LA MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO Y LA RAZÓN DE CAMBIO. UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE USANDO GEOGEBRA

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral. Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar

Resumen

En este trabajo presentamos, a partir de una actividad de modelación del movimiento en GeoGebra, una situación de aprendizaje para introducir el estudio de la razón de cambio ligada a su significado como velocidad media. Se espera que el análisis en el contexto geométrico, la conversión a otras representaciones y las actividades que permiten el análisis cualitativo y cuantitativo de la variación, favorezcan poner en uso el conocimiento de los estudiantes sobre nociones cinemáticas. Los conocimientos previos y la intuición constituirán una base para la construcción de nuevo conocimiento, como resultado de la reflexión individual y en pequeños grupos.

Introducción

Muchas veces resulta necesario analizar el comportamiento de fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias para obtener información sobre lo que está sucediendo o predecir lo que sucederá en el futuro. Desde la matemática toma importancia el análisis de los cambios que se producen en esas situaciones o fenómenos, respondiendo a preguntas como qué cambia en determinada situación, cuánto cambia y cómo cambia.

En este sentido, los procesos de variación y cambio constituyen un aspecto de gran riqueza en el contexto escolar. Las variables y las funciones constituyen la base sobre la cual se construye la matemática de la variación y el cambio. Las herramientas que proporciona el cálculo permiten encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos.

La enseñanza y el aprendizaje de las funciones y el cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, tanto por su importancia, como por las numerosas dificultades que trae aparejado su estudio. Al respecto, distintos investigadores sostienen que muchos de los problemas que se presentan se relacionan con la enseñanza, que se caracteriza muchas veces por la centración en los contenidos, dejando de lado la construcción del conocimiento matemático por parte del estudiante y los aspectos de carácter social y cultural asociados a ese conocimiento (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014). También, se observa discrepancia entre la matemática que se enseña en la escuela y la universidad y la que se usa en la vida cotidiana, en el trabajo, en la profesión.

Ante esto, se sostiene la importancia de favorecer la construcción social de conocimiento, en relación a los usos del conocimiento matemático. Al respecto Cantoral, Montiel y Reyes (2014) expresan que la escuela y la universidad deben ofrecer a los estudiantes conocimientos funcionales, es decir “herramientas matemáticas importantes en sí mismas y para interactuar con el entorno que les rodea: poner en uso el conocimiento matemático” (p.22).

Refiriendo en particular al estudio de las funciones y otras nociones de precálculo, como límite y derivada, Pérez (2011), expresa que si prácticas como predecir, modelar y optimizar en los ámbitos científicos, han llevado al desarrollo de conocimientos, herramientas y habilidades matemáticas que permiten entender y explicar fenómenos de diferente naturaleza, resulta necesario generar escenarios escolares donde esas prácticas favorezcan la necesidad y la emergencia de los conceptos u objetos matemáticos.

Por su parte, Sosa, Aparicio y Jarero (2012) sostienen que “el aprendizaje en Precálculo es un producto social que se manifiesta en la actividad de los individuos para modelar lo cambiante, tanto en un plano matemático como en lo sociocultural” (p. 929). Los investigadores reconocen en este sentido el “papel de la práctica, la matemática, su dimensión social y la actividad humana como condiciones socioculturales en las que el uso y construcción de conocimiento matemático relativo al Precálculo, se haya presente tanto en ámbitos escolares como no escolares” (p. 924). Esta articulación entre la práctica, la matemática y la actividad humana debe considerarse como un eje para la reorganización escolar de los saberes matemáticos.

Esto requiere, según López y Pinto (2013), pasar de un enfoque basado en los contenidos a otro basado en prácticas como la modelación, predicción y optimización de situaciones o fenómenos. Para esto, señalan, es necesario modificar también el rol del docente, que debe transformarse, de expositor a guía o modelador de la construcción del conocimiento del estudiante. En este sentido proponen generar espacios de discusión entre los estudiantes, utilizar recursos tecnológicos o manipular objetos reales, siempre en algún tipo de contexto.

