UN DISPOSITIVO PARA HACER MATEMÁTICA CON LOS DEDOS

Maximiliano E. Véliz, Eduardo E. Rodríguez
Instituto de Industria, Universidad Nacional de General Sarmiento. Argentina
erodrigu@ungs.edu.ar

Resumen

Se presenta un dispositivo de asistencia a la enseñanza y al aprendizaje del tema de funciones matemáticas principalmente para personas con discapacidad visual. El dispositivo consiste en un tablero que simboliza un plano cartesiano sobre el que se colocan piezas que representan funciones matemáticas. El diseño está optimizado para facilitar el aprendizaje interactivo por medio de actividades hápticas. El dispositivo actualmente está en uso en el taller de matemática del Curso de Aprestamiento Universitario de la UNGS y su utilidad se puede extender a otros niveles educativos. Se describe el dispositivo y se presentan ejemplos de aplicación.

Introducción

El tema de funciones es impartido en cursos de matemática en los niveles de enseñanza medio, terciario y universitario en el contexto de múltiples disciplinas. La enseñanza-aprendizaje de este tema y sus conceptos conexos integra la formulación escrita de la expresión matemática de la función con la enunciación oral y requiere de un recurso adicional que dé soporte a la representación gráfica de la función. (Falsetti, 2000)

En el caso de las personas con discapacidad visual, la escritura y la lectura de una función matemática se pueden hacer mediante notación matemática Braille (Della Barca, 2000; Fernández del Campo, 2004); sin embargo, esta práctica no llega a brindar un acceso directo a las cualidades geométricas de las funciones. En general, es la apreciación de la forma de la representación gráfica el factor que más eficazmente asiste al reconocimiento y la comprensión del comportamiento y características geométricas de una función.

Los recursos estándares para la representación gráfica en el aula son: pizarrón, papel, proyecciones digitales en pantallas murales o pantallas de dispositivos electrónicos, entre otros, que facilitan la visualización de una función para su análisis y descripción. Pero las personas con discapacidad visual están impedidas parcial o totalmente de apoyarse en tales recursos gráficos, y necesitan contar con otros específicos que les den accesibilidad a las formas matemáticas, principalmente a través del tacto. (Rouzier, 2004; Martínez Perrone, 2010)

La carencia de recursos apropiados para la representación gráfica de funciones que sean accesibles a las personas con discapacidad visual, desfavorece en ellas la interpretación significativa del objeto matemático en estudio, lo que reduce la posibilidad del aprendizaje en igualdad de oportunidades. Es notable un cada vez mayor número de personas con distintos tipos de discapacidad –en especial, ceguera y disminución visual– que estudian en los distintos niveles de enseñanza con planes de estudio idénticos a los que se aplican en común al resto de los estudiantes. (Medina, 2016; Guerrero, 2016)

En cuanto a una propuesta para mejorar la enseñanza de la matemática a personas ciegas, este trabajo parte de las siguientes preguntas: ¿cómo hace un docente para enseñar conceptos gráfico-geométricos a una persona ciega?, ¿cómo aprende esos conceptos una persona ciega?, ¿hay tecnología didáctica adecuada y suficiente para llevar adelante ambas tareas? (Bello, 2015) Dicho de otra manera y siguiendo al matemático francés Alain Connes, quien dice que «al explorar la geografía de la matemática, el matemático percibe los contornos y la estructura de un mundo de increíble riqueza» (Dehaene, 2016), como educadores nos preguntamos cómo podemos contribuir a que esas «texturas» sean disfrutadas por los aprendientes ciegos. Nuestra propuesta se basa en la generación de lo que se denomina una *tecnología de apoyo*.

Existen algunos esfuerzos para resolver el problema, en especial para la enseñanza de la geometría, basados en una interfaz háptica y sonora (Rouzier, 2004). En cuanto a tecnologías de apoyo más simples para que las personas con discapacidad visual tomen contacto con las formas gráfico-geométricas de las funciones matemáticas, existen tableros pensados para el sentido táctil sobre los que se pueden representar las funciones más elementales.

