

LA MATEMÁTICA EN DECISIONES SOBRE DISTINTOS NIVELES DE PRODUCCIÓN

María Rosa Rodríguez, Sandra Noemí Franco y Gustavo Ariel Sota
mrrodriguez@face.unt.edu.ar, sandranfranco@hotmail.com, gustavosota1@hotmail.com
Universidad Nacional de Tucumán - Argentina

Tema: Matemática y su Integración con otras Áreas.

Modalidad: CB

Nivel Educativo: Terciario

Palabras Claves: Modelos Matemáticos, Producción, Contribución Marginal, Costos

Resumen

La Educación Matemática hace hincapié en el desarrollo del pensamiento lógico-formal, procurando lograr personas competentes para la resolución de problemas. Esto es importante en el quehacer económico, donde los empresarios deben adoptar decisiones óptimas para lograr mayores beneficios.

El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia de la Matemática y su vinculación con decisiones en el campo económico, cuando sufren modificaciones los factores de producción sobre diferentes niveles de actividad y, el consecuente comportamiento de los costos variables y fijos. Se integra la teoría con la práctica y se construyen modelos matemáticos que muestran las variaciones en los costos y beneficios de una empresa frente a sucesivos cambios en los niveles de producción. También, se recurre a representaciones gráficas de las contribuciones marginales totales, costos variables y costos fijos que muestran el objetivo fundamental del empresario, lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido. Con ello, se intenta generar, en estudiantes y usuarios, un nuevo significado operativo, predominando una metodología que explica y predice fenómenos económicos.

Esta propuesta permite a los docentes de Matemática del área económica utilizarla para promover un pensamiento no lineal y una cierta intuición racional, capacitando a sus alumnos para encontrar múltiples alternativas de solución.

1.- Introducción

La Educación Matemática hace hincapié en el desarrollo del pensamiento lógico-formal, procurando lograr personas competentes para la resolución de situaciones problemáticas mediante algoritmos, procesos lógicos, estimación de resultados, la construcción de modelos matemáticos y la utilización de procedimientos del cálculo. Esto es importante en el quehacer económico, donde los empresarios deben adoptar decisiones óptimas para lograr mayores beneficios. De allí, la importancia de los aprendizajes significativos y el desarrollo de habilidades generales o procedimientos matemáticos.

En las últimas dos décadas se han desarrollado nuevas teorías, tecnologías y filosofías: de la información, de la comunicación, del lenguaje, de la transposición, etc., que cuestionan los modos tradicionales y han proporcionado nuevas herramientas conceptuales y materiales para la producción de conocimientos.

El inicio de una actividad económica, está sujeto a la incidencia de factores endógenos y exógenos, al comportamiento de los mercados internos y externos, etc. Estos elementos, de manera aislada o concurrente, condicionan el quehacer económico de los sujetos.

Al examinar las modificaciones frente a variaciones en la magnitud de los costos, los encargados de tomar decisiones racionales y beneficiosas en una institución realizan acciones, sólo si el beneficio excede el costo adicional de hacerlo.

El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia de la Matemática y su vinculación con las decisiones en el campo económico, cuando sufren modificaciones los factores de producción sobre diferentes niveles de actividad y, el consecuente comportamiento de los costos. Dicha vinculación surge de la necesidad de integrar la teoría con la práctica y construir modelos matemáticos que muestran las variaciones en los costos y beneficios de una empresa frente a sucesivos cambios en los niveles de producción.

Si una empresa logra un beneficio produciendo una cantidad determinada de unidades en un período, se observan cambios en las utilidades frente a adecuados cambios en la producción, es decir se incrementan los niveles de producción y se calculan las utilidades conociendo los costos.

2.- Conceptos Fundamentales en Decisiones Económicas

2.1.- Costo Total

Según el comportamiento de los costos ante cambios en el nivel de actividad, podemos distinguir:

1. *Costos Fijos, Constantes o Estructurales*: son aquellos costos totales que se mantienen más o menos constantes ante cambios en el nivel de actividad.

No depende del nivel de producción y/o ventas de la empresa. Es una cantidad determinada, independiente del volumen del negocio. Por ejemplo, la empresa tendrá que pagar todos los meses el alquiler de las oficinas, el sueldo de los empleados, la financiación de los equipos informáticos, etc., independientemente del comportamiento de sus ventas y sus niveles de producción.

