

***DESARROLLO DE HABILIDADES BÁSICAS A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE MOSAICOS***

**Miryam Judith Mazzitelli**

**miryamjmm@hotmail.com**

**Instituto Superior del Profesorado Técnico, UTN. Argentina**

**Resumen**

Proponemos un trabajo alrededor de una secuencia de mosaicos geométricos diseñada para estudiantes de nivel medio con la intención de favorecer en ellos el desarrollo de habilidades geométricas y la adquisición gradual de mayores niveles de comprensión.

En una primera parte del taller trabajaremos alrededor de algunas de las actividades de la secuencia para, en una segunda instancia, conceptualizar y reflexionar con teoría de Educación Matemática en rasgos de la propuesta de modo que los docentes asistentes dispongan de herramientas para adaptarla a sus contextos.

**Introducción**

Conociendo que en la sociedad actual predomina lo visual, la imagen está al orden del día. Ésta asociada a un dibujo es la puerta de entrada a la geometría. Según Alsina (1995) la geometría va asociada con el arte de saber mirar y ver y “las imágenes más bellas y armoniosas tienen un fuerte ingrediente geométrico” (p.60). La propuesta del trabajo de mosaicos tuvo su inspiración en la valoración de volver a ver y mirar la obra de la naturaleza y del hombre en especial. El saber ver y el saber interpretar no son sinónimos ni tampoco son instantáneos, y debe haber un proceso de aprendizaje para tales habilidades.

Siendo un contenido al alcance de todos, el arte, la biología, la arquitectura se podría matematizar con elementos de la geometría y así involucrar a todos en un trabajo geométrico desde los intereses particulares. Ubicados en el aula, es posible comenzar desde los niveles más bajos de comprensión para ir creciendo en contenidos y habilidades en forma democrática, donde cada alumno es actor fundamental de su propio proceso de aprendizaje. Esta perspectiva parte de lo concreto y desde allí se inicia un camino intencionado que eleve el pensamiento en cualquier nivel de la escolaridad. La intencionalidad mencionada significa que este proceso no se da sólo, se debe provocar y para esto el papel del docente es clave. Es él quien se encarga de diseñar las actividades, organizarlas en forma de secuencias o proyectos con una intencionalidad didáctica y nivel de profundización cada vez mayor, para que el alumno pueda experimentar el quehacer y pensar matemático ante una situación y desarrollar capacidades o habilidades que le son propias, valiosas y no se dan siempre fuera del colegio.

La secuencia que se presenta resulta en un momento de encuentro para resolver situaciones que sirven para promocionar el estudio de la geometría dándole, en un principio un sentido lúdico, y en el final un momento de creación, sin perder el objetivo fundamental que es el de motivar y desarrollar al máximo el potencial de los alumnos.

El trabajo se plantea grupal y por esto la creación es colectiva. La interacción entre alumnos alienta y enriquece la solución de problemas y aparecen nuevas ideas que confirman concepciones de los alumnos.

En este trabajo nos focalizamos en el desarrollo de habilidades geométricas básicas estimulando la comprensión de los estudiantes. Entendemos que es valioso observar que estas habilidades no son útiles sólo para el estudio de la matemática sino, en nuestra opinión, para la vida como educando. La habilidad visual, para dibujar, la verbal, lógica y para modelar son capacidades para una mayor y mejor observación de las maravillas de la creación.

### **Habilidades propias del estudio de la geometría**

Bressan (2013) considera que el desarrollo el estudio de la geometría comprende las siguientes habilidades: visuales, de dibujo y construcción, de comunicación, de razonamiento lógico/pensamiento y de aplicación o transferencia.

Describimos a continuación cada uno de los grupos de habilidades.

#### Habilidades visuales

Esta habilidad tiene que ver con la capacidad de obtener información a partir de que el estudiante observa de objetos reales o representaciones. Aquí se puede diferenciar dos tipos de habilidades visuales:

- a) Las relacionadas con la percepción de representaciones visuales externas. Éstas implican leer, comprender representaciones visuales además de gráficos y diagramas.
- b) Las concernientes al procesamiento de imágenes mentales. Tienen que ver con la posibilidad de manipular imágenes mentales y transformar en conceptos o en otra clase de información.

Según Bressan (2013) hay siete habilidades que están relacionadas con la visualización. Éstas son, en una breve síntesis:

✓ *Coordinación viso-motora*

Es considerada la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.

✓ *Percepción figura-fondo*

Es aquella habilidad de identificar una figura (el foco) en un dibujo más amplio (fondo).

✓ *Constancia perceptual o constancia forma, tamaño y posición*

## ***Propuestas para la enseñanza de la matemática***

---

Es la habilidad de reconocer que un objeto posee cualidades invariantes a pesar de que su imagen cambia al mirarlo desde otra posición.

✓ *Percepción de la posición en el espacio*

Es la destreza de relacionar un objeto o imagen visual con el mismo observador.

✓ *Percepción de relaciones espaciales entre objetos*

Es la pericia de ver dos o más objetos simultáneamente en relación con el observador y entre sí.

