CB-234

UMA AVALIAÇÃO DO PROCESSO DE VISUALIZAÇÃO NA APRENDIZAGEM DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

William Vieira – Vera Helena Giusti de Souza – Roberto Seidi Imafuku
wsantista@yahoo.com.br – verahgsouza@gmail.com – robertoseidi@yahoo.com.br
Instituto Federal de São Paulo/Brasil – Universidade de São Paulo/Brasil – Instituto Federal de São Paulo/Brasil

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação e atualização de ensino
Palavras chave: Sequências numéricas, aspectos intuitivos, aspectos formais, visualização.

Resumo

Apresenta-se, neste trabalho, a análise de uma questão sobre a classificação de gráficos de sequências numéricas, aplicada para estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de oito semestres, após terem cursado a disciplina Cálculo IV (6º semestre), que trata deste tema. Busca-se, com isso, observar como os participantes interpretam visualmente propriedades de sequências – ser crescente, monótona, limitada, ter limite, ser convergente – e como as relacionam nas classificações realizadas. A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais colocada por Fischbein e o processo de visualização, relativo ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, destacado por Dreyfus, são as ideias teóricas que sustentam as análises dos protocolos, que revelam dificuldades dos participantes da pesquisa em estabelecer relação visual entre uma sequência ser convergente e ter limite; uma sequência constante com a existência do limite; e os conceitos de sequência limitada e de convergência de sequência.

Apresentamos a análise de uma questão sobre a classificação de gráficos de sequências numéricas, que foi aplicada para 17 estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, ao final da disciplina Cálculo IV e do 6º semestre letivo (Vieira, 2016). O objetivo de nossa investigação foi observar como os participantes interpretam visualmente conceitos e propriedades de sequências, como ser crescente, decrescente, monótona, limitada, possuir limite e ser convergente, e como os relacionam em suas classificações.

Fundamentação Teórica

Fischbein (1994) coloca em discussão a necessidade de interagir aspectos formais, algorítmicos e intuitivos nos processos de criação e de aprendizagem de Matemática. Destaca ainda que, ao considerar essa interação, estamos olhando a Matemática como um processo criativo e não como um corpo de conhecimentos estruturado e já estabelecido, o que envolve momentos de “(...) iluminação, hesitação, aceitação e refutação” (Fischbein, 1994, p. 242).

Segundo Fischbein (1994), o aspecto formal refere-se aos axiomas, definições, teoremas e demonstrações, que compõem o núcleo das ciências matemáticas e precisam ser considerados quando analisamos ou observamos o processo de criação em Matemática.

O aspecto algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução, que também tem um caráter fundamental nos processos de entendimento e de criação em Matemática, uma vez que apenas o conhecimento das estruturas formais (axiomas, definições, teoremas) não é suficiente para conferir habilidade para resolver problemas.

O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva que, pela sua natureza, exercem papel coercitivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas. Por vezes, isso pode se tornar um facilitador do processo de conhecimento, se estiver de acordo com verdades logicamente justificáveis; em outros casos, um caminho para contradições e equívocos, como aceitar, por exemplo, que “a parte é menor que o todo”, “uma série infinita tende ao infinito, pois somamos valores indefinidamente” ou “multiplicar sempre aumenta”. Esses exemplos caracterizam situações que um sujeito pode considerar auto-evidentes, não vê necessidade de justificativa ou se ancora em conhecimentos mal estruturados.

Dreyfus (1991) entende o Pensamento Matemático Avançado como uma inter-relação de processos cognitivos como representação, visualização, classificação, justificação, generalização, síntese e abstração.

O processo de representação desempenha papel central no desenvolvimento de Matemática, pois só temos acesso aos conceitos e objetos por meio de suas representações. Ao discutir um conceito, procedimento ou noção matemática, cada um de nós o relaciona com algo que vem à mente. Essa é a representação mental que temos de tal conceito.

A visualização é um dos processos pelo qual as representações mentais podem passar a existir. Dreyfus (1991) aponta que a geração de representações mentais depende de sistemas de representação, de produções externas, concretas, que podem ser percebidas pelo sujeito. No caso das sequências numéricas, gráficos, fórmulas algébricas, tabelas e representações numéricas materializam o conceito de sequência, pois são produções, artefatos externos dessa ideia.

A seguir, apresentamos a questão aplicada para os participantes, os resultados obtidos nos protocolos e uma discussão sobre eles.

Análise da questão proposta

Questão 1 Os gráficos a seguir representam sequências numéricas. Admitindo que os comportamentos indicados nos gráficos persistam, classifique essas sequências em **convergente**, **divergente**, **crescente**, **decrescente**, **limitada**, **sem limite**, **limite infinito**, **possui limite**, **constante**, **monótona**. Em cada caso, apresente todas as classificações possíveis.