Los costos fijos no son permanentemente fijos, sino que llegado a ciertos niveles de actividad pueden variar. Si la producción aumenta, la empresa se puede ver obligada a contratar más personal y alquilar oficinas adicionales. Si la producción disminuye, la empresa puede reducir su planta y trasladarse a oficinas más pequeñas. Por ello, los que se denominan costos fijos sería más correcto llamarlos costos semifijos.

2. *Costos Variables*: son aquellos costos que aumentan o disminuyen frente a cambios en el nivel de actividad.

Dependen del volumen de producción y/o ventas de la compañía. Si la producción fuera nula, estos costos serían prácticamente cero. Por ejemplo, en una empresa constructora, el costo de los ladrillos depende del volumen de obra.

Toda empresa tendrá una serie de costos fijos y de costos variables. Incluso algunos costos que son fijos para una empresa, pueden ser variables para otra, y viceversa.

Podríamos sintetizar que, en el corto plazo, los costos fijos están en función del tiempo y los costos variables en función de la cantidad producida y/o vendida.

Esta clasificación de los costos no es absoluta. Algunos se mantienen constantes, mientras que otros experimentan modificaciones al pasar de un nivel de producción a otro. En cualquier caso existen modificaciones en los costos.

En la cuantificación, el costo total es la suma del costo fijo total más el costo variable total, donde el costo variable total es el producto entre el costo variable unitario y la cantidad producida:

$$CT = CF + cv * Q$$

2.2.- Costos y Beneficios

Se presentan situaciones comerciales donde los empresarios deben adoptar las decisiones más convenientes, a fin de lograr mayores beneficios, utilidades o rentas.

El costo-beneficio es una lógica basada en el principio de obtener los mejores resultados al menor esfuerzo invertido, tanto por eficiencia técnica como por motivación humana. Si los beneficios superan el costo son exitosos, caso contrario fracasan.

El análisis de costo-beneficio es una técnica importante dentro de la teoría de la decisión. Determina la ventaja de un proyecto de inversión mediante la valoración posterior de sus costos y beneficios, con el fin de evaluar su rentabilidad. El proyecto puede consistir en el desarrollo de nuevos productos, adquisición de nuevas maquinarias o sucesivos cambios en los niveles de producción de un negocio en marcha.

La decisión de aumentar la capacidad de una actividad dependerá de que el nuevo nivel de producción brinde mayor beneficio que el que puede obtenerse ocupando la capacidad actual. El beneficio o utilidad se define:

$$B = I - CT$$

donde el ingreso **I** es la cantidad que recibe una empresa por venta de productos o servicios. $B = pv * Q - (CF + cv * Q)$ entonces $B = pv * Q - cv * Q - CF$

2.3.- Análisis Marginal

Una herramienta central de la investigación económica es conocida como *análisis marginal*, que analiza el cambio en los costos y beneficios frente a cambios incrementales en las acciones. La cuestión central en el análisis marginal es si los beneficios esperados de la acción superan el costo añadido.

El análisis marginal contribuye a equilibrar los costos y beneficios de las acciones adicionales, ya sea para producir más o consumir más y determina si los beneficios superan los costos, aumentando la utilidad.

Se recurre al análisis marginal cuando se presentan modificaciones en los costos fijos, en los costos variables unitarios o en los precios de venta. O sea, cuando existen cambios en alguno de los términos de la expresión:

$$B = pv * Q - cv * Q - CF \quad \text{ó} \quad B = (pv - cv) * Q - CF$$

Donde la expresión entre paréntesis recibe el nombre de *contribución marginal unitaria* de un producto. Se la indica como: $cm = pv - cv$

Cuando se producen cambios en los costos variables unitarios y en los precios de venta, el estudio se reduce a las modificaciones en la contribución marginal unitaria.

Se llama contribución marginal unitaria porque muestra como *contribuyen* los precios de los productos o servicios para cubrir los costos fijos y generar utilidad, que es la finalidad de una empresa.

El producto de la contribución marginal unitaria por el número de unidades producidas o vendidas da la contribución marginal total del producto.