En el común de los casos, estas construcciones se reproducen de manera artesanal usando materiales blandos, y las funciones se materializan con tiras de cartón o goma cortadas a mano o usando hilos o materiales elásticos a los que se les da la forma aproximada (Dado, 2016; Della Barca, 2015). O bien, se usan planchas de materiales deformables en las que las formas se imprimen por repujado con un punzón. Ya sea que estas técnicas sean practicadas por el docente o el aprendiente, aun destacando el valor educativo que tienen, en ambos casos resultan representaciones materiales de baja durabilidad, baja reproducibilidad y poca o mediana exactitud. (Rouzier, 2004; Martínez, 2015)

Se presenta aquí una propuesta basada en el empleo de técnicas de impresión 3D para fabricar un tablero que simboliza un plano cartesiano junto a piezas que representan funciones exactas, las que colocadas sobre el tablero quedan en sobre relieve para la inspección táctil. La descripción del dispositivo se complementa con la presentación de una serie de ejemplos de aplicación. Además de su uso en el aula, con el que un aprendiente ciego puede seguir las clases a la par de alumnos videntes, el dispositivo también es una herramienta útil para la práctica y para la evaluación.

Objetivos del dispositivo

El dispositivo tiene como objetivo principal poder representar funciones matemáticas $y(x)$ con un alto grado de reproducibilidad y de exactitud sobre un tablero durable. La intención es proveer a una persona con discapacidad visual un recurso que respete las convenciones gráfico-geométricas de un sistema cartesiano, y que le permita aprenderlas valiéndose por sí misma mediante el uso del tacto.

Es otro objetivo proveer un recurso que permita reconocer la forma que adoptan las funciones para el aprendizaje de sus atributos, tales como: existencia de rangos de crecimiento y de decrecimiento, rangos de positividad y de negatividad, existencia y ubicación de raíces, existencia y ubicación de máximos y mínimos absolutos y relativos, comportamientos asintóticos, concavidad, periodicidad, dominio e imagen, entre otras posibilidades.

Con el dispositivo se espera que una persona con discapacidad visual incremente su capacidad de participar activamente en una clase del tema de funciones junto a pares que no presentan ese tipo de discapacidad, con la asistencia de un recurso de uso personal, y contribuir con ello a una mayor inclusión educativa.

El dispositivo se ha ideado para que puedan usarlo personas con discapacidad visual de diferentes edades, de modo que puedan participar de estrategias de aprendizaje de conceptos matemáticos con distintos grados de complejidad y de acuerdo con sus trayectos educativos. En la misma línea, el dispositivo puede ser operado por personas que presentan distintos grados de discapacidad visual y que tienen distintos adiestramientos y habilidades para recoger información a través del sentido del tacto.

El diseño general se corresponde con las características que tiene que presentar un elemento de *diseño universal*, como reseña Ginnerup (2010), a la vez que también significa un aporte a estudiantes que, aun sin presentar discapacidad visual, tienen dificultades para la comprensión del concepto de función matemática. Estos agregarían a sus métodos de aprendizaje –basados primariamente en percepciones visuales y auditivas– un método adicional de comunicación con el objeto matemático a través de la percepción táctil.

Finalmente, la solución propuesta tiene como resultado un dispositivo durable, de fabricación simple, de bajo costo y de fácil reproducción, y que se puede operar con escaso entrenamiento inicial.

Descripción del dispositivo

Los objetivos mencionados fueron alcanzados mediante la concepción de un tablero rectangular representativo de un sistema cartesiano, sobre el que se pueden fijar piezas intercambiables que simbolizan distintas funciones matemáticas. En la figuras 1se muestra el tablero, su soporte y un conjunto de piezas a colocar.

