \frac{x}{4}$
- Errores de variable³ (III.3). En este caso no se distingue de manera correcta el uso de distintas variables/incógnitas en el enunciado. Un ejemplo, al representar de forma simbólica el enunciado "Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos", el sujeto representa

con el mismo símbolo ambas variables pese a corresponder a números diferentes.

- Errores de complicación estructural (III.4). Son aquellos en el que los sujetos no interpretan apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo. Por ejemplo, expresar el enunciado "El cuadrado de la suma de dos números consecutivos" como $x+(x+1)=x^2$

Esta clasificación permitió describir, en términos de errores, las actuaciones de los estudiantes. En la Tablas 5 presentamos un resumen del tipo de errores en que incurren los estudiantes al traducir enunciados de forma simbólica a verbal, y viceversa, de la frecuencia de dichos errores, así como los enunciados en los que se producen.

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado(s)
De simbólica a verbal		
I.1	3	5, 10
I.2	1	5
II.3	7	6, 9, 10
III.1	4	2, 5, 10, 12
III.3	2	5, 12
De verbal a simbólica		
I.1	5	7
I.2	4	1
II.1	2	7
II.2	2	1, 8
II.3	4	1
II.4	1	4
II.5	1	8
III.2	7	8
III.3	13	1, 3, 8
III.4	15	3, 7, 8

Tabla 5. Tipo de errores y frecuencia al transformar de verbal a simbólica

La información recogida en la Tabla 5 permite observar que al transformar enunciados del sistema de representación simbólico a verbal, en la categoría debida a errores provenientes de la aritmética, los estudiantes incurren en errores debidos al mal uso de la interpretación de potencias y producto (II.3), y no incurrieron en errores notados por II.1, II.2, II.4 y II.5. De las categorías de errores relacionadas con el álgebra, los sujetos incurren en errores debidos a generalización (III.1) y errores de variables (III.3). Dentro de esta categoría, no se han producido errores de particularización de elementos (III.2) ni debidos a la complicación estructural (III.4).

En cuanto a la traducción de enunciados del sistema de representación verbal al simbólico, destaca el hecho de que los errores debidos a la particularización (III.2), se produce únicamente en el enunciado 8, *un número par menos la cuarta parte de otro número*, pues los sujetos toman un número par concreto para expresar la relación de manera simbólica. Los errores relacionados con variables (III.4) se encuentran en los enunciados 3, 7 y 8. En el tercer enunciado, se producen errores al no expresar de manera correcta dos números consecutivos de manera simbólica. El sujeto 8A expresa la suma dos números consecutivos como $x+1x$ y el sujeto 6C como $x+x+2$. En el enunciado 7 (*el cuadrado de la suma de dos números consecutivos*) se producen errores por cambiar el orden de las operaciones indicadas, expresando los sujetos 1C y 9C el cuadrado de la suma como la suma de los cuadrados, y el sujeto 2A expresa simbólicamente un enunciado que no corresponde con la expresión verbal que se le proporciona ($x+(x+1)=x^2$). Por último, en el caso del enunciado 8 (*un número par menos la cuarta parte de otro número*) los errores de complicación estructural (III.4) provienen de que el sujeto 7A realiza una interpretación incorrecta de un número par cualquiera, expresándolo como x^2 y los sujetos 8B y 1C como $x+2$.

Una vez analizados los datos, observamos que en el trabajo escrito, el 75% de los errores analizados correspondían a las traducciones de verbal a simbólico, además, casi todos los errores se debían a confusión de las operaciones potenciación y producto, a que no interpretaban correctamente la estructura del

enunciado algebraico o a la particularización. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Ruano et al. (2008).

SEGUNDA FASE

En cuanto al análisis de los datos de la segunda fase, atendemos a cuatro tipos de actuaciones realizadas por los estudiantes en el transcurso del juego:

- lectura de los enunciados: leen dos representaciones de un mismo enunciado una seguida de la otra al hacer un emparejamiento de dos fichas;
- relación de representaciones: relacionan ambas representaciones para explicar un emparejamiento de dos fichas
- autocorrección: se corrigen así mismo al detectar un error en la explicación de un emparejamiento realizado, y
- corrección a otros jugadores: corrigen la explicación o el emparejamiento realizado por otro compañero.

