FORMAÇÃO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA ESPACIAL ATRAVÉS DA CONSTRUÇÃO DOS "ESQUELETOS" POLIÉDRICOS DE PLATÃO

Jonathan Haryson Araújo Aguiar
Universidade Federal Rural do Semi-Árido, UFERSA. Brasil
jonathan.haryson@gmail.com

Resumo

São bastante visíveis as dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da matemática, em particular, na Geometria Espacial, com a construção e interpretação dos sólidos geométricos, em especial os Poliedros de Platão (Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro). Com isso, o referido trabalho de pesquisa propõe a utilização de materiais simples, com baixo custo e fácil acesso (canudos, barbantes e/ou fitilhos de plástico), de modo que o professor trabalhe com seus alunos, em uma perspectiva construtivista e colaborativa os "esqueletos" poliédricos de Platão, explorando elementos, analisando, propriedades, minimizando o grau de abstração dos envolvidos e tornando o ensino da Geometria Espacial mais atrativo.

Introdução

- Mas o que são sólidos geométricos? - Por que são somente cinco os sólidos de Platão e não seis, sete, oito? - E por que são de Platão esses Sólidos? - E quem é Platão?

Perguntas como essas, podem impulsionar ricas discussões nas aulas de geometria nas séries de ensino médio, se forem devidamente estimuladas pelo professor. O estudo da geometria espacial é um tanto complexo para o aluno, pois ele terá que usar da intuição, que por vezes é pouco estimulada, para imaginar um objeto em três dimensões, suas características, propriedades, entre outros problemas da geometria espacial.

O ensino da geometria é parte fundamental no processo de aprendizagem, dadas às características particulares para a formação do raciocínio, da imaginação e das relações espaciais dos alunos. Este trabalho apresenta a construção de sólidos regulares com o uso de materiais simples e de fácil acesso (canudinhos e barbantes) para proporcionar a interação do aluno com o objeto, estimulando a intuição e uma melhor assimilação do conteúdo.

Fazer com que o aluno produza o seu próprio material de estudo, ou seja, deixe de ser mero observador para ser construtor ativo, o fará trabalhar a visualização e uma melhor exploração das propriedades geométricas, e o professor por meio desse incentivo, ajudará o aluno no fortalecimento da sua intuição matemática e no seu poder de concentração, além de facilitar a transmissão do seu conteúdo.

Platão, filósofo grego em 350 a.C., estudou os poliedros, em especial os regulares, no seu livro “Timeu” apresenta a teoria segundo a qual os quatro "elementos" aprovados como constituintes do mundo - o fogo, o ar, a água e a terra - eram todos associados de sólidos minúsculos. Além disso, defendia que o mundo só poderia ter sido feito a partir de corpos perfeitos, estes elementos deveriam ter a forma de sólidos regulares. Associou ainda cada sólido platônico a esses “constituintes” da matéria, como eram conhecidos na altura: Ao cubo foi-lhe atribuída a terra, por ser o mais lento e mais estável de todos; Ao tetraedro o fogo, por ser o mais leve e o mais violento dos elementos; Como o mais incerto e fluido, à água foi-lhe atribuído o Icosaedro, o sólido regular capaz de rolar mais facilmente; Quanto ao ar, Platão observou que: "*o ar é para a água o que a água é para o ar,"* e concluiu de forma algo inexplicável, que o ar devia ser o octaedro. Finalmente, ao último sólido regular, concedeu ao dodecaedro a representação da forma de todo o universo.

Tetraedro – Fogo

Cubo - Terra.

Octaedro – Ar

Dodecaedro – Universo

Icosaedro – Água

Platão observou ainda, a limitação do número de poliedros regulares estava associada à possibilidade de construção dos ângulos poliédricos. Notou que estes eram construtivos quando a soma dos ângulos internos do polígono que o formava era inferior a 360°.