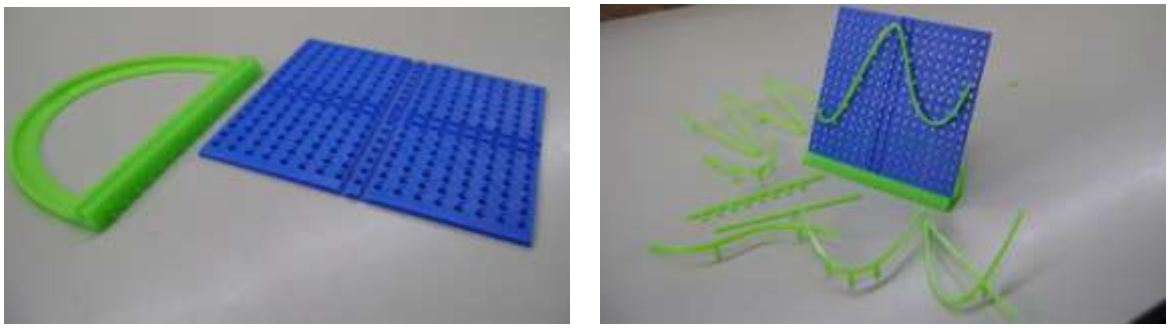


Figura 1. Izquierda) Tablero y soporte. Derecha) Juego didáctico completo. Diseñado con SolidWorks.

El tablero tiene 16 cm x 17 cm de lados y 5 mm de espesor y está construido con un material termoplástico con una técnica de deposición fundida practicada con una impresora 3D. Cuenta con una matriz cuadrada de orificios que sirve de referencia para la ubicación de las coordenadas del sistema cartesiano. En esos mismos orificios se encastran las piezas intercambiables que representan funciones matemáticas.

El tablero tiene la bondad de facilitar una rápida identificación de elementos matemáticos convencionales, como ejes ortogonales y escalas. Esto es posible a través de un conjunto de marcadores extendidos y localizados: los primeros, en bajo relieve, indican los ejes; los segundos, en sobre relieve, se suman a la función de los orificios para asistir al usuario con discapacidad visual en su orientación espacial en la superficie de trabajo definida por las dimensiones del tablero.

Otra ventaja es que el tablero tiene impreso en un lado (lado anverso) los marcadores en sobre relieve, pero no en el otro (lado reverso), lo que permite al usuario elegir el uso de uno u otro dependiendo de su necesidad de contar o no con estos marcadores orientadores extra, lo que queda subordinado a sus habilidades personales para ubicarse espacialmente en el área de trabajo. En cambio, los marcadores extendidos en bajo relieve que simbolizan los ejes coordenados están presentes en ambos lados del tablero.

Se ha adoptado una ubicación de los ejes cartesianos con origen (0, 0) en el centro del tablero, de modo de permitir la representación de funciones en los cuatro cuadrantes. Dada la simetría que aporta la ubicación centrada de los ejes tanto en su lado anverso como reverso, el dispositivo reúne las características necesarias para que sea usable con el mismo grado de confort tanto por personas diestras como zurdas.

El diseño del tablero respeta las convenciones matemáticas en cuanto al uso de escalas lineales para la representación gráfica en un sistema cartesiano ortogonal en dos dimensiones. Las escalas no están predefinidas sobre el tablero, por lo tanto se tienen que interpretar como «escalas en unidades arbitrarias». Esto da libertad para definirlas específicamente en cada ocasión, lo que lleva a poder representar funciones matemáticas con dominios e imágenes que pueden estar contenidos en un amplio intervalo de valores, y sin que estos intervalos necesariamente sean los mismos.

El tablero cuenta con un soporte, cuyo uso da lugar a que se lo pueda mantener en una posición estable casi vertical mientras el soporte se apoya sobre la mesa. El uso del soporte redunda en varias ventajas adicionales:

- el usuario libera sus manos, ya que no necesita sostener el dispositivo;
- el tablero queda frente al usuario en una posición cómoda para las operaciones hápticas;
- con el tablero casi vertical, quedan naturalmente definidas las orientaciones «hacia arriba» y «hacia abajo» del sistema cartesiano.