Se pueden dar las siguientes alternativas:

1. Si la contribución marginal contribuye a absorber el costo fijo, deja un "margen" para la utilidad o beneficio.
2. Cuando la contribución marginal es igual al costo fijo, no deja ganancia y la empresa está en su punto de equilibrio. No gana ni pierde y su beneficio es nulo.
3. Cuando la contribución marginal no alcanza para cubrir los costos fijos, la empresa puede seguir trabajando en el corto plazo ya que la contribución marginal absorbe parte de los costos fijos. En este caso la actividad da resultado negativo.
4. La situación más crítica se da cuando la contribución marginal unitaria es negativa. En este caso extremo, se debe tomar la decisión de no continuar con la elaboración de un producto o servicio.

El concepto de contribución marginal es muy importante en las decisiones de mantener, retirar o incorporar nuevos productos de una empresa, por la incidencia que tienen en la absorción de los costos fijos y la capacidad de generar utilidades. Es importante

relacionar la contribución marginal unitaria de cada artículo con las cantidades vendidas. Porque una empresa puede tener productos de alta rotación con baja contribución marginal pero la ganancia total, que generan, supera ampliamente la de otros artículos que tienen mayor contribución marginal unitaria pero menor venta y menor ganancia total.

Al sumar la contribución marginal de todos los productos de una línea o unidad de negocios, se obtiene la de esa unidad y al sumar la contribución marginal de todas las líneas o unidades de un negocio, se obtiene la de la empresa.

3.- Decisiones en Sucesivos Aumentos de la Producción

Tomemos como ejemplo el de una empresa que está analizando modificar su estructura dado el gran incremento en la demanda de sus productos. Por ello, estima que la adquisición de nuevos equipos le permitirá incrementar los volúmenes de producción, generando consecuentemente un aumento en los ingresos. No obstante, las decisiones tomadas llevarían inevitablemente a un aumento en los costos de estructura, los cuales deberán analizarse para evaluar la conveniencia de ampliación.

En la situación actual, la empresa produce 1000 unidades, mientras que la compra del nuevo equipamiento le permitiría duplicar sus niveles de producción.

Debemos analizar si pasar al nuevo nivel de actividad le redundará en un beneficio mayor que el que puede obtenerse ocupando a pleno la capacidad actual.

Datos de Producción, Costos e Ingresos

Producción máxima (Q_1)	1000 unidades
Producción máxima con nuevo equipamiento (Q_2)	2000 unidades
Costos Fijos actuales (CF_1)	\$ 150.000
Costos Fijos con nueva estructura (CF_2)	\$ 250.000
Precio de venta unitario (pv)	\$ 250/unidad
Costo variable unitario (cv)	\$ 50/unidad
Contribución marginal unitaria(cm)	\$ 200/unidad

El objetivo que justifique la inversión será aquel nivel de producción que permita superar el actual beneficio derivado de la producción actual. Esta inversión debe superar el beneficio que se obtiene ocupando al máximo la estructura actual y además cubrir los nuevos costos fijos. Asumimos que las variables de precios de venta unitarios y costos variables unitarios no se modifican, por lo tanto la contribución marginal unitaria se mantiene constante en \$ 200/unidad.

Se sabe que: $B = cm * Q - CF$, donde el beneficio considerando la máxima producción actual es: $B_1 = 1.000 * 200 - 150.000 = 50.000$

Frente a un cambio en el nivel de producción, la cantidad mínima que justifique una inversión viene dada por: $Q = \frac{B + CF}{cm}$

Entonces, el nivel mínimo que justifique una inversión que incremente el nivel de producción actual, de 1000 unidades, viene dada por: $Q_{n1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm}$ donde:

Q_{n1} = Cantidad mínima que debe ser superada con la nueva estructura.

B_1 = Beneficio usando al máximo la capacidad actual de 1000 unidades.

CF_2 = Costo Fijo con la nueva estructura.

$cm = pv - cv$ Contribución marginal unitaria

Entonces: $Q_{n1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm} = (50.0000 + 250.000) / 200 = 1.500$

La nueva estructura debe superar la cantidad de 1.500 unidades y el beneficio que aporta esa producción es: $B_{n1} = 1.500 * 200 - 250.000 = 50.000$

Que es el mismo beneficio que se alcanza usando al máximo la estructura actual. La compra de nuevo equipamiento se realizará, sólo si aumenta el beneficio esperado (\$50.000), que se logrará cuando se produzcan y vendan más de 1500 unidades.