En la Tabla 6 recogemos algunos ejemplos de estos diferentes elementos de análisis.

Aspectos	Ejemplos
Lectura de enunciados	$x.(x+1)=7x$, el producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x por x más uno es igual a siete x (1C)
Relación de representaciones	" $x+(x+1)=y-2$, un número, x , más su consecutivo, x más uno, es igual a otro número que podemos darle el valor que tú quieras, en este caso le damos y , menos dos" (5B)
Autocorrecciones	En la expresión $x.x^2=x^3$, después de la igualdad determina que es tres x y tras una pequeña pausa determina que es x elevado a tres: "Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo porque x por x al cuadrado es igual a tres x ... a x al cubo" (3A)
Correcciones entre compañeros	- No lo sé... el producto de la mitad de un número por el triple de otro... el producto porque está multiplicando, de un número que es x , por otro número elevado a dos es igual a ese número elevado a tres... al triple de otro número ... (sujeto 3B) - No, está mal. De la mitad, y aquí pone de x al

	cuadrado (sujeto 9B) - Aquí sería, un número por otro número... por ese mismo número al cuadrado es igual a ese mismo número al cubo (sujeto 2C)
--	---

Tabla 6. Aspectos considerados en la segunda fase

Durante el torneo, observamos que la mayoría de estos estudiantes tuvieron dificultades para expresarse oralmente con claridad. En variadas ocasiones los estudiantes fueron capaces de corregir sus propias explicaciones tras realizar una pausa o serle requerida una nueva explicación por sus compañeros o la profesora, sin necesidad de ayuda externa.

Observamos que, a pesar de que uno de los errores cometidos con más frecuencia por los sujetos al trabajar en la construcción del dominó fue no expresar correctamente por escrito la representación simbólica de "un número par" (enunciado 8), cometiendo el error de particularizar en la primera fase, en la segunda fase de la recogida de datos identificaron sin problemas que la expresión $2x$ corresponde a un número par cualquiera en la segunda fase.

El enunciado 11 (el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número) no produjo ningún error en la primera fase de la aplicación del instrumento y, sin embargo, durante la segunda parte del juego, los sujetos encontraron dificultades al leer su representación simbólica $(\sqrt{x})^2 = x$. En la segunda fase éste fue el enunciado que generó mayores dificultades en la explicación verbal que dieron los estudiantes. Esto es, al leer este enunciado en su representación simbólica, gran parte de los sujetos expresaron "El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues el cuadrado de un número elevado a dos es igual al mismo número", "la raíz cuadrada de x es igual a ese número que es x ", sin darse cuenta de que estaban expresando el equivalente a $\sqrt{x} = x$.

Destacamos varios estudiantes, por diferentes razones. El estudiante 9B, quien incurrió en muchos errores en el trabajo escrito al traducir enunciados algebraicos de su representación simbólica a su representación verbal. En la segunda fase manifestó un gran nerviosismo por explicar los enunciados, lo que hizo que sus explicaciones fueran detalladas, obteniendo así más puntos que los sujetos contra los que jugó. Por otra parte, el sujeto 2C, durante el trabajo escrito únicamente manifestó un error, concretamente en el enunciado 9 donde tenía que traducir la

expresión $(\sqrt{x})^2$ escribió “un número por la raíz cuadrada de otro número”. Sin embargo en las partidas de las semifinales manifestó enunciados confusos en varias ocasiones, al no distinguir con claridad de manera oral la lectura de enunciados simbólicos de los verbales. Por último, destacamos el caso del sujeto 3B, quién incurrió en gran cantidad de errores en el trabajo escrito, en ambos sentidos de la traducción, y también al leer los enunciados expresados simbólicamente durante la segunda fase.