En un orden didáctico, el último ítem favorece la comunicación verbal entre el docente y el estudiante en instancias tales como las de describir características de las funciones, como existencia de «concavidad hacia arriba» o «concavidad hacia abajo», o para caracterizar «intervalos de crecimiento» o «intervalos de decrecimiento» de una función.

El soporte es la unión física de una regla y un transportador, y se puede usar separado del tablero. La regla tiene una escala graduada con marcadores en sobre relieve cada un centímetro. El transportador está graduado en grados sexagesimales para la medición de ángulos, con indicaciones en sobre relieve cada 10º en un intervalo de 180º, más marcadores adicionales que resaltan las posiciones angulares de 45º, 90º y 135º.

En cuanto a las piezas intercambiables que simbolizan funciones matemáticas, estas son rígidas o semirrígidas, y cuentan con encastres cilíndricos que se insertan en los orificios del tablero para definir su ubicación en el sistema cartesiano.

El conjunto de piezas intercambiables incluye: líneas rectas, parábolas, hipérbolas, polinomios cúbicos, funciones seno, coseno y tangente (como ejemplos de curvas abiertas); un ejemplo de intersección parábola-recta; circunferencias de distintos radios y elipses de distintas excentricidades (como ejemplos de curvas cerradas, que también sirven para describir órbitas planetarias, por ejemplo).

Una vez que cualquiera de las piezas queda encastrada en el tablero, permanece fija en sobre relieve, una condición necesaria para facilitar la inspección táctil que lleve a reconocer su forma y, a partir de allí, se proceda al reconocimiento de los atributos de la función que representa. Este proceso de asociación que se realiza en dos fases (reconocimiento de forma y reconocimiento de atributos) es intrínseca de la actividad háptica. (Ballesteros, 1993)

Para representar gráficamente otras funciones además de las mencionadas, se puede recurrir a un conjunto de encastres individuales que cuentan con un ojal en un extremo (Figura 2).

Cuando un número suficiente de estos encastres se fijan en los orificios del tablero para marcar puntos (x, y) de paso de una dada función a representar, por el ojal que queda en sobre relieve se puede enhebrar una tira flexible de material que toma la forma de la función mediante una aproximación por tramos curvos cortos.

Para que el mayor número de personas con discapacidad visual puedan usar el dispositivo, el tablero es oscuro y las piezas que se colocan sobre él, claras, para así lograr un mayor contraste de colores entre las figuras y el fondo. Las aristas y los vértices de todas las piezas integrantes del dispositivo están redondeados a fin de reducir la posibilidad de raspaduras en los dedos.

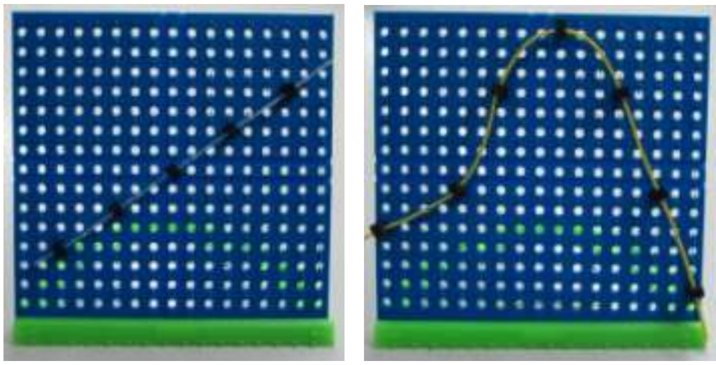


Figura 2. Uso de encastres individuales para representar funciones matemáticas.