Ante la situación descripta, nos propusimos generar situaciones de aprendizaje para implementar en el aula, que tengan en cuenta tanto el rediseño de los contenidos matemáticos como de las prácticas educativas. Tomamos como premisa que el análisis de situaciones de variación y cambio a partir de la modelación de fenómenos que favorezcan la interdisciplinariedad con otras ciencias permite crear situaciones significativas que posibilitan la construcción de conocimiento funcional para los estudiantes.

En este trabajo presentamos algunos aspectos relacionados a la fundamentación y el diseño de una situación de aprendizaje para el estudio de la razón de cambio.

Aspectos teóricos y metodológicos

El trabajo se enmarca en la línea de investigación del pensamiento y lenguaje variacional. Este marco se ocupa del estudio de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone énfasis en el análisis de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados, utilizando para ello diferentes estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003).

Se caracteriza por proponer el estudio de situaciones relacionadas a fenómenos de cambio que se basan en el uso de los conocimientos matemáticos que se pretenden significar. Para Caballero y Cantoral (2013), una situación variacional es "el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de *estrategias variacionales* y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio" (p. 1199). Su resolución implica el "uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p. 464).

Dentro de este marco de referencia, la visualización matemática de un problema juega un papel importante. Según afirma Hitt (2003), esto tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión, lo que nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la construcción de un conocimiento directo e intuitivo para la solución del problema.

Posada y Obando (2006) señalan la relevancia de las distintas representaciones para la comprensión de los conceptos desde una perspectiva variacional:

> El estudio de los conceptos, procedimientos y métodos que involucran la variación, están integrados a diferentes sistemas de representación – gráficas, tabulares, expresiones verbales, diagramas, expresiones simbólicas, ejemplos particulares y generales – para permitir, a través de ellos, la comprensión de los conceptos matemáticos. De esta manera se hacen significativas las situaciones que dependen del estudio sistemático de la variación, pues se obliga no sólo a manifestar actitudes de observación y registro, sino también, a procesos de tratamiento, coordinación y conversión. (p. 16)

La construcción de los conceptos a partir del tratamiento y conversión entre diferentes representaciones ha cobrado mayor importancia a partir del enorme desarrollo de las herramientas tecnológicas (Hitt, 2003). En este sentido, el uso de software dinámico para representar distintos objetos y problemas matemáticos favorece la búsqueda de relaciones, el planteo de conjeturas, la presentación de argumentos y explicaciones y las conexiones entre conceptos o ideas matemáticas. En particular, el software de acceso libre GeoGebra, que combina elementos de geometría dinámica con amplias capacidades de cálculo simbólico, resulta relevante para el aprendizaje de las funciones y el cálculo. La posibilidad de visualización, sumada a la animación e interactividad tiene gran valor para la interiorización o adquisición de conocimientos matemáticos.

En este contexto diseñamos una situación de aprendizaje que, a partir de una actividad de modelación del movimiento planteada en GeoGebra, permite introducir al estudio de la razón de cambio ligada a su significado físico, como velocidad media. Se espera que el análisis en el contexto geométrico, la conversión a otras representaciones y la realización de actividades que permiten el análisis cualitativo y cuantitativo de la variación, permita poner en uso el conocimiento de los estudiantes sobre nociones cinemáticas y, de esa manera, favorecer la construcción de nuevo conocimiento sobre las funciones y la razón de cambio.

La situación de aprendizaje

Entendiendo una situación de aprendizaje como “un espacio de encuentro en el que los participantes (profesor y alumnos), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión mediante el cual logran construir significados que comparten” (García, 2011, p. 16), se planificaron diversas actividades para introducir la razón de cambio mediante el estudio de la variación.

Con el diseño se buscó romper el esquema tradicional de actuar, formular y validar en contextos analíticos para luego buscar aplicaciones en otros contextos (como el numérico y el gráfico), planteando una caracterización que permite actuar, formular, conjeturar en el contexto gráfico y numérico, para luego caracterizar en el analítico.

Utilizando un recurso tecnológico para la modelación de un fenómeno físico, las actividades permiten analizar diferentes escenarios de variación (qué magnitudes cambian, cuánto cambian, cómo cambian), a partir de las intuiciones y concepciones de los estudiantes, llevando a la necesidad de caracterizar variaciones entre magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio.