El resultado obtenido se denomina *Punto de Resultado Indiferente*, que representa el nivel de actividad que arroja un beneficio igual al que se consigue usando al máximo la capacidad de la estructura anterior.

Si analizamos sucesivos aumentos de la estructura para pasar a mayores niveles de actividad, surgirán variaciones en los costos e ingresos:

Costos e Ingresos frente a Sucesivos Niveles de Producción

Nivel de Producción máxima actual (Q_1)	1000 unidades
Nivel de Producción máxima con el 1er aumento de la estructura (Q_2)	2000 unidades
Nivel de Producción máxima con el 2do aumento de la estructura (Q_3)	3000 unidades
Costos	
Costos fijos actuales (CF_1)	\$ 150.000
Costos fijos con el primer aumento de la estructura (CF_2)	\$ 250.000
Costos fijos con el segundo aumento de la estructura (CF_3)	\$ 300.000
Ingresos	
Precio de venta (pv)	\$ 250/unidad
Costo variable (cv)	\$ 50/unidad
Contribución Marginal Unitaria (cm)	\$ 200/unidad

Manteniendo sin cambios la contribución marginal unitaria, analizamos las distintas situaciones que puede afrontar la empresa frente a sucesivos aumentos de la estructura.

Por lo tanto para que sea conveniente abordar el segundo tramo, debe ser superado el Punto de Resultado Indiferente $Q_{n1} = 1500$

Con el primer aumento de la estructura, el beneficio usando la máxima cantidad de ese tramo (2000 unidades) es: $B_2 = Q_2 * cm - CF_2 = 2000 * 200 - 250.000 = 150.000$

El Punto de Resultado Indiferente con el segundo aumento de la estructura es:

$$Q_{n_2} = \frac{B_2 + CF_3}{cm} = \frac{150.000 + 300.000}{200} = 2250$$

La nueva estructura debe superar la cantidad de 2250 unidades y el beneficio que nos aporta esa producción es: $B_{n_2} = 2250 * 200 - 300.000 = 150.000$

Este beneficio es el mismo cuando se usa al máximo el primer aumento de la estructura. Convendrá realizar cualquier inversión, sólo si aumenta el beneficio esperado (\$150.000), que se logra cuando se fabrican y se venden más de 2250 unidades. Este es el *Punto de Resultado Indiferente*, donde el beneficio es igual al que se obtiene usando al máximo la capacidad del tramo anterior.

En este último tramo, el beneficio obtenido usando al máximo este aumento de la estructura (3000 unidades) es: $B_3 = Q_3 * cm - CF_3 = 3000 * 200 - 300.000 = 300.000$

Estos cálculos nos permiten visualizar el comportamiento de los distintos parámetros cuando se producen nuevas y mayores ampliaciones de la estructura.

Con los datos referidos a las dos ampliaciones se elaboró un cuadro de gran simplicidad, logrando mayor visualización y comprensión del problema. Cuadro N°3, en el Anexo 1. Otra herramienta que contribuye a la interpretación de los resultados son las representaciones gráficas del Anexo 2.

4.- Conclusiones

Con el estudio analítico se visualiza el comportamiento de los distintos parámetros ante modificaciones en el nivel de actividad, permitiendo la construcción del cuadro y sus gráficos, que resultan de gran simplicidad, porque ofrecen información interesante.

Tanto en el cuadro como en el primer gráfico se observa, claramente, que el tramo del nivel de actividad entre 1100 y 1200 unidades no es conveniente, ya que el resultado se convierte en quebranto. Y aunque el beneficio se recupera a partir de las 1250 unidades, no supera al de las 1000, sino recién cuando supera el nivel de las 1500 unidades.

Es importante el análisis de comparación del nivel de actividad mínimo necesario que justifique la inversión usando al máximo la estructura actual; que conlleva al incremento de la estructura con el nivel de producción máximo.

Si el nivel de actividad mínimo que justifica la nueva estructura está muy cerca del nivel máximo que ella permite, puede resultar desaconsejable la inversión, ya que ante la necesidad de un pequeño aumento en la producción, enfrentaremos la necesidad de volver a aumentar la estructura.