Referencial teórico

História dos poliedros

A Humanidade, na sua história, estudou a Matemática em ordem inversa à que foi seguida nas suas escolas, ou quase. De fato a numeração decimal é a primeira coisa que se aprende. Mal se vai à escola, e foi, pelo contrário, uma tardia conquista de uma humanidade já doutíssima em geometria. Poder-se-ia dizer que a geometria é em vários milhares de anos mais velha do que a Aritmética. Os gregos tinham um verdadeiro culto pela geometria, que elevaram a um alto grau de perfeição. Consideravam-na uma ciência que habitua a raciocinar, que refina a inteligência; diziam pelo contrário que não era preciso estudá-la com fins práticos, mas para "a honra da mente Humana”.

Platão (sec II a.C.), o grande filósofo aluno de Sócrates, foi o primeiro matemático a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares: o cubo, tetraedro, octaedro dodecaedro e o icosaedro. Esses poliedros são designados sólidos de Platão em virtude do texto de platão sagundo o qual:

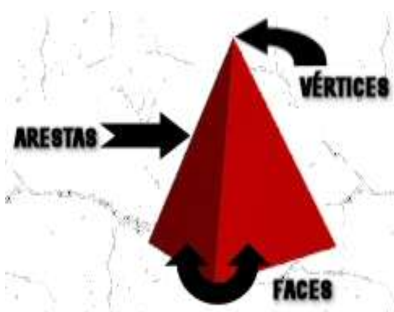
"Um poliedro é regular quando as faces são polígonos regulares congruentes, todas as arestas são congruentes e todos os vértices são congruentes. Isto significa que existe uma simetria do poliedro que transforma cada face, cada aresta e cada vértice numa outra face, aresta ou vértice."

No entanto ainda existem dúvidas se o teorema "só há cinco sólidos platónicos" se deve a Platão ou a Pitágoras. Mas provar-se-ia mais tarde que este teorema era falso e Cauchy provou que há nove poliedros regulares e que não existem mais. O erro do teorema de Platão ou de Pitágoras reside no fato de os poliedros regulares por eles considerados não serem obrigatoriamente convexos.

Poliedros (elementos, classificação e relações)

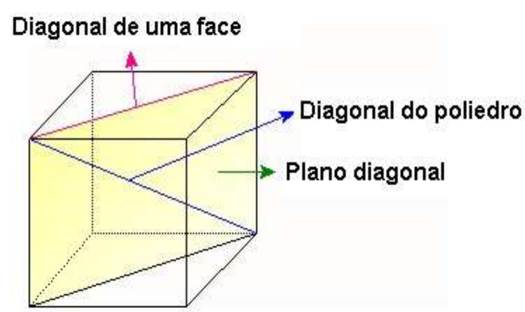
São sólidos geométricos com quatro ou mais faces em forma de polígonos.

Etimologicamente, *poli* quer dizer vários e a terminação *edro* provém da palavra *hedra*, que em grego significa face. Os bicos de um poliedro são ângulos poliédricos formados por faces planas, que são polígonos.



Faces: são as figuras planas que limitam o sólido;
Arestas: são os segmentos de reta que limitam as faces;
Vértices: são os pontos de encontro das arestas.

Diagonal: Segmento de reta que une um vértice a outro, não consecutivo ao mesmo.



Os *ângulos poliédricos* têm certa propriedade: sua soma, por maior que seja o número de faces que convergem para o vértice em questão, é sempre menor do que 360°. Isto é, se chamarmos de A, a soma dos ângulos compreendidos entre as arestas de um poliedro que chegam a um mesmo vértice, temos que:

A < 360°

Um poliedro é chamado convexo, em relação a uma de suas faces, se está todo contido no mesmo semi-espaço determinado por esta mesma face. Caso contrário ele será não convexo.

É uma figura plana formada por uma linha poligonal fechada. Do grego, poli quer dizer vários e gonos significa ângulos.
Um poliedro convexo é chamado regular se:

- As suas faces forem polígonos regulares, todas com o mesmo número de lados;
- Os seus ângulos poliédricos possuem a mesma medida.

Poliedros platônicos

Diz-se que um poliedro é platônico se, e somente se:

I. For convexo;
II. Em todo vértice concorrer o mesmo número de arestas (*m*);
III. Toda face tiver o mesmo número de arestas (*n*);
IV. For válida a relação de Euler $(V+F=A+2)$.