Ejemplos de uso

1) Reconocimiento del sistema cartesiano

El docente pone a disposición del estudiante el sistema cartesiano y lo orienta para que realice:

a) identificación del centro del sistema cartesiano y de la ubicación de los ejes;
b) identificación de los cuatro cuadrantes;
c) ubicación de puntos coordenados, por ejemplo: (0, 4), (5, 0), (4, 6), (1, –3), (–3, 3), etcétera, con la indicación de cuáles están sobre los ejes y cuáles dentro de un cuadrante y cuál es ese cuadrante;
d) conteo de puntos coordenados –definidos por los agujeros– en las direcciones x e y, y cálculo de la cantidad total de puntos del sistema.

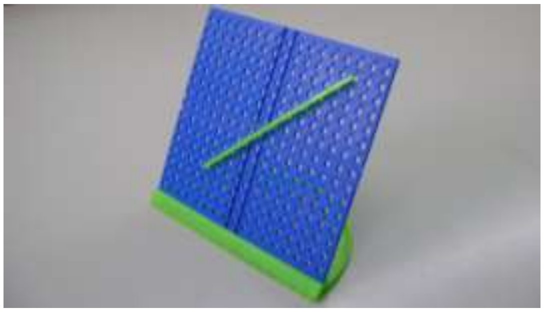
El docente recoge la opinión del estudiante en cuanto a posibles dificultades que se presenten en esta etapa de reconocimiento, originadas ya sea por la rugosidad del material, el espaciado de los agujeros-coordenadas, tamaño de las ranuras-ejes, entre otros.

El docente podrá solicitar al estudiante que realice la misma actividad con su mano menos hábil.

2) Con la función lineal $y = m\ x$

Se presenta el sistema cartesiano con una recta que pase por el origen. Algunas preguntas:

a) ¿La recta pasa por el origen? ¿La recta tiene pendiente positiva o negativa? ¿Cómo te das cuenta?
b) ¿Cuál es la pendiente de la recta?
c) El punto de coordenadas $(x, y) = (1, 3)$ ¿es un punto de la función?
d) ¿Cuál es la ecuación de la recta que estamos analizando?

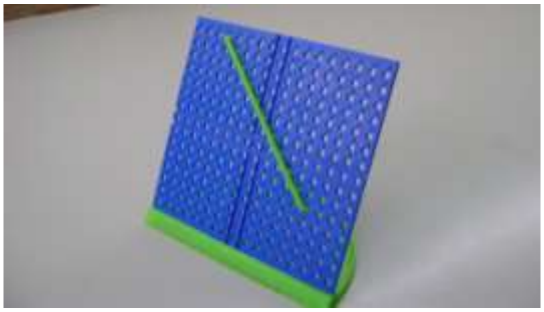


Se sugiere usar rectas de pendiente positiva y negativa.

3) Con la función lineal $y = m\,x + b$

El docente presenta al estudiante el sistema cartesiano con la inclusión de una recta con ordenada al origen $b \neq 0$. Algunas preguntas:

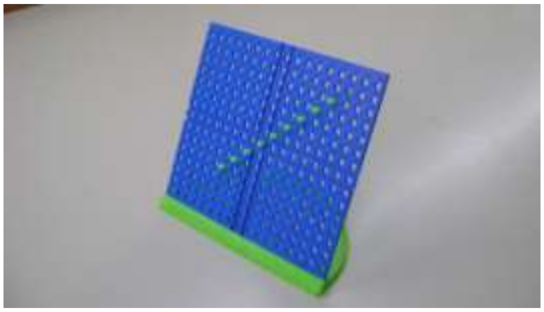
a) ¿La recta tiene ordenada al origen? Si tiene, ¿cuánto vale?
b) ¿La recta tiene pendiente positiva o negativa? ¿Cómo te das cuenta?
c) ¿Cuál es la pendiente de la recta?
d) ¿En qué punto la recta cruza el eje x?
e) ¿Cuál es la ecuación de la recta que estamos analizando?



