MODELAGEM MATEMÁTICA E SISTEMAS FUZZY: APLICAÇÃO AO ENSINO DE TAXAS DE VARIAÇÃO

Paulo Roberto Barbosa,l Graziela Marchi Tiago
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, Campus São José dos Campos, São José dos Campos. Brasil
paulorb@ifsp.edu.br, graziela@ifsp.edu.br

Resumo

Esta pesquisa apresenta o uso de técnicas não convencionais como um aporte tecnológico aplicado ao ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo principal desta pesquisa é propor o ensino de taxas de variação, utilizando-se para isto a modelagem matemática associada ao uso de uma tecnologia, a saber sistemas p-fuzzy. A Lógica *Fuzzy* se diferencia pela facilidade de compreensão, e por traduzir o pensamento humano em uma linguagem natural. Com esta proposta pretende-se criar um caminho com novos ambientes de aprendizagem, aonde os alunos terão a liberdade de desenvolver e modelar as ideias na construção dos conhecimento.

Introdução

O que propomos neste trabalho é a utilização da modelagem matemática associada a uma técnica não-convencional, mais especificamente sistemas *p-fuzzy*, aplicado ao ensino e aprendizagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente, ensino de taxas de variação.

Ressaltamos que a escolha de tal disciplina se fez por vários aspectos. Segundo Rezende (2003), o Cálculo é uma grande rede que interage com o próprio conhecimento matemático; com a física e as ciências naturais de um modo geral; com as ciências sociais e econômica e com o desenvolvimento de novas tecnologias. Ainda segundo o autor, o Cálculo é imprescindível para a formação do cidadão.

Cury (2006) ressalta que a preocupação com o ensino de Cálculo vem se mostrando constante. O autor diz que em vários eventos ligados ao ensino de Matemática ou Engenharia temos encontrado trabalhos relacionados com as dificuldades demonstradas pelos alunos dessa disciplina, com sugestões de atividades para tentar modificar a situação.

Outro ponto de destaque, diz respeito ao nível de aproveitamento dos estudantes, que no cenário atual é algo ainda muito preocupante. Almeida e Igliori (2013), destacam que tal disciplina é particularmente importante porque trabalha com noções fundamentais para a Matemática Avançada. E observam também suas associações com altos índices de reprovações. Assim, propomos um estudo em relação a esse campo do conhecimento.

Neste trabalho, usaremos o termo modelagem de acordo Beltrão, uma ação da realidade para a Matemática. É como se estivéssemos perguntando: "Onde posso encontrar alguma Matemática para me ajudar a enfrentar este problema?" Ou seja, a Modelagem possibilita compreender ou resolver problemas de algum segmento do mundo real.(Beltrão, 2009).

Ainda nossa proposta se pauta em uma abordagem qualitativa, sendo contemplada sobre a perspectiva de uma pesquisa teórica, com elaboração de uma sugestão de atividade que complementa o trabalho. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), o pesquisador, neste tipo de estudo não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica.

O sistema p-*fuzzy* foi escolhido, primeiramente pela experiência dos autores com esse tipo de abordagem e também com a experiência em sala de aula.

Este trabalho está dividido em mais quatro seções: a próxima seção apresenta uma breve explanação de sistemas *fuzzy* e p-*fuzzy*; a seção seguinte apresenta o referencial teórico; a penúltima seção ilustra nossa atividade proposta; e por fim, a última seção apresenta nossas discussões finais e perspectivas futuras com relação a este trabalho.

Sistemas *fuzzy* e p-*fuzzy*.

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos da teoria de conjuntos *fuzzy*. Uma descrição mais aprofundada pode ser encontrada em Barros e Bassanezi (2006), em Tiago, Baroni, Fonseca (2014) e em Barbosa e Seleghim (2011).

O termo "*fuzzy*" foi pela primeira vez citado por Dr. Lotfi Zadeh considerado o pai da lógica *fuzzy*, em um jornal sobre engenharia chamado "*Proceedings of the IRE*" em 1962 (Zadeh, 1962).