También, se recurre a representaciones gráficas de las contribuciones marginales totales y los costos fijos, distintas de las gráficas usuales entre ingresos y costos totales, que muestran directamente el objetivo fundamental de todo empresario que es lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido. Con ello, se intenta generar en estudiantes y usuarios un nuevo significado operativo, predominando una metodología que explica y predice fenómenos económicos.

Con este trabajo se procura dar sentido y contextualizar los conceptos, y sobre todo, relevar la inmensa lógica empresarial que tiene la sencillez de su origen y la facilidad de comprensión de sus modelos matemáticos, analíticos y gráficos. Estos modelos con formulaciones algebraicas elementales aportan una valiosa información, que lleva a importantes decisiones e interpretaciones económicas. También, muestran la significación y utilidad para el empresario, permitiéndole evaluar el impacto económico de sus decisiones, de manera rápida y precisa.

Esta propuesta proporciona a los docentes de Matemática del área económica una modelización accesible que promueva un pensamiento no lineal y una cierta intuición racional, enseñando a los estudiantes a encontrar múltiples alternativas de solución.

Bibliografía

- Arya, J. y Lardner R. (2004). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. 4^{ta} Edición. México: Pearson Educación
- Camacho Peñalosa, E., et alii. (2006). *Fundamentos de Cálculo para Economía y Empresa*. 1^{era} Edición. Madrid: Delta Publicaciones.
- Giménez, C. y Colaboradores. (2007). *Sistemas de Costos*. Buenos Aires: La Ley.
- Horngren, C.; Foster, G y Datar, S. (2007). *Contabilidad de Costos, Un Enfoque Gerencial*. Décimo segunda Edición México: Pearson, Prentice Hall.
- Monsalve, S. (2010). *Matemáticas Básicas para Economistas. Cálculo*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Económicas.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2006). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid: Pearson Educación.
- Yardín, A.; Rodríguez Jáuregui, H. y Bottaro, O. (2004). *El Comportamiento de los Costos y la Gestión de la Empresa*. Buenos Aires: La Ley
- Yardín, A. (2010). *El Análisis Marginal, la Mejor Herramienta para Tomar Decisiones sobre Costos y Precios*. Buenos Aires: Osmar Buyatti.

ANEXO 1
Cuadro N°3 – Comportamiento de los Parámetros frente a Modificaciones de los Niveles de Actividad

Tramo	Cantidad	Costo	Costo	Costo	Ventas	Beneficio	Contribución Marginal	
		Variable	Fijo	Total				
1	0	0	150.000	150.000	0	-150.000	0	
	100	5.000	150.000	155.000	25.000	-130.000	20.000	
	200	10.000	150.000	160.000	50.000	-110.000	40.000	
	300	15.000	150.000	165.000	75.000	-90.000	60.000	
	400	20.000	150.000	170.000	100.000	-70.000	80.000	
	500	25.000	150.000	175.000	125.000	-50.000	100.000	
	600	30.000	150.000	180.000	150.000	-30.000	120.000	
	700	35.000	150.000	185.000	175.000	-10.000	140.000	→ Qe 1
	800	40.000	150.000	190.000	200.000	10.000	160.000	
	900	45.000	150.000	195.000	225.000	30.000	180.000	
	1000	50.000	150.000	200.000	250.000	50.000	200.000	Beneficio máx.
2	1100	55.000	250.000	305.000	275.000	-30.000	220.000	
	1200	60.000	250.000	310.000	300.000	-10.000	240.000	→ Qe 2
	1300	65.000	250.000	315.000	325.000	10.000	260.000	
	1400	70.000	250.000	320.000	350.000	30.000	280.000	
	1500	75.000	250.000	325.000	375.000	50.000	300.000	Punto Indif.
	1600	80.000	250.000	330.000	400.000	70.000	320.000	
	1700	85.000	250.000	335.000	425.000	90.000	340.000	
	1800	90.000	250.000	340.000	450.000	110.000	360.000	
	1900	95.000	250.000	345.000	475.000	130.000	380.000	
		2000	100.000	250.000	350.000	500.000	150.000	400.000
3	2100	105.000	300.000	405.000	525.000	120.000	420.000	
	2200	110.000	300.000	410.000	550.000	140.000	440.000	Punto Indif.
	2300	115.000	300.000	415.000	575.000	160.000	460.000	
	2400	120.000	300.000	420.000	600.000	180.000	480.000	
	2500	125.000	300.000	425.000	625.000	200.000	500.000	
	2600	130.000	300.000	430.000	650.000	220.000	520.000	
	2700	135.000	300.000	435.000	675.000	240.000	540.000	
	2800	140.000	300.000	440.000	700.000	260.000	560.000	
	2900	145.000	300.000	445.000	725.000	280.000	580.000	
		3000	150.000	300.000	450.000	750.000	300.000	600.000