Se sugiere usar rectas con $b < 0$ y $b < 0$; y $m > 0$ y $m < 0$.

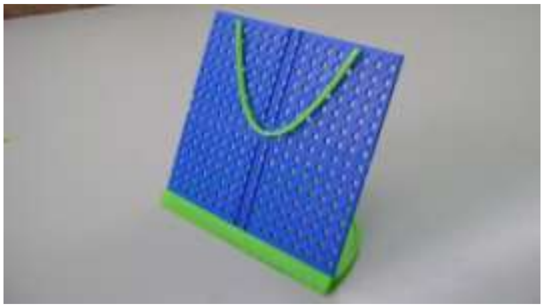
4) Con la función lineal $y = m\,x + b$

El docente presenta al estudiante el sistema cartesiano con una recta colocada desde el lado reverso del sistema, de modo que los encastres sobresalgan por el lado anverso. Se pide al estudiante que genere una tabla de puntos (x, y) de la recta.



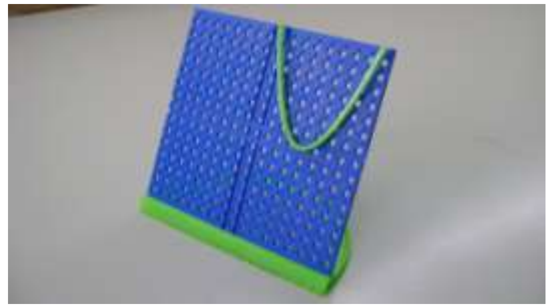
5) Con la función cuadrática $y = \pm x^2$

Se presenta el sistema cartesiano con una parábola con vértice en el origen. En este caso, la separación entre orificios es de una unidad en ambas direcciones. Se puede preguntar:



a) ¿Cuál es el vértice? ¿Es el punto mínimo o máximo de la parábola?
b) ¿El punto de coordenadas $x = -2$ e $y = 4$ es un punto de la función.
c) Deducir algunos puntos de paso.

6) Con la función cuadrática $y = \pm\ (x - a)^2$



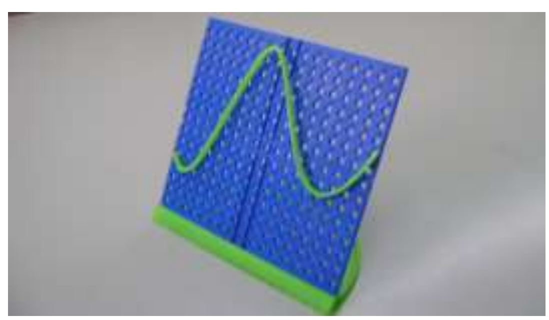
El docente presenta al estudiante el sistema cartesiano con una parábola con el vértice desplazado del origen, sobre el eje *x*. Podrá preguntar al estudiante:
a) Definición de la coordenada del vértice.
b) Definición de la función representada

7) Con la función cuadrática $y = \pm (x - a)^2 + b$

El docente presenta al estudiante el sistema cartesiano con la inclusión de una parábola que tenga vértice en un punto $(a, b) \neq (0, 0)$. Puede preguntar al estudiante:
a) Definición de la coordenada del vértice.
b) ¿La función tiene raíces? En caso afirmativo: ¿cuáles son sus valores?

Se sugiere ubicar el vértice en distintos cuadrantes.

8) Usando una de las funciones cúbicas



El docente presenta al estudiante el sistema cartesiano con la inclusión de un polinomio cúbico.
Algunas cuestiones para desarrollar:
a) Indicamos cuáles son las raíces de la función.
b) En un intervalo indicado, averiguamos si la función es creciente o decreciente.
c) Indicamos los conjuntos de positividad y negatividad de la función.
d) Analizamos existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos.