Um paradoxo que pode nos ajudar a entender a lógica *fuzzy* é o "Paradoxo do Careca", que pode ser enunciado da seguinte forma: Você diria que um homem que tem na cabeça um único fio de cabelo é careca? E se ele tiver dois fios? E três? E quatro? Afinal quando você parará de chama-lo de careca? (Kneale e Kneale, 1962).

Como analisar este paradoxo? Como utilizar a lógica clássica nesta situação onde os elementos de fronteira de dois conjuntos possuem uma descrição instável que pode oscilar dependendo observador? É neste contexto de imprecisão e ambiguidade que a lógica fuzzy foi desenvolvida.

Um conjunto *fuzzy* pode ser visto como uma generalização dos conjuntos clássicos. Ele pode ser entendido como um conjunto que permite que elementos tenham graus de pertencimento a este conjunto. Além da função de pertinência, um conjunto *fuzzy* deve ser associado a um conceito linguístico, como por exemplo, "Excelente". Esta associação é utilizada para facilitar a construção das regras pelo especialista, sendo assim compreensível. Adotando uma base de conhecimento (regras de inferência) que relacionam estas funções de pertinência constrói-se o mecanismo de inferência (Yen, 1999).

Os conjuntos *fuzzy,* as funções de pertinência e as regras de inferência são obtidas a partir do problema proposto, sendo necessário um conhecimento parcial do "especialista" para a modelagem do sistema. Nesta pesquisa, este conhecimento prévio do especialista baseia-se nos conhecimentos da função em estudo e, principalmente, em conceitos já adquiridos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

A estrutura de um sistema baseado em lógica *fuzzy* possui quatro etapas: fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação. Na teoria *fuzzy* valores intermediários, chamados de grau de pertinência, são permitidos e a produção destas funções que definem graus de pertinência é chamada de "fuzzificação". A fuzzificação, então, é o processo no qual são definidas as variáveis de entrada e saída, para as quais são atribuídos termos linguísticos que descrevem seu estado. É nessa etapa do processo que são construídas as funções de pertinência.

Todos os conjuntos *fuzzy* representando as variáveis relacionadas por funções de pertinência são chamadas de base de conhecimento. Um conjunto de regras de inferência é adotado para manipular a base de conhecimento. O método mais utilizado para representar o conhecimento humano é através de expressões de linguagem natural como: SE (antecedente) ENTÃO (consequente).

A base de conhecimento tem informações incertas, porém significativas para a modelagem do sistema. Esta incerteza é completamente resolvida com a entrada e saída dos conjuntos *fuzzy* e com a estratégia de manipulação da base de conhecimento pré-definidas. A base de conhecimento utilizada neste trabalho foi modelada com informações significativas para o sistema, de acordo com informações qualitativas do problema modelado.

Em seguida é definido o modelo de inferência utilizado. Os tipos de modelos de sistemas de inferência *fuzzy* são diferenciados pela habilidade em representar diferentes tipos de informação, ou seja, na forma que se representa a base de regras. O modelo de inferência utilizado neste trabalho é o modelo Mamdani (Mamdani, 1975 e 1976), que é o modelo mais utlizado na literatura e que inclui os modelos linguísticos baseados em coleções de regras SE-ENTÃO. Maiores detalhes em Tiago, Baroni e Fonseca (2014).

Após definidas as regras e o método utilizado, ocorre a inferência. Na defuzzificação é necessário um processo de tradução do conjunto *fuzzy* resultante do método de inferência para um número real. Na literatura existem alguns métodos de defuzzificação, dentre eles: centróide, centro dos máximos, média dos máximos, princípio da máxima associação - também conhecido como método da altura, e bissector.

A escolha da estratégia de defuzzificação utilizada no sistema deste trabalho foi realizada de forma empírica através do desempenho na simulação para o caso em análise. O método de defuzzificação escolhido foi método centróide, bastante utilizado na literatura e que retorna o centro da área sob a curva.