Na Figura 1, apresentamos as classificações consideradas corretas para cada uma das sequências da Questão 1 e a porcentagem de estudantes que marcou cada opção. Por exemplo, no caso do gráfico A, 47% dos estudantes assinalou corretamente o termo ‘convergente’, portanto 53% não registrou essa classificação e não considerou a sequência ‘convergente’.

Figura 1 – gráficos ap

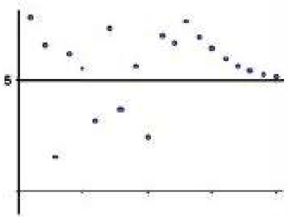


Gráfico A

Classificações	%
Convergente	47%
Possui limite	41%
Limitada	6%

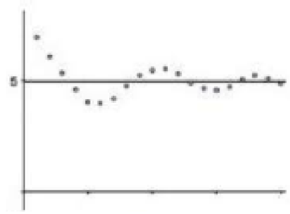


Gráfico B

Classificações	%
Convergente	71%
Possui limite	65%
Limitada	18%

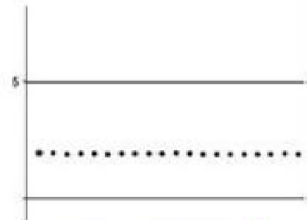


Gráfico C

Classificações	%
Convergente	53%
Possui limite	53%
Limitada	24%
Constante	82%
Monótona	24%

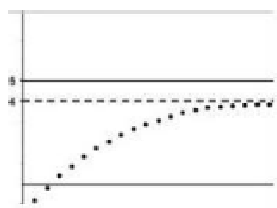


Gráfico D

Classificações	%
Convergente	82%
Possui limite	65%
Limitada	47%
Crescente	82%
Monótona	47%

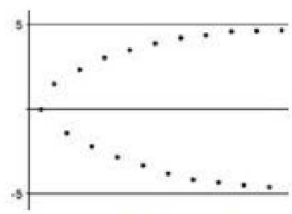


Gráfico E

Classificações	%
Divergente	47%
Sem limite	53%
Limitada	41%

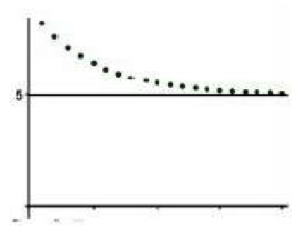


Gráfico F

Classificações	%
Convergente	82%
Possui limite	71%
Limitada	41%
Decrescente	82%
Monótona	35%

resentados na Questão 1

A partir da análise dos protocolos e das estatísticas indicadas na Figura 1, identificamos as classes de erros (Cury, 2007) destacadas no Quadro 1, no qual apresentamos as frequências e os percentuais de ocorrência de cada tipo de erro.

Quadro 1 - Erros identificados na Questão 1

Descrição do Erro	**Freq**	**%**
A_1 - Não relacionar convergência e sequência limitada	7	41%
B_1 - Não relacionar possuir limite com sequência limitada	9	53%
C_1 - Não relacionar sequência constante e convergência	9	53%
D_1 - Não relacionar convergência com possuir limite	6	35%

E_1 - Aplicar parcialmente ou de maneira equivocada o conceito de sequência limitada	9	53%

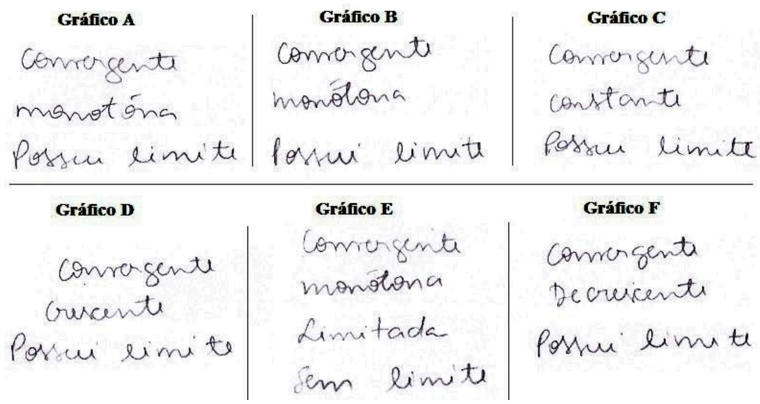
Os erros tipo A_1 e B_1 concentram os participantes que não foram capazes de identificar que a sequência é limitada quando a classificaram como ‘convergente’ ou ‘possui limite’. De maneira geral, houve um bom índice de acertos na identificação de sequências convergentes e que possuem limite, conforme indicam as estatísticas apresentadas na Figura 1, apesar dos índices desses conceitos nos gráficos A e C terem ficado em torno de 50%. Por outro lado, o conceito de sequência limitada parece não estar claro para a maioria dos participantes; os índices de 41% de estudantes que cometeram o erro tipo A_1 e o de 53% do erro B_1 corroboram as dificuldades dos participantes na identificação/uso deste conceito.