✓ *Discriminación visual*

Es la habilidad de diferenciar y hallar similitudes entre imágenes, objetos entre sí.

✓ *Memoria visual*

Es la habilidad de recordar con exactitud las características de un objeto no presente y relacionarlo con objetos presentes o no.

### **Habilidades de dibujo y construcción**

Se refiere a la habilidad para interpretar las ideas y representarlas a través de dibujos y esquemas. Está ligada al uso de representaciones externas que son, en matemática, obviamente los símbolos, trazos, construcciones, etc. que se asocian con la idea de un concepto. Sirven para poner en evidencia conceptos o imágenes internas y son medio para el estudio de las propiedades a nivel intuitivo.

### **Habilidades de comunicación**

Se refieren a la capacidad para emplear adecuadamente el lenguaje de la geometría. Se deben construir lazos entre el lenguaje natural y los símbolos facilitando la interpretación entre diferentes representaciones. Además es sabido que el escribir ayuda a refinar y profundizar la comprensión en general y la matemática en particular.

### **Habilidades de razonamiento lógico/pensamiento**

Comprende la capacidad de construir argumentos que siguen las reglas de la lógica formal y se utilizan para reconocer la validez de lo que se afirma.

Algunas de las habilidades lógicas que se pueden desarrollar en geometría son: abstraer conceptos u relaciones, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, desarrollar esquemas deductivos elementales, entre otros.

Además hay habilidades de creación y de aplicación o transferencia, siendo ejemplos de la primera, el crear, inventar imaginar explorar y descubrir conceptos y relaciones. Y de la segunda, por ejemplo trasladar una estructura de un dominio de conocimiento a otro distinto en principio.

### **Habilidades de aplicación o transferencia**

Esta habilidad es la que se considera necesaria para interpretar y analizar conceptos de la matemática para analizar el mundo que nos rodea. Esta habilidad denominada también de modelización es la prioritaria y en ella se relacionan las anteriores.

Hoffer (1981), por su parte, organizó en cinco grandes grupos las habilidades que desarrolla el estudio de la geometría. Las resume en visuales, de lenguaje, de dibujo, lógicas y para modelar. Como puede verse hay correspondencia entre la organización de Hoffer y de Bressan.

### Niveles de comprensión en geometría

En el aprendizaje de la geometría hay dos momentos bien marcados, el inicial donde prima la intuición, de naturaleza mayormente visual y el segundo que se hace de manera reflexiva, lógica y que es de naturaleza verbal. El primer momento tiene un carácter más subjetivo y el segundo más objetivo y analítico. La comprensión geométrica solo se alcanza si se logra avanzar hacia el segundo momento. Cabe señalar, a modo de ejemplo, que la visualización corresponde a saber ver el espacio con la intuición como motor, pero no se lograría comprensión si no se avanza en el análisis regido por leyes de la deducción lógica. Los resultados se tienen que poder expresar y comunicar, no basta “verlos”. El sentido de la vista no es absolutamente fiel a las formas de las imágenes. Muchos factores influyen en la percepción de las imágenes. La percepción visual, como el lenguaje, puede ser aprendida y exige el uso de ciertas habilidades para saber ver y saber interpretar. Lo mismo que la representación gráfica, que es un medio para comunicar resultados, expresar nuestras ideas, que también puede ser aprendida. Así pues la comunicación gráfica también es una habilidad para ejercitar. La comprensión se alcanzará en base al manejo del razonamiento, cuestión clave para la claridad y rigor de la ciencia.

El matrimonio Van Hiele (1957, citado en Gutiérrez, Jaime y Fortuny 1991) propuso específicamente para geometría una teoría de niveles de conocimiento y de fases de comprensión que permiten organizar la enseñanza y reconocer aprendizaje y comprensión alcanzada por los estudiantes. Estos niveles y fases son secuenciales y progresivos. Así que se va de lo mínimo, basando en observar una figura, hasta la mayor complejidad expresada en la demostración lógica pasando por estadios progresivos que no son posibles de saltar.

El modelo de Van Hiele propone cinco niveles de comprensión:

*Nivel 0 “Visualización”*: El nivel 0 implica que el alumno ve una figura en su totalidad, como un todo global.

El siguiente nivel es *descriptivo*, donde ya podemos distinguir ciertas propiedades de la figura.

*Nivel 1: “Análisis”*: Las personas pueden analizar partes y propiedades particulares de la figura.

El siguiente nivel es el de *deducción informal* donde las propiedades se organizan lógicamente, donde cada una sigue o se deduce de otra anterior.

## Propuestas para la enseñanza de la matemática

---

*Nivel 2 “Deducción informal”:* Las personas determinan las figuras por sus propiedades..

Luego llegará el nivel de *deducción formal* que la mayoría de los alumnos no alcanza naturalmente.

*Nivel 3 “Deducción formal”:* Las personas pueden desarrollar secuencias de proposiciones para logra deducir una propiedad de otra. Finalmente llegamos al último nivel.

*Nivel 4 “Rigor”:* los sujetos están capacitados para analizar con rigor de varios sistemas deductivos.