Todos estes processos de inferência *fuzzy*, definidos anteriormente, podem ser vistos como controladores *fuzzy*, uma vez que controlam a saída desejada pelo especialista, e são responsáveis pela dinâmica dos sistemas p-*fuzzy*. Denominamos de sistemas parcialmente *fuzzy* ou p-*fuzzy* ao sistema iterativo a seguir.

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

em que $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$. Aqui $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é chamado de variação e é obtido pela saída defuzzificada de um sistema baseado em regras *fuzzy* (Cecconelo, 2006). Sua arquitetura pode ser vista na Figura 1 a seguir.

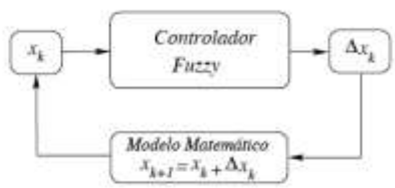

Figura 1: Arquitetura de um sistema p-*fuzzy*.Fonte: Extraído de Santos e Bassanezi (2009).

Os sistemas p-*fuzzy* incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis de entrada quanto nas variações e suas relações com as variáveis, sendo assim uma ferramenta muito útil para modelar fenômenos cujo comportamento seja parcialmente conhecido. Por isto, surge a ideia de se utilizar esta técnica não-convencional, como uma nova tecnologia aplicada ao ensino-aprendizagem para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Conhecido o comportamento de uma função, pode-se modelá-la através de sistemas p-*fuzzy*, sem que se identifique a lei desta função especificamente, apenas utilizando as taxas de variação desta função em pontos desejados do problema. Neste contexto esperamos que o aluno aprenda a modelar uma função com conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente taxas de variação da variável utilizada e só depois terá contato com a formulação matemática do modelo determinístico, comparando com a solução obtida pelo sistema p-*fuzzy*. Isto conduz o aluno de cursos superiores ao aprendizado através de um problema realístico, fazendo uma ligação com outras disciplinas do seu curso.

Referencial teórico

Como referencial teórico, esta pesquisa seguirá a concepção de Modelagem Matemática por fases de Beltrão, o qual é definido como uma ação da realidade para a Matemática.

A autora utiliza a modelagem matemática por fases, buscando solucionar os obstáculos da Modelagem Matemática aplicadas ao ensino. Segundo Bassanezi (2002), estes obstáculos podem ser instrucionais, obstáculos para os estudantes e obstáculos para os professores.

Para Bassanezi (2002), o obstáculo instrucional é caracterizado principalmente na aplicação em cursos regulares, aonde o programa de curso deve ser cumprido e desenvolvido na íntegra. O processo de Modelagem Matemática pode se tornar longo e demorado, o que pode impedir o cumprimento do programa. O obstáculo para os estudantes é causado pelo estranhamento de um ensino diferenciado do tradicional. Segundo o autor, isso pode gerar certa apatia, tendo como consequência criação de um bloqueio por parte dos estudantes.

Ainda segundo Bassanezi (2002), o obstáculo para os professores é caracterizado quanto à insegurança de não estar habilitado a trabalhar com a Modelagem Matemática em sua prática. Esta insegurança acaba tornando o processo de preparação da aula mais demorado e trabalhoso. Outro fato que pode ocorrer: situações não previstas durante o processo de modelagem. Modelos selecionados podem não resolver a situação proposta ou até mesmo chegar em conclusões que não faziam parte do objetivo do curso. Com isso, retorna o obstáculo instrucional, em que o cumprimento do programa se torna inviável.

A proposta de Beltrão (2009) é assim nomeada segundo fases, Fases I, II e III.

Na figura 2, há um esquema ilustrativo da proposta de Beltrão (2009).
Inicialmente, aplica-se uma atividade diagnóstica ou teste de conhecimentos prévios, sendo que estes resultados diagnósticos farão o professor retomar os conceitos que julgar básicos e necessários para a continuidade do conteúdo a ser estudado.