El resto de estudiantes, a pesar de manifestar errores en la primera fase del instrumento, no los manifestaron en la segunda fase. En la mayoría de los casos los estudiantes únicamente realizaban una lectura de ambas representaciones por separado. En las semifinales y en la final, los sujetos relacionaron las dos formas de representar el enunciado al realizar la lectura. Esto se puede deber tanto a un proceso de aprendizaje durante el desarrollo de la aplicación del instrumento como al hecho de que los estudiantes que participaron en las últimas partidas fueron los que quedaron clasificados para ello y por tanto habían puesto de manifiesto un mejor rendimiento en el juego con el dominó algebraico..

El hecho de que durante la segunda parte de la aplicación del instrumento los estudiantes trabajaran en grupo, discutiendo la manera de leer los enunciados, tanto simbólicos como verbales, hizo que hubiera comunicación entre ellos, que aprendieran los unos de los otros la manera correcta de leer enunciados simbólicos que, en general, era donde más dificultad tenía.

En general, observamos un aumento considerable en la motivación de los estudiantes. Estudiantes que usualmente tenían poco interés por la asignatura, durante la semana de aplicación del instrumento de recogida de información para este trabajo de investigación no faltaron a clase y mostraron interés por participar. Durante la realización de la segunda parte de la recogida de datos los sujetos se mostraron muy motivados al tener que competir con sus propios compañeros y con los de los otros grupos escolares. Además, disponían de una motivación externa, pues todos querían conocer y obtener el premio.

CONCLUSIONES

La construcción del dominó y el diseño del torneo utilizando los mismos enunciados que el dominó construido nos ha permitido obtener información para dar respuesta a nuestros intereses investigadores. En particular, la primera fase, ha

permitido realizar un análisis y una clasificación de los errores en los que incurren los estudiantes al realizar traducciones por escrito de enunciados algebraicos; y la segunda fase, ha permitido observar cómo emparejan dos representaciones distintas de un mismo enunciado algebraico.

A partir de estudios previos y de las respuestas encontradas en los trabajos de los estudiantes, hemos construido una categorización que ha permitido realizar un análisis en la traducción de enunciados en los dos sentidos en términos de errores, obteniendo que se produjeron más errores al pasar de la representación verbal a la simbólica. Todo este proceso de análisis ha permitido indagar sobre la capacidad de los estudiantes al realizar traducciones y en su comprensión de enunciados en cada uno de los sistemas de representación mencionados, lo que nos ha llevado a la consecución del objetivo general propuesto en esta en el trabajo.

La disminución global en el número de errores en la segunda fase del experimento se puede deber a un aprendizaje en los estudiantes. Teniendo en cuenta que ya habían trabajado este tipo de enunciados, esto se puede considerar como una característica importante de la metodología utilizada y puede llevar a considerar a este dominó como un juego de interés para incluirlo en la enseñanza de enunciados algebraicos cuando el objetivo se centra en la traducción entre los dos sistemas de representación considerados.

El aumento de motivación de los estudiantes en la participación de esta actividad, en comparación con su interés habitual por las clases y el estudio, hace que reconozcamos la inclusión del dominó algebraico como herramienta adecuada para el trabajo y aprendizaje de elementos algebraicos

BIBLIOGRAFÍA

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 24-35.
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

- Castro, E., Olmo, M^a. A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Dto. Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.
- Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88, 286-290.
- De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" (Ed.). *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)* (pp. 49-85). Tenerife: Editor.
- Fernández, F. (2001). El problema de los "problemas algebraicos". En P. Gómez y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 137-147). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- MacGregor, M. (1990). Writing in natural language helps students construct algebraic equations. *Mathematics Education Research Journal*, 2(2), 1-11.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
- Moyles, J. (1990). El juego en la educación infantil y primaria. Morata. Madrid.
- Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna. Consultado el 10 de febrero de 2011 en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106509_archivo.pdf

- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-60). Barcelona: Horsori.
- Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo de Fin de Máster. Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1751/>
- Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 169-181.

¹: Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

²: En Rodríguez-Domingo (2011) puede consultarse la recogida de datos y resultados de la segunda fase del estudio

³: Debido a las características de los enunciados utilizados en este trabajo, no se está realizando una distinción entre si la letra utilizada tiene papel de variable o de incógnita