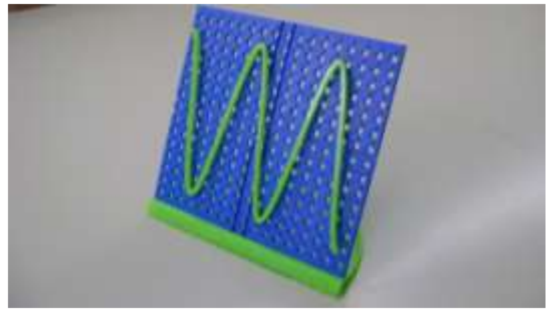
9) Con una función sinusoidal

Se presenta el sistema cartesiano con una función seno o coseno y se solicita el análisis de la función.

a) ¿La función es periódica?

b) Definir el período mediante mediciones sobre el tablero.

c) Definición de la función.



Comentarios finales

El dispositivo presentado está en uso desde 2015 en el taller de matemática del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) de la UNGS. Ha permitido ampliar los recursos didácticos para la enseñanza a ciegos y disminuidos visuales. La evaluación que tanto docentes como estudiantes han realizado del dispositivo es positiva. Queda abierta la posibilidad de usarlo en otros cursos de matemática y en distintos niveles educativos. En 2016, el dispositivo se ha complementado con un conjunto de piezas impresas para la enseñanza-aprendizaje de geometría. En abril de 2016 se va a brindar la capacitación Matemática con los dedos a docentes de escuelas especiales del país sobre el aprovechamiento de estos nuevos dispositivos en las clases de matemática. Los autores creemos que estos nuevos recursos pueden integrarse eficazmente con otros recursos disponibles para contribuir a mejorar la enseñanza-aprendizaje de matemática en las aulas del país, principalmente de escuelas especiales.

Agradecimientos

Agradecemos a Judit Martínez, alumna ciega del CAU de la UNGS en 2015, por sus valiosos comentarios sobre el uso y las posibilidades del dispositivo. La fabricación del dispositivo se realizó con impresoras 3D del Laboratorio de Ingeniería del Instituto de Industria (IDEI-UNGS).

Referencias bibliográficas

Ballesteros, S. (1993). Percepción háptica de objetos y patrones realzados: una revisión. *Psicothema, 5*, 311-321.

Bello, M. (2015). JUDITH, juego de enseñanza matemática para estudiantes con discapacidad visual. *Voces de la ciencia y la tecnología*, sitio web: https://vocessobreciencia.wordpress.com.

Dado (2016). Material didáctico. *Dado: Diseño para todos,* sitio web: www.dado.com.co.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático*. Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Della Barca, J. J. (2000). *Notación matemática Braille*. Buenos Aires: ISBN 950-43-9993-2.

Della Barca, J. J. (2015). *Comunicación personal*.

Falsetti, M. (2000). *Guía de Matemática para el CAU, Módulo III*: Funciones Elementales, Serie Material Didáctico. Buenos Aires: UNGS.

Fernández del Campo, J. E. (2004). *Braille y matemática*, 1ª ed. Madrid: Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE).

Ginnerup, S. (2010). *Hacia la plena participación mediante el diseño universal, Colección Documentos*. Madrid: Ministerio de Sanidad y Política Social.

Guerrero, A. (2016). *Accesibilidad académica. Una construcción colectiva*. Madrid: Ed. Asociados

Martínez, J. (2015). *Comunicación personal*.

Martínez Perrone, L. (2010). Estrategias para enseñar contenidos matemáticos a alumnos ciegos o con baja visión. *Actas del VII CIBEM (Montevideo, Uruguay), 1*, 726-730.

Medina, R. (2016). Estudiar pese a todo. 5/4/16, de *Clarín*, sitio web: www.clarin.com.ar.

Rouzier, S. et al. (2004). Touching geometry for blind pupils. En *Procedings of EuroHaptics* (104-109). Munich: K. Miesenberger et al. (Eds.).

SolidWorks (2016). *Software de diseño CAD en 3D*. SolidWorks, sitio web: http://www.solidworks.com.