ANEXO 2

Para la elaboración de los gráficos es necesario el cálculo del o los puntos donde las ventas absorben los costos variables y los costos fijos, llamados *Puntos de Equilibrio* (Q_e) Y ocurren cuando el beneficio es igual a cero, es decir los ingresos son iguales a los costos.

$$\text{De } I = CT \quad pv * Q = CV + CF \quad pv * Q - cv * Q = CF$$

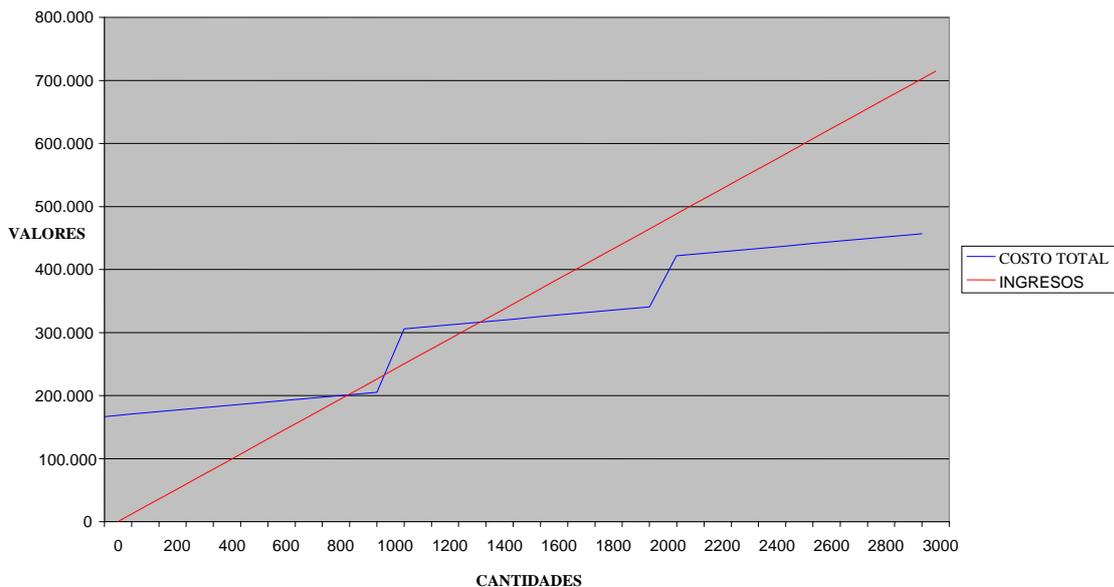
$$Q * (pv - cv) = CF \quad \text{entonces} \quad Q_e = \frac{CF}{pv - cv} = \frac{CF}{cm}$$

Los puntos de equilibrio: Q_{e1} con la estructura inicial y Q_{e2} con el primer aumento

$$\text{de la estructura son } Q_{e1} = \frac{CF_1}{cm} = \frac{150.000}{200} = 750 \quad Q_{e2} = \frac{CF_2}{cm} = \frac{250.000}{200} = 1250$$

El gráfico N°1 muestra el comportamiento de los Ingresos vs los Costos Totales en los distintos tramos de los Costos Fijos.

GRAFICO N° 1 – INGRESOS Y COSTOS TOTALES FRENTE A SUCESIVOS NIVELES DE PRODUCCIÓN



Otra representación gráfica de interés es el de las Contribuciones Marginales Totales vs los Costos Fijos, como se muestra en el gráfico N° 2.