Se espera promover la reflexión y favorecer la participación del alumno, considerándolo un agente activo en su proceso de aprendizaje, siempre bajo la atención del docente. Según lo expresado por García (2011), todos y cada uno de los estudiantes deben tener oportunidad de manifestar sus conocimientos previos, “…los que constituirán una base sobre la cual construir aprendizajes como resultado de acciones conjuntas…” (p. 16).

Se planea que el espacio de encuentro sea el gabinete de informática y que los alumnos resuelvan las actividades en parejas o equipos de tres integrantes a fin de propiciar la interacción y la confrontación con diferentes formas de razonar o proceder.

Se considera que la situación puede desarrollarse en cinco horas, distribuidas en tres fases.

- Fase inicial. Trabajo con un applet generado en GeoGebra (una hora)

Esta fase corresponde al inicio de la situación de aprendizaje. Su objetivo es presentar y contextualizar el contenido a tratar, a partir de la modelación de un fenómeno real y de la vida cotidiana de los estudiantes. Se busca promover la reflexión sobre conocimientos que tienen o creen tener los alumnos, motivándolos y desafiándolos para la adquisición de nuevos conocimientos.

La aplicación consta de una única pantalla que incluye una serie de instrucciones y preguntas. La misma se preparó a partir de un applet disponible en GeoGebraTube (González, s.f.), modificándolo de acuerdo a nuestro contexto y necesidades.

Plantea el análisis de una situación de movimiento de tres autos, uno de ellos con velocidad constante y los otros dos con velocidad variable. Los vehículos recorren determinada distancia y, llegando a un semáforo en amarillo, uno de ellos pasa siguiendo su marcha normal, con velocidad constante, el otro se apura, aumentando su velocidad, y el tercero debe frenar, por lo que disminuye su velocidad.

Los alumnos deben observar y analizar el movimiento de cada uno de los autos para realizar una descripción del mismo, teniendo en cuenta el desplazamiento y la velocidad de cada auto. Es el análisis cualitativo de la situación, que permite considerar qué es lo que cambia y cómo cambia. El análisis de las gráficas del espacio recorrido por cada auto en función del tiempo, permite estudiar el movimiento desde una representación diferente, en el registro gráfico, corroborando o ayudando a dar la respuesta al tipo de movimiento.
Se apela a la intuición, a los conocimientos que manejan de su vida cotidiana y a los conocimientos previos de cinemática. En la figura siguiente se muestra un recorte de lo que se observa al interactuar con la aplicación.