A estudante Bia[10], por exemplo, classificou apenas a sequência do gráfico E como limitada, conforme destacado na Figura 2. Em entrevista, ao ser convidada a explicar porque classificou o gráfico D como convergente, possui limite e crescente e não como limitado, disse “Pra ser limitada tem que ser dos dois lados, não sei se eu posso dizer isso, né? Como aqui (gráfico E), vem em cima e embaixo, aqui (gráfico D) não, ela vem lá do infinito, do menos infinito. Ela não é limitada aqui (aponta o início do gráfico D)”.

Essa colocação evidencia que, além da dificuldade com o conceito de sequência limitada, a estudante também não tem clareza da definição de sequência numérica, situação que fica marcada pela colocação “ela vem lá do infinito, do menos infinito”.

Figura 2 – Respostas da estudante Bia

[10] Os nomes apresentados neste artigo são fictícios.



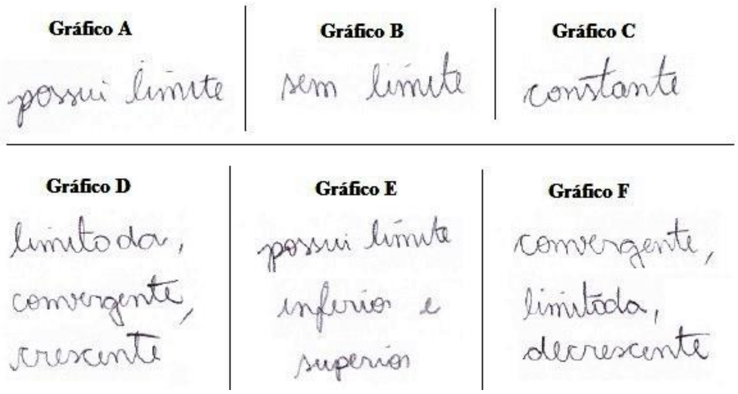
Não relacionar sequências constantes com a ideia de convergência, erro tipo C_1, foi cometido por 53% dos participantes da pesquisa. As respostas de Maria (Fig. 3) exemplificam esse tipo de erro que, entendemos, estão relacionados a incompreensões de aspectos formais da definição de convergência, uma vez que 6 dos 9 participantes (35% do total) que cometeram o erro tipo C_1 classificaram a sequência do gráfico C como constante

Figura 3 – Respostas da estudante Maria

Dificuldades em relacionar convergência e sequências constantes foram identificadas por outros autores, e explicadas como relacionar convergência com monotonicidade e movimento (Sierpinska, 1985) e "limite ... atinge ou não?" (Cornu, 1983). Os dados de nossa investigação corroboram esses resultados e indicam uma realidade bastante dura do ensino de Matemática no nível superior, uma vez que, apesar dessas dificuldades já terem sido identificadas há alguns anos, os professores de Matemática brasileiros ainda não foram capazes de criar estratégias que ajudem os estudantes a superá-las.

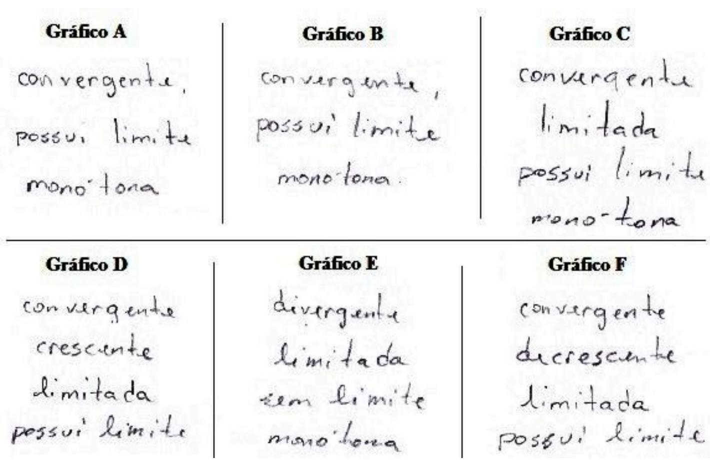
As estatísticas apresentadas na Figura 1 mostram que houve um bom desempenho dos estudantes em classificar as sequências em 'convergente' e 'possui limite'; entretanto, como também mostram essas estatísticas, a associação entre estes conceitos nem sempre ocorreu de maneira satisfatória, o que nos levou a identificar o erro tipo D_1, não relacionar convergência com possuir limite, para 35% dos participantes. As respostas da estudante Geane (Fig. 4) são exemplos desse tipo de erro.

