CONCEPÇÕES DE UM GRUPO DE PROFESSORES SOBRE OS NÚMEROS IRRACIONAIS E SOBRE SEU ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Ruy Cesar Pietropaolo- Prof. Dr[a]. Olga Corbo
rpietropaolo@gmail.com- olgacorbo@gmail.com
Universidade Bandeirante de São Paulo – Brasil
Doutor em Educação Matemática

Tema: Formação e Atualização de Professores
Modalidade: Comunicação Breve
Nível Educativo: Formação e Atualização Docente
Palavras-chave: Números Irracionais; Conhecimento Matemático para o Ensino.

Resumo

Apresentamos, neste artigo, uma interpretação de concepções explicitadas por um grupo de professores de Matemática de escolas públicas da cidade de São Paulo, sobre o conceito de número irracional e seu ensino, na Educação Básica. Os dados examinados foram coletados pela aplicação de questionários envolvendo itens relativos ao conhecimento do conteúdo específico "números racionais e irracionais" e conhecimentos pedagógicos sobre esse tema, constituindo-se em instrumento diagnóstico de coleta de dados para um estudo a ser desenvolvido, visando investigar os conhecimentos necessários ao professor, para o ensino desse tema. As respostas do grupo a esse questionário revelaram concepções inconsistentes sobre os números racionais e, consequentemente, sobre os irracionais, e indicaram que determinados aspectos importantes relativos a esses números – por exemplo, a incomensurabilidade de grandezas e sua relação com os irracionais –, não faziam parte da imagem conceitual construída pelos professores, comprometendo, igualmente, os conhecimentos pedagógicos e curriculares relativos a esse assunto. Esses resultados colocam em destaque lacunas nos programas praticados nos cursos de formação inicial e/ou continuada de professores de Matemática, no que se refere aos números irracionais e seu ensino e evidenciam a necessidade de uma reflexão a respeito da importância desse tema nos currículos de Matemática.

Introdução

Este artigo apresenta uma análise dos resultados do instrumento diagnóstico aplicado para o desenvolvimento de um estudo a ser realizado com o propósito de investigar os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para explorar noções relativas ao conceito de número irracional na Educação Básica.

Segundo orientações contidas em documentos oficiais de referência curricular, a abordagem inicial dos números irracionais está prescrita para os dois últimos anos do Ensino Fundamental (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998, p.83; Proposta Curricular do Estado de São Paulo, 2008, p.52).

Trata-se de conceito de difícil compreensão, por não ser evidente. Ou seja, intuitivamente, é difícil, sobretudo para um estudante do Ensino Fundamental, aceitar a impossibilidade de encontrar um segmento de reta, por menor que seja, que caiba um número inteiro de vezes, por exemplo, no lado e na diagonal de um quadrado qualquer. Também não é intuitiva a ideia de que, conquanto o conjunto dos números racionais seja denso em toda a reta numérica, existem infinitos pontos nessa reta que não correspondem a números racionais.

Por outro lado, se considerarmos a importância de iniciar desde a Educação Básica, uma percepção da Matemática, não apenas como ferramenta útil para a resolução de problemas práticos, mas como estrutura logicamente organizada, que resulta do esforço da mente humana, a abordagem que se escolhe para apresentar o número irracional aos estudantes deve, necessariamente, propiciar uma compreensão que vá além das manipulações com radicais, e que permita também a apropriação de noções que são fundamentais para a construção do conceito de número real.

Assim, tomamos como ponto de partida, a ideia de que a abordagem dos números irracionais requer do professor um repertório abrangente de conhecimentos, que permita fazer as adequações necessárias ao nível de compreensão dos alunos e favoreça algumas articulações desse assunto com outros conteúdos já estudados.

A esse respeito, destacamos que os resultados de pesquisas realizadas sobre a construção do conceito de número irracional indicam que o trabalho necessário de aprofundamento das noções relativas a esse conteúdo ao longo da escolaridade – incluindo o Ensino Médio e os cursos de graduação – vem sendo, de certa forma, negligenciado, possivelmente com base na ideia de que a introdução que se faz no Ensino Fundamental é suficiente para a compreensão de conceito tão delicado.

Por exemplo, Fischbein (1995) e Sirotic (2004) investigaram a compreensão dos números irracionais em futuros professores de Matemática e identificaram dificuldades relativas às definições, às representações e à classificação de números racionais, irracionais e reais.

Em pesquisa realizada por Corbo (2005), sobre a possibilidade de utilizar a seção áurea como contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta, embora o grupo de sujeitos fosse constituído por estudantes do último ano de Licenciatura em Matemática, evidenciaram-se limitações relativas à distinção entre grandezas comensuráveis ou incomensuráveis e à relação entre números irracionais e incomensurabilidade de grandezas. (p.206).