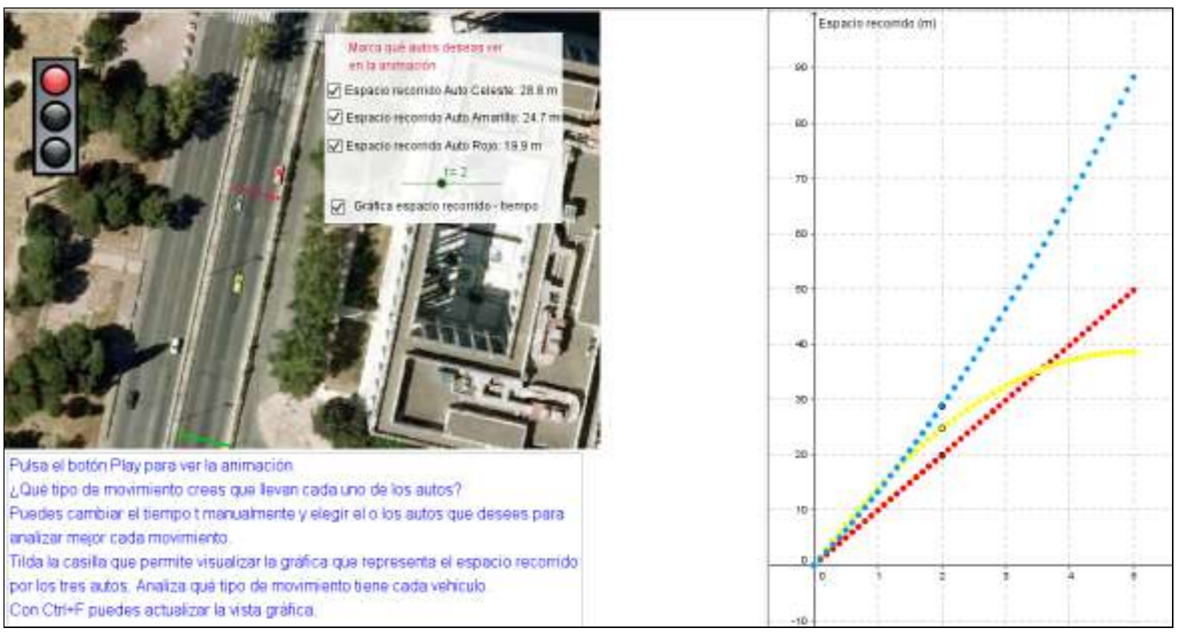


Figura 1

- Fase intermedia. Resolución de una guía de actividades (dos horas)

En esta fase se busca utilizar y relacionar los saberes movilizados en la etapa anterior para construir nuevos conocimientos y significados.

Se entrega a cada alumno una guía que deben responder a partir de la observación e interacción con el applet. Al finalizar la clase el docente retira una de las hojas de trabajo por grupo, de manera de tener herramientas para evaluar la actividad y preparar la clase siguiente.

Las actividades, que se enuncian a continuación, buscan que el estudiante aborde con mayor profundidad las preguntas qué, cómo y cuánto cambia.

Guía de trabajo. En la animación se observa el comportamiento de tres vehículos ante un semáforo en amarillo en una calle de la ciudad.

1) a) ¿Qué magnitudes intervienen en la situación? **b)** ¿Qué sucede con el desplazamiento de cada auto para iguales intervalos de tiempo? ¿Qué tipo de movimiento lleva cada uno?

2)a) ¿Cuál fue la distancia total recorrida por cada auto? ¿Cuál fue la velocidad media de cada auto a lo largo de todo su recorrido? **b)** En el intervalo de tiempo de 0 a 2 segundos, ¿cuál fue el espacio recorrido por cada coche? ¿Y su velocidad media?

c) ¿En qué momento alcanza el auto celeste al rojo? ¿Qué velocidad tendrán en ese instante?

3)a) Teniendo en cuenta los espacios recorridos por el auto rojo completa la tabla de abajo.

Instante t (en segundos)	1	2	3	4	5
Espacio e recorrido hasta el instante t	9,9	19,8	29,7	39,6	49,5

Intervalos	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta e = e(t_2) - e(t_1)$	$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$			
$1 \leq t \leq 2$			
$2 \leq t \leq 3$			
$3 \leq t \leq 4$			
$4 \leq t \leq 5$			

b) ¿Qué significado tienen los valores de cada columna? ¿En qué unidades se expresan?

c) En la gráfica se representó el espacio recorrido por el auto rojo como función del tiempo. Describe con tus palabras cómo cambia el espacio recorrido del auto con respecto al tiempo.
Interpreta gráficamente lo analizado anteriormente.
¿Por qué la gráfica es una recta?

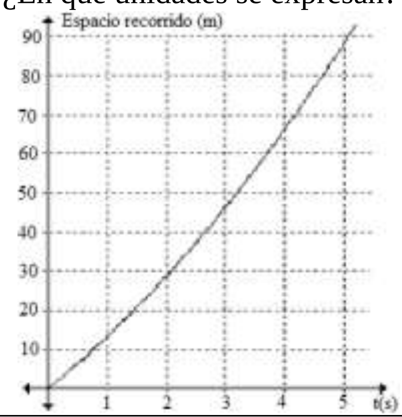
4)a) Teniendo en cuenta los espacios recorridos por el auto celeste completa la tabla.

Instante t (en segundos)	1	2	3	4	5
Espacio e recorrido hasta el instante t	13,3	28,8	46,5	66,4	88,5

Intervalos	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta e = e(t_2) - e(t_1)$	$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$			
$1 \leq t \leq 2$			
$2 \leq t \leq 3$			
$3 \leq t \leq 4$			
$4 \leq t \leq 5$			

b) ¿Qué significado tienen los valores de cada columna? ¿En qué unidades se expresan?

c) En la gráfica se representó el espacio recorrido por el auto celeste como función del tiempo. Describe con tus palabras cómo cambia el espacio recorrido del auto con respecto al tiempo.
Interpreta gráficamente lo analizado anteriormente.
¿Cómo se relaciona la forma de la gráfica con el tipo de movimiento?