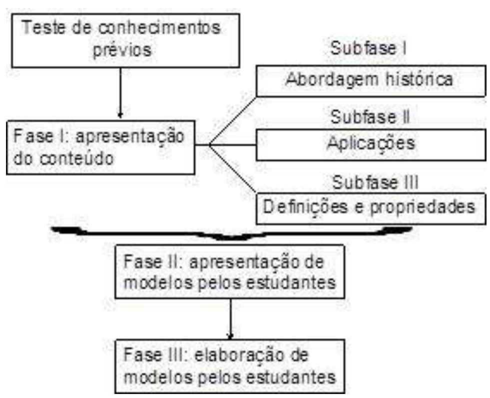

Figura 2 – Esquema de modelagem por meio de fases.

Em seguida, inicia-se a Fase I, o qual é dividida em três subfases. Na subfase I, ocorre a apresentação do conteúdo através de uma abordagem histórica, sendo importante salientar que o conteúdo matemático e o desenvolvimento de toda ciência ali envolvida não foi fruto de um trabalho simples, com o objetivo de despertar nos estudantes a vontade de aprofundar o conhecimento de determinado conteúdo.

Na subfase II, ocorre a exploração de possíveis aplicações. Nesta subfase, deverá ser respondida a pergunta: “onde eu vou usar isto?”. Ficará como atribuição ao professor apresentar situações-problema em que a solução seja feita através de um modelo matemático, e ainda podem ser exploradas situações com o auxílio do computador.

Na subfase III, o professor apresenta definições e propriedades importantes daquele conteúdo e exemplos. Nesta subfase, o professor apresenta as definições matemáticas, ou seja, é o momento da formalização do conteúdo. Além das definições pertinentes, também deve-se apresentar as propriedades que existem e, por fim, apresentação de exemplos, que se possível, sejam direcionados a fenômenos específicos ao curso.

Na Fase II é proposta ao aluno a busca de modelos ou aplicações do conteúdo em estudo, preferencialmente em sua área de atuação, sendo trabalhos individuais ou em grupo.

Até o final da fase II, Beltrão procura uma solução para os obstáculos da Modelagem Matemática elencados pelo Bassanezi (2002). A partir da fase III, a proposta de Beltrão é a criação de um modelo matemático por parte do aluno ou a apresentação de novas aplicações do modelo já apresentado e assim efetivamente ocorre o processo da Modelagem Matemática, assim como definida e adotada por Bassanezi (2002).

Levando em consideração que em nossa proposta de ensino utilizaremos um conceito inédito do ponto de vista metodológico, modelagem matemática através de técnicas não convencionais, a saber, sistemas p-*fuzzy*, faremos adaptações na proposta de Beltrão.

Esta adaptação na proposta de Beltrão que julgamos importante será na fase II. Assim, o professor fará a apresentação de uma situação aonde o conteúdo estudado tenha sido aplicado usando modelagem com sistemas p-*fuzzy*. A partir disto, na Fase III o aluno poderá elaborar modelos utilizando a modelagem através de sistemas p-*fuzzy*, pois já vivenciou experiências de modelagem ou aplicações elaboradas por outros.

Atividade proposta

Para a apresentação do conteúdo Taxas de Variação utilizando modelagem matemática e sistemas p-*fuzzy*, seguiremos as fases propostas por Beltrão (2009) com adaptações já mencionadas, iniciando com a avaliação de sondagem por exercícios, sendo que o professor deverá retomar principalmente conceitos de funções, retas tangentes e limites de funções.

A Fase I será dividida em 3 subfases, sendo que na subfase I, o professor apresentará uma introdução histórica sobre derivadas a partir de reta tangente a uma curva, fazendo referencia a Fermat e ao problema de encontrar a velocidade de um objeto solto a partir do alto de uma torre (Stewart, 2013), verificando que envolvem o mesmo tipo de limite. Na subfase II, o professor apresentará o conceito formal de derivadas e suas propriedades, podendo-se utilizar do livro do Stewart (2013). Na subfase III, o professor mostrará a ligação dos limites da subfase I com o conceito de derivadas e que ele pode ser interpretado como uma taxa de variação, que neste caso do exemplo, será a velocidade de um objeto.