- Só existem cinco poliedros de Platão

Demonstração:

De fato, por III. cada umas das *F* faces tem *n* arestas ($n \geq 3$), e como cada aresta está presente em duas faces, temos

$$n.F = 2.A \Rightarrow F = \frac{2.A}{n} \quad (*)$$

Por II. cada um dos V vértices tem *m* arestas ($m \geq 3$), e como cada aresta tem dois vértices, temos

$$m.V = 2.A \Rightarrow V = \frac{2.A}{m} \quad (**)$$

Por IV. vale a Relação de Euler

$$V - A + F = 2 \quad (***)$$

Substituindo (*) e (**) em (***) teremos

$$\frac{2.A}{m} - A + \frac{2.A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad \text{(i)}$$

Se tivéssemos *m* e *n*, simultaneamente, maiores que 3, ocorreria uma contradição em (i), visto que A, representando o número de arestas, deve ser positivo. Observe:

$$\left.\begin{cases} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{4} \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{A} \leq 0 \Rightarrow A \leq 0$$

Dessa forma:

- Quando $n = 3$, em (i) teremos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{m} = \frac{1}{A} \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{m} > 0 \Rightarrow m < 6$$

ou seja, vértices com três (m = 3), quatro (m = 4) ou cinco arestas (m = 5).

- Quando $m = 3$, novamente em (i) teremos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n < 6$$

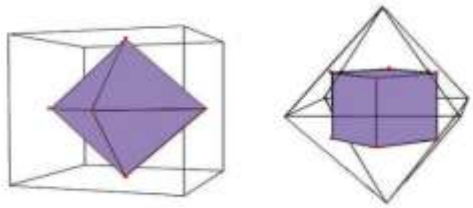
ou seja, faces triangulares (n = 3), quadrangulares (n = 4) ou pentagonais (n = 5).

Analisando as possibilidades:

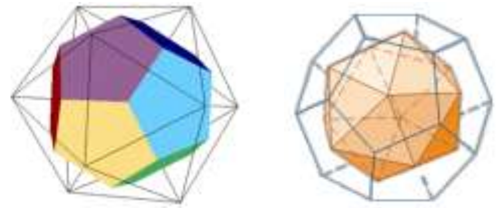
m	**n**	**A**	**V**	**F**	**Poliedro**
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	8	6	Hexaedro
4	3	12	6	8	Octaedro
3	5	30	20	12	Dodecaedro
5	3	30	12	20	Icosaedro

Duais de um sólido platônico

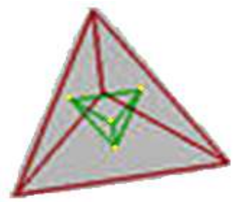
O dual de um sólido é um outro sólido que se obtém unindo os pontos centrais das faces adjacentes do sólido original.



Cubo/Octaedro



Dodecaedro/Icosaedro



Tetraedro/Tetraedro

Observações:

I. O dual de um sólido Platônico é sempre um sólido Platônico;
II. O número de faces de um sólido platônico é igual ao número de vértices do seu dual. Analogamente o número de vértices do mesmo sólido platônico em questão é igual ao número de faces do seu dual. (Ver tabela da pág. 10)

Justificativa

São bastante visíveis as dificuldades encontradas atualmente no aprendizado da matemática pela maioria dos alunos. Essas dificuldades seguem ainda mais acentuadas no que diz respeito ao ensino da geometria.

Pensando na dificuldade que muitos dos professores têm em ministrar conteúdos de geometria espacial, e ainda na maior que os alunos têm em compreender a maneira como o professor transmite este conteúdo, justifica a realização da pesquisa (voltada para estudantes e em especial a professores de matemática de séries iniciais ao ensino médio) a necessidade da adoção do uso de materiais concretos (de baixo custo) com o intuito de incentivar o professor a trabalhar os mesmos concomitantemente aos conceitos básicos da geometria espacial (em especial os poliedros platônicos) em sala de aula de modo a trabalhar a inteligência espacial de cada um dos seus alunos e minimizar os efeitos sobre o grau de abstração dos mesmos, que veem os objetos tridimensionais em uma região planar que é a lousa (quadro negro) ou no papel.