Outros estudos relacionados a esse tema, dentre os quais destacamos Tall & Schwarzenberger (1978), Miguel (1993), Santos (1995) e Ripoll (2004) indicam, a nosso ver, que a complexidade inerente à construção desse conhecimento requer uma reflexão não apenas sobre as estratégias utilizadas para a sua apresentação a alunos do Ensino Fundamental, mas também sobre os conhecimentos indispensáveis ao professor para a seleção e aplicação dessas estratégias e, igualmente, a respeito da atenção dada a esse conteúdo, nos cursos de formação de professores de Matemática.

Justifica-se, assim, a escolha do grupo de sujeitos de nossa pesquisa, constituído de 23 professores da rede pública da cidade de São Paulo, visto que a reconstrução de noções relativas aos racionais, necessária aos alunos, para a compreensão dos números irracionais e reais, requer o auxílio do professor e, assim sendo, tal reconstrução é imprescindível também no repertório de saberes acumulados por esse professor.

A fundamentação teórica

Como base teórica para a elaboração do instrumento diagnóstico, cujos resultados são examinados neste artigo, tomamos as categorias de conhecimentos necessários ao professor de Matemática, estabelecidas por Ball et al (2008) em: conhecimento do conteúdo (comum/especializado); conhecimento do conteúdo e dos estudantes e finalmente, conhecimento do conteúdo e do ensino.

Para a análise das respostas dos professores, além das categorias de conhecimentos mencionadas no parágrafo anterior, levamos em conta também a noção de *imagem conceitual*, definida por Tall e Vinner (1981) como estrutura cognitiva total que se constrói, ao longo do tempo, na mente de uma pessoa, sobre determinado conceito matemático, envolvendo impressões, representações mentais e visuais e descrições verbais relativas a propriedades e processos relativos àquele conceito. Nesse sentido, entendemos que uma *imagem conceitual* rica, relativa aos números irracionais, resultante de experiências vivenciadas por um professor, seria condição necessária para proporcionar a oportunidade de construção de uma *imagem conceitual* igualmente rica, em seus alunos, sobre esse conteúdo.

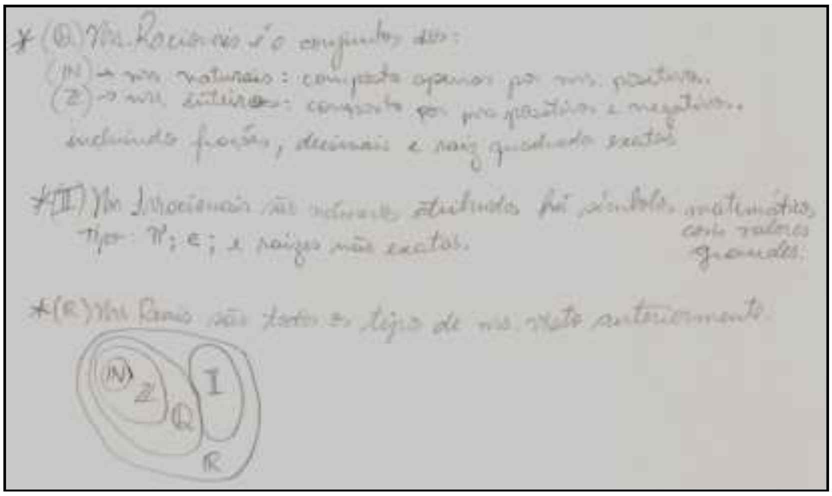
Sobre os dados diagnósticos

O questionário aplicado aos professores, aqui identificados por professor (A), (B), (C), etc., constitui-se de 11 itens que versam sobre os conceitos de números racionais e irracionais, em suas distintas representações e interpretações. Além disso, alternam-se as questões sobre conhecimentos do conteúdo específico (números racionais ou irracionais) ou sobre conhecimentos pedagógicos necessários ao professor para o ensino desse conteúdo.

Os resultados indicaram lacunas nos conhecimentos dos professores, em relação à ampliação dos campos numéricos, desde o conjunto dos números naturais, que transparecem em respostas formuladas por: "números racionais são todos os números inteiros (somente) e positivos" (prof. C) e "já os números irracionais são números que não fazem parte dos reais e são as dízimas não periódicas e o mais famoso é o número π" (prof. R).

Tais afirmações lançam dúvidas sobre a consolidação, inclusive do conceito de número natural, por alguns desses professores. Mostram, igualmente, dificuldades relacionadas à classificação de números racionais, irracionais ou reais, que, caracterizados de forma ambígua, deixam pontos vulneráveis que poderiam levar os alunos a formar ideias incompletas ou incorretas sobre esses conjuntos numéricos.