Na Fase II, o problema que será proposto aos alunos para o ensino-aprendizagem de Taxas de Variação é descobrir uma função que melhor descreva o comportamento da velocidade de um corpo em queda livre. Esse modelo foi discutido analiticamente, modelado com sistemas p-*fuzzy* e comparado com resultados experimentais em Tiago e Barbosa (2015). Será apresentado aos alunos um conjunto de dados experimentais da velocidade de um corpo como descritos em Tiago e Barbosa (2015). Este corpo pode ser apresentado ao aluno como um paraquedista "solto" por um avião. Outro ponto importante deste problema realístico, está em ter uma interdisciplinaridade com conteúdos da disciplina de Física.

Inicialmente, pode-se mostrar um vídeo de um salto para os alunos. Em seguida, questionar os alunos sobre quais as variáveis que estão envolvidas, fazendo o aluno perceber que a velocidade depende do tempo. Questionar os alunos sobre algumas condições físicas, fazendo algumas simplificações sobre o fato do corpo ter no tempo $t = 0$, a velocidade inicial $v = 0$. Fazer perguntas aos alunos sobre quais outras condições estão envolvidas na queda do corpo, levando o aluno que neste momento já fez ou está fazendo a disciplina de

Física, a se questionar sobre a aceleração da gravidade, que levaria a uma força para baixo adotada como positiva e outra para cima que dependeria da resistência do ar.

Num segundo momento, pode-se questionar o aluno se este conhece alguma teoria para solução. O aluno pode tentar uma relação com o Método dos Mínimos Quadrados, fazendo uma ligação com a disciplina de Cálculo Numérico, já que foram considerados também dados experimentais ao problema. Pode-se pedir aos alunos para traçar graficamente o comportamento da velocidade experimental, para que assim o aluno entenda o comportamento do gráfico de velocidade. Os resultados gráficos mostraram que o gráfico da velocidade sobe muito rapidamente, mas que depois começa a estabilizar, em curto espaço de tempo (15s), sendo levando em consideração a massa do corpo. Isto pode levar o aluno ao questionamento do porque desta velocidade se estabilizar, fazendo perguntas sobre a aceleração da gravidade e da força de resistência do ar. Em seguida, o professor, como intermediador, pode perguntar como poderia se relacionar esta velocidade com o tempo e se os alunos conhecem algum problema relacionado a este. Assim, o professor pode conduzir o aluno a relacionar este resultado com taxa de variação da velocidade com o tempo, e através do gráfico dos dados experimentais, mostrar a alta variação da velocidade evidenciando a inclinação das retas tangentes, conectando assim ao conteúdo da disciplina apresentado na Fase I. Através da interpretação do gráfico, pode-se perguntar o que o aluno espera que aconteça depois dos 15 segundos apresentados, fazendo uma ligação com os saltos executados pelos paraquedistas. O aluno, neste ponto, deve perceber que esta velocidade se estabiliza, e que é chamada de velocidade terminal. Com todos estes questionamentos, podemos concluir com os alunos o uso de taxas de variação da velocidade com o tempo como elementos importantes para a solução do problema.