OBJETIVOS

- Ampliar a concepção e percepção espacial, estimulando a compreensão de regras, a sua percepção, discriminação visual e formação de conceitos.

- Identificar e analisar as dificuldades encontradas pelos alunos no que diz respeito à aplicação de fórmulas e identificação dos elementos de um sólido geométrico, possivelmente oriundas de uma má formação nas séries iniciais.

- Desenvolver (docente) habilidades, técnicas e estratégias de modo que o aluno possa interpretar e solucionar a situação problema de maneira produtiva, verificando o desempenho do mesmo com relação à série cursada.

Formulação do problema

Em que consiste as dificuldades epistemológicas e cognitivas com relação à caracterização de sólidos geométricos, em especial os Poliedros de Platão, por parte dos alunos das séries iniciais ao ensino médio e qual a abordagem metodológica do corpo docente necessária de modo a recuperar esta “deficiência espacial”?

Hipóteses

As práticas, incentivos e o acompanhamento dos alunos em qualquer que seja a etapa do ensino básico, poderá trazer um aumento significativo no aprendizado da geometria espacial, sem que os próprios venham somente atrelar diversas fórmulas e expressões, mas também agregar conceitos ao passo de compreender seus elementos e propriedades, mediante os passos da construção dos sólidos, em especial, aos poliedros de Platão, tornando-o com o tempo e aperfeiçoamento sujeito ativo de suas descobertas geométricas.

METODOLOGIA

Inicialmente, apresentam-se os objetivos da pesquisa, traçando uma visão histórica sobre os poliedros em geral e em especial os regulares (Sólidos de Platão).

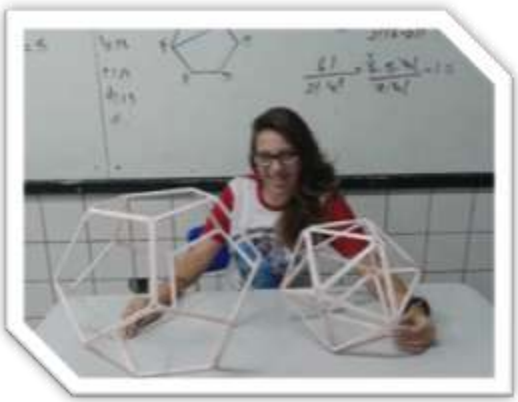
Mostra-se a construção dos esqueletos (casca) de alguns sólidos de Platão, começando com o tetraedro e octaedro. Em seguida a turma será dividida em grupos, de modo que os integrantes tentem construir os demais poliedros regulares (Dodecaedro, Cubo e Icosaedro).

Durante o processo de construção dos poliedros, o professor percorrerá cada grupo e os ajudará, apenas em caso de dúvidas, de modo que não interfira no processo de construção individual e principalmente no raciocínio dos integrantes do grupo.

Ao final das construções dos esqueletos, cada equipe ficará encarregada de expor (geometricamente) as propriedades de cada um dos sólidos, com o intuito de que os mesmos levem até sala de aula, estimulando a visão geométrica de seus alunos, na qual é pouco explorada, sem que o assunto se torne demasiadamente exaustivo pelo seu número de fórmulas.

Serão explorados os conceitos iniciais da geometria por meio desta atividade. Em seguida, fazendo uso das propriedades encontradas pelos participantes na atividade, irá se estabelecer para os demais a fórmula de Euler para poliedros e de fato, com isso mostrando-se que só existem cinco sólidos de Platão: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.






Referências bibliográficas

Boyer, (1974). *História da Matemática*; 1906. Tradução: Elza F. São Paulo: Edgar Blucher.

Carvalho, P.C. P.(1993). *Introdução à Geometria Espacial*. Rio de Janeiro: CPM-SBM.

Machado, N.J. (1989). *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. Vivendo a Matemática. São Paulo: Editora Scipione.