Figura 4 – Respostas da estudante Geane



O erro tipo E_1, aplicar parcialmente ou de maneira equivocada o conceito de sequência limitada, cometido por 53% dos participantes, reitera as confusões conceituais sobre sequência limitada e que foram identificadas nos protocolos. O estudante Camilo, por exemplo, aplicou corretamente este conceito para as sequências dos gráficos C, D, E e F, mas não repetiu essa classificação para os gráficos A e B, conforme destacado na Figura 5.

Figura 5 – Respostas do estudante Camilo



Em entrevista, questionado sobre não ter classificado os gráficos A e B como limitados, Camilo disse "Porque eu acho que eu pensei na ideia da... de uma função ser limitada mesmo. (...) No caso, eu tava confundindo limitada e tem limite ainda". Em seguida, interpelado sobre o que é uma função limitada, explicou que "Eu penso... eu tenho a ideia de função limitada as do tipo sanduíche[11], né, quando o limite deles vão pra um mesmo número (faz um gesto em que as palmas das mãos se aproximam)", colocação que indica a confusão do estudante entre os conceitos de sequência limitada e limite de sequências.

Em seguida, perguntamos porque ele classificou a sequência do gráfico C como limitada, mas não como constante (Fig. 5) e Camilo respondeu "Por que que eu não coloquei que era constante? Não sei também... Porque independentemente de qual seja meu termo, eu vou ter o mesmo número na sequência. É constante". E, ao justificar a classificação de limitada para o gráfico C, mostrou-se indeciso sobre sua escolha e disse "É, mas não sei se... Eu acho que foi a mesma coisa que eu pensei aqui (aponta gráficos A e B). Coloquei limitada porque tinha um limite e daqui (gráficos A e B) eu tirei e daqui (gráfico C) não". Perguntado se voltaria atrás na classificação do gráfico C, disse que "Tiraria o limitada".

As considerações de Camilo indicam confusões sobre aspectos formais de sequências e funções. De fato, as explicações de Camilo para função limitada indicam que não compreende que dizer que uma sequência é limitada significa que existe um intervalo numérico que contém a imagem dessa sequência. Além disso, o argumento de Camilo revela aspectos intuitivos confusos e que não estão inter-relacionados com aspectos algorítmicos e formais dos conceitos que utiliza. De fato, ao revelar que confundia limitada com tem limite e que voltaria atrás na classificação da sequência constante representada pelo gráfico C, este estudante coloca em xeque as outras classificações acertadas que realizou, uma vez que dá mostras de que o conceito de função limitada não está claramente estabelecido para ele.

Considerações Finais

A análise da Questão 1 mostra que, de fato, muitos dos participantes da pesquisa têm dificuldades em estabelecer a relação entre sequência convergente e seu limite, como mostram as estatísticas associadas ao erro tipo D_1, e em relacionar sequência constante com a existência do limite (erro tipo C_1). Além disso, dificuldades com o conceito de sequência limitada (erro tipo E_1) e em relacioná-lo aos conceitos de convergência e ao limite de uma sequência (erros tipo A_1 e B_1) também ficaram evidentes nas análises dos protocolos.

Num panorama geral, essas dificuldades encontram explicação num ensino marcado pelo privilégio de aspectos algorítmicos e intuitivos, que não estão amparados nas justificativas formais

[11] O estudante se refere ao Teorema do Confronto.

de conceitos e resultados, situação que corrobora a posição colocada por Fischbein (1994), com a qual concordamos, de que apenas o conhecimento de técnicas e ideias intuitivas não são suficientes para conferir a um sujeito habilidade em resolver problemas.

Além disso, entendemos que as dificuldades apresentadas por estes participantes na interpretação dos gráficos estão ligadas à pouca exploração de diferentes representações de conceitos relacionados às sequências numéricas e à não interação entre aspectos intuitivos e formais associados a essas ideias, perspectiva que não lhes conferiu familiaridade, nem habilidade, na análise de gráficos de sequências e comprometeu o desenvolvimento do processo de visualização.

Referências bibliográficas

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tese de Doutorado. França: Universidade de Grenoble.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In David Tall (Org.), Advanced Mathematical Thinking, pp. 25-41. Londres: Kluwer Academic Publisher.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In Rolf Biehler et al. (Org.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, pp. 328-375. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 6, pp. 5-67.

Vieira, W. (2016). *Do Cálculo à Análise Real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas*. Tese de Doutorado. São Paulo: Universidade Anhanguera de São Paulo.