Num terceiro momento, o professor motiva os alunos a utilizarem conceitos de lógica *fuzzy* e fazer a modelagem do problema através de sistemas p-*fuzzy*. Enaltecemos neste momento a importância de disciplinas optativas ou de oficinas temáticas para o ensino e aplicação de lógica fuzzy em cursos superiores. É interessante neste ponto utilizar a ideia de que o sistema baseado em regras *fuzzy* deve ter como variável de entrada a velocidade, que pode ser até mesmo a primeira velocidade experimental de 10 m/s, já que são os dados que conhecemos do problema, e que a variável de saída deve ser a variação da velocidade. Isto pode ser feito com perguntas ao aluno do que ele conhece do problema, quais as variáveis foram fornecidas, e como ele esperaria obter a próxima velocidade conhecendo a anterior. O professor deve questionar que utilizando o sistema p-*fuzzy* espera-se que esta entrada nos forneça como saída a variação da velocidade e que na próxima iteração esta variação encontrada somada a velocidade inicial vai nos fornecer a próxima velocidade, e assim por diante. Dessa forma, instigamos os alunos a fazerem o gráfico dos resultados experimentais para que, depois de algumas tentativas sobre como seriam estas variações das velocidades, consigam modelar a base de regras e percebam que no início com as velocidades baixa a média (M), a variação da velocidade é alta e positiva (AP); que com velocidade alta, a variação fica menor, o qual podemos chamar de média alta positiva, já que esta variação diminui, mas não tão rapidamente; e que quando a velocidade fica altíssima (AL), a variação deve diminuir para atingir a velocidade terminal, chamando-a de baixa negativa (BN). O aluno pode propor outras modelagens, investigando melhores resultados. Assim, levamos o aluno a modelar com diferentes funções de pertinência, trapezoidais ou triangulares, até chegar na modelagem tipo gaussiana que suaviza os dados, não formando "bicos" nas transições de velocidades.

A partir daí, os alunos farão a simulação do problema modelado com sistemas p-*fuzzy*. Em seguida, poderão comparar com os dados experimentais, e verificarão quais modificações podem ser feitas nas funções de pertinência para atingir melhores resultados, alterando o domínio que as velocidades podem atingir, ou até o valor das funções de pertinência para a variável variação das velocidades. Aqui devem-se utilizar conhecimentos físicos que levem os alunos a perceberem pelos resultados experimentais que a velocidade terminal no caso do corpo do problema com 68,1kg, está aproximadamente um pouco acima de 50m/s. Isto é o mais subjetivo desta modelagem, já que o problema depende do peso do corpo e do coeficiente de arrasto.

E por último ainda na Fase II, o professor deve questionar ao aluno se o problema pode ser resolvido de outra maneira; mostrar que este tipo de modelagem pode ser aplicado a outros problemas e fazê-los perceberem quais são este problemas. Podemos perguntar o que estas aplicações devem ter em comum: sempre há uma taxa de variação de alguma variável envolvida? O professor pode fazer uma ligação, mesmo que breve, ao conteúdo da modelagem matemática determinística, que envolve as ideias de força gravitacional, força de resistência do ar, como enunciado em Tiago e Barbosa (2015), e assim obter a equação diferencial envolvida. Com isto faria uma introdução ao conteúdo da disciplina de Equações Diferenciais.

O professor pode nesse ponto, perguntar quais condições o aluno precisa para conseguir modelar utilizando sistemas p-*fuzzy*, para que ele perceba que possuía informações do comportamento parcial do problema a ser modelado; e que esta modelagem não traz dificuldades, fazendo apenas o uso de linguagem natural e de símbolos linguísticos, assim como de conteúdos aprendidos principalmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral contribuindo para a interdisciplinaridade. O aluno nesta fase pode melhorar o resultado gerado pelo sistema *fuzzy*, já que pode comparar os 15 segundos iniciais experimentais, com os resultados desenvolvidos pelo sistema p-*fuzzy*. Além disto, dizer que futuramente poderá comparar também com a solução analítica da EDO.

Em seguida, pode-se estimar a velocidade terminal, fazendo pequenos ajustes nas funções de pertinência para que atinja a velocidade pretendida. Um exemplo do resultado que pode ser obtido pelo aluno é apresentado em Tiago e Barbosa (2015).

Dessa forma, ao utilizar esse processo de investigação/apresentação, os alunos desenvolvem seu raciocínio com mais naturalidade, melhorando o entendimento até a resolução, consolidando os conceitos envolvidos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Numérico e Física, e consequentemente, a aprendizagem destas.