Se pretende que la resolución de las distintas actividades lleve a los estudiantes a establecer las razones de cambio promedio como una medida de la rapidez de cambio en fenómenos de este tipo. Se espera que favorezca también al reconocimiento del tipo de funciones, o representaciones gráficas, que dan lugar a razones de cambio constantes y aquellas que llevan a razones de cambio variables. De esta manera se tienen en cuenta las recomendaciones de Villa (2011) en cuanto a la importancia de posibilitar la identificación de características de la función en cuanto a su variación y a la variación de la variación apelando al tratamiento y la conversión entre distintas representaciones.

La representación tabular permite la introducción a la determinación cuantitativa de los cambios. Tiene como objetivo principal que los alumnos trabajen con la velocidad media, a partir de la obtención de las diferencias (incrementos) y de los cocientes entre estas diferencias. Esto lleva a la identificación de los patrones de regularidad que son los que caracterizan al movimiento de cada uno de los autos.

Las representaciones gráficas posibilitan la interpretación geométrica de las distintas medidas a partir de las gráficas que describen los movimientos, identificando y diferenciando cada uno de ellos. En relación a esto, Villa (2011) señala que algunos aspectos característicos de la comprensión de la función desde una perspectiva variacional son la descripción cualitativa del cambio a partir de la identificación de las características de su gráfica y la asociación de la manera como varía el cambio, según la forma de la gráfica.

Con esta intención, se prepararon las preguntas que complementan el trabajo con las tablas y las gráficas, y que exigen el análisis de toda la información disponible.

Por ejemplo, en la actividad 4 se solicita el análisis del movimiento del auto que acelera para poder pasar el semáforo.

Intervalos	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta e = e(t_2) - e(t_1)$	$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	1	13,3	13,3
$1 \le t \le 2$	1	15,5	15,5
$2 \le t \le 3$	1	17,7	17,7
$3 \le t \le 4$	1	19,9	19,9
$4 \le t \le 5$	1	22,1	22,1

En la tabla se determinan los cambios de la variable independiente (Δt), los de la variable dependiente (Δe) y la razón entre los cambios de una variable con respecto a los cambios de la otra ($\Delta e/\Delta t$).

La identificación de esas cantidades en la representación gráfica, implica asociar la medida de los cambios con longitudes de segmentos, mientras que la comparación de los cambios de una variable con respecto a la otra, lleva a la interpretación geométrica de la razón de cambio como la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos que corresponden a los extremos de cada intervalo.

Con las preguntas se aspira a que los alumnos relacionen la columna de las razones con la velocidad media y con la forma de la curva. La profundización del análisis dependerá de los contenidos que se quieren desarrollar y del nivel educativo en el que estemos trabajando.
Lo primero que podemos observar en la tabla es que, mientras el cambio de tiempo se mantiene constante, no ocurre lo mismo con los cambios del espacio recorrido, que son cada vez mayores. Esto se puede interpretar también en la gráfica (Figura 2).

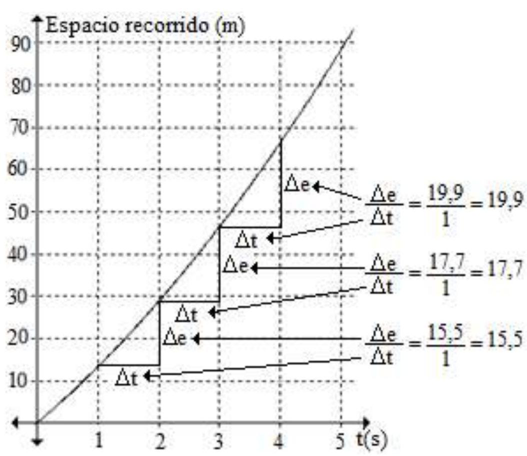


Figura 2

La curva crece cada vez más rápido, lo que se asocia a la velocidad cada vez mayor del auto (velocidades medias más grandes en cada intervalo de tiempo considerado).

Con las preguntas: ¿en qué momento alcanza el auto celeste al rojo?, y: ¿qué velocidad llevará cada uno en ese momento?, se espera desafiar a los alumnos comenzando a pensar en la velocidad en cada instante.