Por exemplo, conforme as definições explicitadas pelo professor (G) no protocolo a seguir, o número zero não seria inteiro, nem racional. Além disso, não há uma indicação clara sobre o fato de ser finita, ou infinita e periódica, a representação decimal dos números racionais, o que permitiria classificar, por exemplo, o número 0,101001000100001... como racional.



Protocolo Prof. (G)

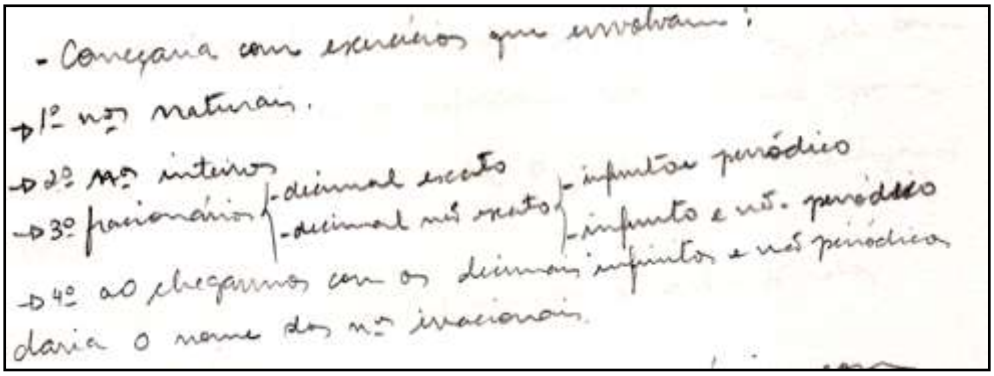
Além disso, observando o diagrama de Venn utilizado por esse professor para representar a relação de inclusão entre os conjuntos numéricos, um aluno poderia concluir que existem outros números reais que não são racionais nem irracionais.

Observa-se, assim, certa imprecisão, quanto ao tratamento que se dá à ampliação e à caracterização dos conjuntos numéricos, ao longo do Ensino Fundamental. O professor (H), por exemplo, explicando como introduz o conjunto dos números irracionais a alunos do Ensino Fundamental, diz: "Normalmente inicio com os conjuntos, pois ao longo do estudo o aluno conhece os números naturais, inteiros, racionais e reais. Pode não conhecer os conjuntos N, Z, Q, R, mas os números na 8ª série provavelmente ele já tenha visto."

É possível que esse professor tenha se referido a alunos que utilizam números naturais, inteiros, racionais e reais na resolução de problemas, mas não são capazes de classificar esses números ou de definir, por exemplo, um número racional como número que pode ser representado na forma a/b com a e b inteiros e b distinto de zero. Parece-nos também que, nessa abordagem, a ideia de número real é construída antes e independentemente da construção do conceito de número irracional.

Para as questões que investigaram os conhecimentos pedagógicos dos professores sobre números irracionais, que dizem respeito à formulação de definições, à seleção de representações e de justificativas convincentes, à escolha de exemplos que poderiam propiciar a compreensão desse conteúdo por alunos do Ensino Fundamental, também foram apresentadas respostas que evidenciam falhas relacionadas às definições de números racionais e irracionais.

Como exemplo, para a questão enunciada por: "Que estratégias você considera que um professor deveria utilizar, para propiciar a alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, a construção do significado de número irracional?", sete professores sugeriram a proposição de situações que envolvam operações com resultados irracionais, provavelmente como estratégia que provoque o impasse da impossibilidade de se obter um resultado racional. O protocolo a seguir exemplifica essas indicações:


- Começaria com exercícios que envolvam:
→ 1º nºs naturais.
→ 2º nºs inteiros
→ 3º fracionários - decimal exato
- decimal não exato - infinito periódico
- infinito e não periódico
→ 4º ao chegarmos com os decimais infinitos e não periódicos
daria o nome dos nºs irracionais.

Protocolo Prof. (E)

Sugestões como estas deixam transparecer inconsistências relacionadas também às representações de números racionais e irracionais, visto que, indiretamente, admitem a possibilidade de representar um número irracional em forma de fração.

Por outro lado, nove professores do grupo indicaram atividades experimentais envolvendo a medição de segmentos ou do perímetro e do diâmetro de figuras circulares, para a apresentação do número π, sem, no entanto, qualquer menção à obtenção de valores aproximados ou aos possíveis esclarecimentos sobre a insuficiência dessa abordagem, para uma caracterização dos números irracionais.

Apenas dois professores aludiram à construção da espiral de triângulos retângulos cuja hipotenusa tem medida irracional, embora não a tenham associado à localização de pontos na reta, ou à possibilidade de utilizar essa abordagem para conduzir uma discussão sobre a existência de pontos na reta, que não correspondem a números racionais.