Na Fase III, acontece a construção de modelos pelos alunos. Neste momento o aluno participará ativamente, buscando aplicações individualmente ou em grupos. O professor poderá orientar as resoluções, principalmente se aparecerem temas que ainda não foram visto pelos alunos.

Discussões finais e perspectivas futuras

Este artigo apresenta uma proposta de ensino de Taxas de Variação para cursos superiores. Esta proposta se baseia no uso de modelagem matemática a partir das três fases das concepções de Beltrão (2009) e técnicas não convencionais através de sistemas p-*fuzzy*.

Além disto, a Teoria da aprendizagem significativa de Ausubel contribuirá com o trabalho, pois a construção dos modelos utilizará a estratégia de aprendizagem com a modelagem matemática como elemento significativo, trabalhando com uma situação-problema realística, gerando uma interdisciplinaridade com conteúdos da disciplina de Física e de elementos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Ausubel (2003), com novos materiais, o educando é capaz de fazer a assimilação de conceitos não mais de forma arbitrária e literal, mas de forma cognitiva.

O emprego desta técnica não convencional justifica-se pela fácil compreensão do *toolbox* de *fuzzy* e, principalmente, devido a base de conhecimento ser construída utilizando conceitos linguísticos. Esta associação a conceitos linguísticos facilita a construção das regras pelos alunos e o entendimento do resultado observado.

Como trabalho futuro, o professor pode pensar no uso desta modelagem por sistemas p-*fuzzy* no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, já com a ligação feita nesta sua aula.

Referências bibliográficas

Almeida, M. V. de; Igliori, S. B.C. (2011). Educação Matemática no ensino superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo 1. *Educação Matemática e pesquisa, São Paulo, v. 13, n. 3*, p. 439-459.

Barbosa, P. R. ; Seleghim JR., P. (2011). On the application of fuzzy logic control in pneumatic conveying systems. *Learning and Nonlinear Models, v. 9*, p. 256-265.

Barros, L. C.; Bassanezi, R. C. (2006). Tópicos de lógica fuzzy e bio-matemática. *Coleção IMECC - Textos Didáticos. v. 5*, IMECC - Unicamp, Campinas/SP.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto.

Beltrão, M. E. P. (2009). *Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações - Teoria e Prática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Cecconelo, M. S. (2006). *Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Cury, H. N. (2006). Calculando o volume de um sólido: como a análise de erros pode auxiliar professores a elaborar atividades de ensino para calouros na engenharia. In: *Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, Passo Fundo.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S. (2012). *Investigação em Educação Matemática – percursos teóricos e metodológicos*. 2 ed. Campinas: Autores Associados.

Kneale,W.; Kneale, M. (1962). *The development of logic*. Londres: Oxford University Press.

Mamdani, E. H.; Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies, v. 7, n. 1*, pp. 1-13.

Mamdani, E. H. (1976). Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. *International Journal of Man-Machine Studies, v. 8, n. 6*, pp. 669-678.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

Santos, L. R.; Bassanezi, R. C. (2009). Sistemas p-fuzzy unidimensionais com condição ambiental. *Biomatemática, v. 19,* pp. 11-24.

Stewart, J. (2013). *Cálculo*, v. II, São Paulo: Cengage Learning.

Tiago, G. M.; Barbosa, P. R. (2015). Sistema *p-fuzzy* aplicado às equações diferenciais ordinárias. *SINERGIA, v. 16, n. 1*, pp. 23-28.

Tiago, G. M.; Baroni, M. P. M. A.; Fonseca, R. F. (2014). Avaliação discente: uma proposta utilizando a lógica *fuzzy*. *Revista eletrônica de educação matemática, v. 9,* pp. 87-109.

Yen, J. (1999). Fuzzy Logic: A Modern Perspective. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, v.11, n. 1*, pp. 153-165.

Zadeh, L. A. (1962). From Circuit Theory to System Theory. Proceedings of the IRE, v. 50, n. 5, pp. 856-865.