- Fase final, de formalización y validación del conocimiento (dos horas)

En esta etapa el docente retoma lo trabajado durante las sesiones anteriores. Teniendo en cuenta las respuestas de los alumnos en sus hojas de trabajo, plantea un debate fomentando la participación de todos. El discurso debe estar encaminado a reflexionar sobre las conclusiones de las distintas actividades desarrolladas, relacionando los aspectos numéricos, gráficos y analíticos de los conceptos involucrados, e introduciendo las nociones variacionales que cada actividad permite resaltar. Esta discusión es la base para la formalización de los distintos contenidos, trabajando en el contexto analítico o simbólico.

Finalmente, se propone la resolución de otras actividades que permitan conocer el avance de los alumnos con respecto al desarrollo de nociones y significados variacionales así como valorar la comprensión respecto de los conceptos involucrados.

Reflexiones

Las nociones relacionadas a la matemática de la variación y del cambio (las funciones y el cálculo), están presentes en la vida cotidiana y en la mayoría de las ciencias, de ahí la importancia de que adquieran sentido y significado para los estudiantes y que su estudio se plantee, de diferentes formas, desde la educación primaria hasta la superior.

La investigación de antecedentes y nuestra experiencia en el aula, nos ha llevado a la necesidad de revisar tanto los contenidos que se enseñan como la forma de enseñarlos. Planteamos la importancia de diseñar e implementar situaciones de aprendizaje que permitan generar conocimientos funcionales a nuestros estudiantes. En este sentido, consideramos que el mayor valor de la situación propuesta reside en la posibilidad de llevar al aula de matemática una situación cotidiana relacionada con la disciplina Física. La cuantificación de la variación presente en un fenómeno modelado a través de Geogebra permitió la construcción de nuevo conocimiento. Las actividades propuestas posibilitan poner en uso los conocimientos sobre cinemática. Otros aspectos que rescatamos son:

- Combinar el conocimiento matemático con el uso de la intuición y el sentido común.
- Promover el uso de recursos tecnológicos que favorecen la visualización.
- Partir de los conocimientos previos y orientar la construcción de nuevo conocimiento de manera organizada.
- Propiciar el trabajo colaborativo, generando discusión entre los integrantes de los grupos.
- Suscitar actitudes de interés y responsabilidad hacia el estudio de la matemática.

La implementación de estos diseños requiere mucho trabajo, tiempo y compromiso del docente, pero creemos que es el camino, no sólo de lograr conocimiento significativo, sino también de que los estudiantes reconozcan que la única manera de aprender es participar, hacer matemática y, más importante aún, que se den cuenta de que pueden aprender matemática.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de* *matemática educativa 26*, 1195-1203. México: Comité latinoamericano de matemática educativa.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R.; Molina, J. y Sánchez M. (2005). Socioepistemología de la Predicción, en J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R; Montiel, G. y Reyes, D. (2014). Hacia una educación que promueva el desarrollo del pensamiento matemático. *Revista Pedagógica Escri/viendo*, *11(24)*, 17-26.

García, M. (2011). *Una situación de aprendizaje para contribuir a la mejora de la comprensión del concepto derivada*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Matemática Educativa de la UAG. Chilpancingo, Guerrero, México.

González, A. (Sin fecha). Cinemática: movimientos rectilíneos. Recuperado el 10 de marzo de 2015 de http://tube.geogebra.org/material/simple/id/17482.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 10(2)*, 213-223.

López, J. y Pinto, J. (2013). Implementación de un curso para profesores de Precálculo basado en una perspectiva variacional y tecnológica. En L. Sosa, J. Hernández y E. Aparicio (Eds.). *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 35-43. Chiapas: CIMATES.

Pérez, I. (2011). *Unidades didácticas en el área de Precálculo. Un estudio sobre la efectividad de organizadores de contenido*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México.

Posada, F. y Obando, G. (ed.) (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, Módulo 2.* Medellín: Gobernación de Antioquia.

Sosa, L., Aparicio, E. y Jarero, M. (2012). Contenido curricular en precálculo. Un estudio de su dimensión sociocultural. en R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25,* 923-930. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Antioquia. Colombia.