Es muy difícil que alumnos de nivel medio arriben a este nivel, pues requiere de la deducción de propiedades a partir de sistemas axiomáticos y conocimiento de otras geometrías.

Estudios de Van Hiele y de psicólogos soviéticos han demostrado que no depende de la edad la posibilidad del pasaje de un nivel a otro ya que debe haber una invitación de variadas experiencias que estimulen el avance. Y esta invitación es la que puede hacer un docente a través de contenidos y los métodos de enseñanza.

Este modelo tiene algunas particularidades importantes que indicamos a continuación:

1. *Secuencialidad en la adquisición de los niveles:* sigue un orden que no es posible alterar.
2. *Especificidad del lenguaje:* en cada nivel el lenguaje se va mejorando y completando.
3. *Globalidad y localidad:* investigaciones revelan que el nivel de razonamiento es local o sea que se razona en un nivel un concepto y no tiene por qué ser el mismo en otros conceptos.
4. *Intrínseco y extrínseco:* los objetos de un nivel se convierten en objetos de estudio en el otro ya que en el primero sólo se perciben formas hasta que en niveles más avanzados ya se analizan sus propiedades.
5. *Instrucción:* no se avanza de un nivel a otro sin una intencionalidad o experiencias personales. No tienen que ver con un aspecto biológico, ni con la edad.
6. *Emparejamiento:* si un estudiante se encuentra en un nivel de comprensión y el docente da una instrucción en un nivel superior, seguramente no se logren los resultados deseados.

Los alumnos irían adquiriendo este tipo de pensamiento gradualmente, según Van Hiele, ellos afirman que no se debe al crecimiento o desarrollo natural, sino de la instrucción internacionalizada.

El uso de mosaicos o rompecabezas es muy utilizado para el pasaje intencionado de un nivel a otro. Primero con una etapa de “*feel and find the shape*” que estimula el sentir y encontrar la figura para completar un rompecabezas.

## Propuestas para la enseñanza de la matemática

Hoffer (1981) asoció el estado específico de cada habilidad con el nivel de comprensión geométrica desarrollado por Van Hiele.

Consideramos como marco teórico para este trabajo, la noción de mosaicos de Bressan, junto con los conceptos de habilidades geométricas y su vínculo con la comprensión de Van Hiele.

HABILIDAD	NIVEL				
	I	II	III	IV	V
PARALELISMO					
LÓGICA					
TERMINAL					
PARALELISMO					
TERMINAL					

Adaptamos la tabla de Hoffer (1981) para relacionar cada habilidad con el nivel de comprensión de los estudiantes.

Hemos considerado como punto de partida una secuencia que plantea la búsqueda de patrones geométricos y el estudio de las figuras planas a partir de la observación y construcción de mosaicos. La propuesta está diseñada para trabajar, mayoritariamente, en pequeños grupos y también hay momentos de trabajo individual y en parejas según la actividad a realizar.

### Primera etapa del taller

Durante la implementación exploraremos las actividades que se realizan para reconocer el desarrollo de habilidades y el nivel de comprensión que se pone en manifiesto, y más aún el pasaje de un nivel de comprensión cada vez mayor.

El desarrollo de esta secuencia dejará en evidencia la posibilidad de generar actividades geométricas que, partiendo de actividades empíricas, logre desplegar el pensamiento racional y permita que los estudiantes desarrollen habilidades que podrán ser aplicables no sólo a esta materia.

### Segunda etapa del taller

Presentaremos brevemente las conceptualizaciones teóricas de Educación Matemática que dan sustento a la propuesta (las nociones mencionadas antes) y abriremos un espacio de intercambio con los docentes asistentes para considerar la adecuación de la secuencia a los distintos grupos de estudiantes de distintos años e instituciones.

### Impacto

Cuando surge la pregunta sobre qué se debe enseñar en una geometría para todos en la educación obligatoria y se piensa qué debe saber de un ciudadano normal, más allá de su profesión, aparece la frase del Dr. Luis Santaló (1997, p.18) sobre formar cabezas bien hechas y no saturadas de información inútil que no sirve para la vida, ni despiertan la curiosidad. Es por ello que este trabajo pretende ser un aporte para echar luz sobre lo importante del desarrollo de habilidades geométricas, caracterizar actividades que las

promuevan y evidenciar lo provechoso del estudio de la geometría desde los primeros cursos.

### **Referencias bibliográficas**

Alsina, C. (1995). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. (3° Reimpresión). Madrid: Ed. Síntesis.

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? De La enseñanza de la Geometría*. Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa, México.

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2013). *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. (3° Reimpresión). Argentina: Ed. Novedades educativas.

Gutierrez, Á. Jaime, A. y Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, pp.237-251 Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/749076>.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática*. Alfar: Sevilla, España, pp. 295-384.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *The Mathematics Teacher*, vol. 74(1), 11–18. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/27962295>

Santaló, L. (1997). Enfoques Hacia una didáctica humanista de la matemática. (3° Reimpresión). Buenos Aires: Ed. Troquel.

Van Hiele, P. (1999). Developing Geometric thinking through Activities with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, pp. 310-316.