Finalmente, nenhum dos participantes do grupo se referiu ao estudo da incomensurabilidade de grandezas, como parte do trabalho dedicado à construção do conceito de número irracional. Pelo contrário, as considerações sobre grandezas incomensuráveis foram feitas pelos professores de maneira bastante vaga, levando-nos a conjecturar sobre a ausência, no repertório de conhecimentos do grupo, de uma compreensão desse conceito e também sobre a ausência de conexão entre números irracionais e grandezas incomensuráveis.

Observa-se nas respostas do grupo, conforme se verifica nos excertos a seguir, certo afastamento da geometria, quando se trata da abordagem do conjunto dos números irracionais, quer por limitações reconhecidas pelos próprios professores, quer pela previsão das dificuldades que serão enfrentadas pelos alunos:

> Acho complicado explicar número irracional através da geometria para uma turma da 8ª série ou até do E. M.. Porque o aluno tem uma noção de que Geometria é algo que se trabalha com medidas. O conceito do aluno em Geometria é o conceito de "medir", calcular uma "área" para colocar um piso, um tapete. Nesta idade que o aluno está a Geometria é muito concreta. (prof.H, grifo do professor).
> Sinceramente, não, pois não domino geometria e nem tenho noção de como eu faria essa abordagem. (prof. J).

Outras respostas contêm reflexões que, provavelmente, indicariam uma concepção de grandezas incomensuráveis como grandezas que não podem ser medidas, como expressou o professor (T), dizendo: "O que pode ser medido? O que não pode ser medido? O conceito de número racional como representante de números 'sem fim'".

Uma interpretação dos resultados

Tais respostas revelaram, a nosso ver, que o conceito de incomensurabilidade de grandezas não fazia parte da *imagem conceitual* deste grupo de professores.
Analisando esses resultados sob o ponto de vista de Ball et al (2008), a ausência de domínio desse conteúdo específico implicaria igual ausência de conhecimentos para o seu ensino. Segundo esses autores, não são conhecimentos necessários ao professor porque devem (necessariamente) ser ensinados aos alunos - são necessários para que o professor desempenhe, de forma responsável, o seu papel de ensinar (p.8).

Ou seja, a ausência de conhecimentos sobre o significado geométrico dos números irracionais implica também desconhecimento das necessidades que resultaram na criação desse conjunto de números e, consequentemente, implica a falta de argumentos para convencer os alunos da importância do estudo desse conteúdo. Além disso, limita a rede de conexões possíveis entre os números irracionais e outros campos da Matemática – por exemplo, entre o campo dos Números e operações (que envolveria definições; representações; classificação de números como racionais, irracionais ou reais e operações envolvendo esses números) e o campo das Grandezas e medidas (que permitiria ao aluno a percepção da indispensabilidade dos irracionais, para a realização – matematicamente, falando – da medida de quaisquer grandezas).

Restringe, igualmente, as possibilidades de seleção e organização de atividades, empobrecendo assim, também as possibilidades de ampliação da *imagem conceitual* que está sendo constituída na mente dos alunos, pela qual o professor é, a nosso ver, o principal responsável. Isto é, mesmo que se opte por uma abordagem apenas inicial que leve em conta o nível de compreensão dos alunos, é o domínio que o professor tem a respeito desse assunto que permitirá a transformação do conhecimento (conforme foi construído pelo professor) em conhecimento a ser ensinado – acessível, compreensível aos alunos.

Em nossa interpretação, os resultados aqui analisados deixam transparecer lacunas nos programas praticados nos cursos de formação de professores de Matemática, no que concerne aos números irracionais e ao seu ensino e, além disso, evidenciam a necessidade de uma discussão e de uma reflexão sobre a importância e a indispensabilidade desse conteúdo, nos currículos de Matemática.

Referências bibliográficas

Ball, D. L. et al. (2008). *Content knowledge for teaching: what makes it special?* In: Journal of Teacher Education, November/December, vol. 59.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Corbo, O. (2005). *Seção Áurea: um contexto para desenvolver a noção de incomensurabilidade de segmentos de reta*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP.

Fischbein, E. et al. (1995). *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers.* Educational Studies in Mathematics, Boston: Kluwer Academic Publishers, p. 29-44.

Miguel, A. (1993). *Três estudos sobre história e Educação Matemátic*a. Tese de doutorado, Faculdade de Educação. Campinas: UNICAMP.

Ripoll, C. C. (2004). *A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio***.** In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador.

Santos, V. M. (1995). *O infinito – concepções e consequências pedagógicas*. Tese de doutorado. Faculdade de Educação Universidade de São Paulo.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação (2008). *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*/Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE.

Sirotic, N. (2004). *Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality*. Dissertação (Mestrado) – Simon Fraser University, Canadá.

Tall, D. O.; Schwarzenberger, R. L. E. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits,* in: Mathematics Teaching, 82, 44-49. University of Warwick.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.