

**LA MODELACIÓN DE PROBLEMAS EN EL CONTEXTO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**

**Johanna Gallego, Luis Vega, Denisse Guzmán**

Escuela de Pedagogía en Matemática y Estadística Universidad de las Américas. Chile  
johanna.gallego05@gmail.com, luisvegab@live.cl, denisseguzmang@gmail.com

**Resumen**

Las razones trigonométricas como objeto matemático fue un concepto muy estudiado a nivel escolar, pero retirado del currículum chileno en reforma del 2009, generando que los estudios al tema fueran disminuyendo. Actualmente fue reintegrado presentándose como un contenido de importancia a trabajar. Entendiendo la importancia de articular la modelación con este contenido, este trabajo se plantea como objetivo lograr que los alumnos modelen situaciones en el contexto de las razones trigonométricas, Con un sustento teórico, basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.

**Introducción**

Las razones trigonométricas son comparaciones entre trazos, regidas por el valor de un ángulo. Desde el punto de vista de esta investigación todo será en el contexto del triángulo rectángulo, trabajando con los ángulos agudos formados en él, con el fin de solucionar problemas en el contexto de las razones trigonométricas. Pero a pesar de sus extensos estudios en la antigüedad, en la actualidad es diferente.

Uno de los cambios más significativos que el currículum ha tenido, fue el del 2009, donde retiraron las razones trigonométricas como un contenido escolar. Lo cual el interés en Chile de estudiar este objeto matemático redujera. En el año 2013, en el currículum se instauro que las razones trigonométricas si son un objeto necesario de estudio, por lo cual para el año 2016, en todos los colegios será necesario enseñar razones trigonométricas.

Pero constantemente se habla que lo conceptual siempre va unido a lo procedimental y una de las habilidades necesarias a la hora de poder resolver problemáticas, es la modelación. ¿Qué es la modelación en matemática? Es la habilidad de matematizar, en signos o estructuras una situación cotidiana, con el fin de darle respuesta o un sentido más lógico. El desarrollo de esta habilidad lleva a la mejor comprensión de los alumnos, por el nivel cognitivo que tiene y porque nos entrega diferentes representaciones de un concepto.

Por lo tanto el objetivo de esta investigación es crear una secuencia que permita lograr desarrollar la habilidad de modelar razones trigonométricas en triángulos rectángulos, con el fin de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje y superar cualquier obstáculo que estos objetos de estudio traigan consigo.

Como sustento teórico, se seleccionó la Teoría de las Situaciones didácticas como la más pertinente, por su forma de estructurar paso a paso los procesos mentales que los estudiantes hacen a la hora de desarrollar un problema y porque nos permite lograr que ellos logren crear el contenido por medio de estructuras y la guía del profesor.

Esta investigación está estructurada en la Ingeniería Didáctica, la cual se divide en cuatro procesos. Todo este proceso se le nombra “Primera fase: Análisis preliminares”. Luego se crea una secuencia y se analizan los objetivos, errores, técnicas y objetivos que tendrá que superar los obstáculos encontrados y mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje. A esto se le denomina “Segunda Fase: Concepción y análisis a priori de la secuencia”. Luego esta secuencia se lleva a las aulas para ver la reacción de los alumnos y como función, siendo esta la “Tercera fase: Experimentación”. Para finalizar con el estudio de los resultados y la confortación de los objetivos iniciales con lo que se logró, sienta la “Cuarta fase: Análisis a priori y resultados”.

Este trabajo está dirigido directamente a mejorar y estudiar el uso de las razones trigonométricas y su modelación, ya que es algo que las futuras generaciones deberán aprender y un contenido que se deberá enseñar, lo cual lo hace un objeto de estudio para la mejora del proceso de aprendizaje.

### **Antecedentes teóricos.**

La modelación, de forma general en la matemática, es un tema importante ya que, desde el antiguo Egipto, Arabia, el Renacimiento y en la Modernidad, se ha buscado matematizar las situaciones o conflictos que vive el ser humano, con el fin de darles solución y sentido a estas. Y desde este mismo enfoque, las razones trigonométricas se han transformado en un tema un tanto difícil de tocar en las aulas, por su complejidad y abstracción. Citas importantes como *“Todas aquellas herramientas –signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas”* (Rico, 2009). *“Es fundamental también en el desarrollo de esta unidad el trabajo con triángulos. El alumno o la alumna que se enfrente a la trigonometría deberán acometer una serie de problemas que involucran la resolución de triángulos. Por ello, aunque por sí solos no supongan un sistema de representación para los conceptos propios de la trigonometría, serán fundamentales en la modelación de un problema”* (Medina, pág. 20). Las razones trigonométricas se han transformado en un tema un tanto difícil de tocar en las aulas, naturalmente surgen varias interrogantes como: ¿Qué se espera que aprendan los estudiantes sobre razones trigonométricas?, ¿Qué obstáculos pueden encontrar en este proceso de aprendizaje?, ¿Cómo se puede facilitar este aprendizaje?, ¿Será la modelación, fundamental en este proceso? El objetivo general de la investigación será crear una secuencia didáctica, en un 2do medio, basada en la deducción de las seis razones trigonométricas y su valor en un ángulo de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , apoyándonos del triángulo equilátero, con su altura, y el cuadrado, con su diagonal. Para finalmente aplicarla en situaciones de modelación.

## Propuestas para la enseñanza de la matemática

El Marco teórico que se empleará en nuestra investigación sobre la modelación a las razones trigonométrica en resolución de problemas, es la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). La enseñanza es creada con las relaciones entre el sistema educativo y el alumno, vinculadas a la trasmisión de un saber dado y en donde “la relación didáctica se interpreta como una comunicación de informaciones” (Brousseau, pág. 13).



Imagen 1: Triángulo Didáctico

Una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio. Consideramos el medio como un subsistema autónomo, antagonista del sujeto. “*las situaciones suelen estudiarse como dispositivo para revelar los conocimientos del alumno*” (Brousseau, 1986).

### Metodología

La metodología utilizada en esta investigación es la ingeniería didáctica, por tener un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en clases (concepción, realización, observación y análisis de secuencia de enseñanza).

### Orígenes del conocimiento

En Egipto (2000 – 1800 A.c.) se dan los primeros rastros de la trigonometría y uno de los más reconocidos en lo que respecta a la matemática es el papiro de Rhind o Ahmes, para poder construir una pirámide, sugiere la utilización de trigonometría.

Más adelante en Babilonia (1900 – 1600 A.c.) una tablilla babilónica, donde se reconoce nuevamente la utilización de la trigonometría, ya que se ve la relación entre la hipotenusa y el cateto mayor como objeto de estudio, más que como herramienta. Su aplicación estaba dirigida al área de cuadrados y triángulos.

En Grecia (260 – 150 A.c.) es donde se acepta el nacimiento de la trigonometría, con el fin de dar solución a los problemas típicos de la astronomía.

Los Árabes (750 – 1300) con AL-Habas se introducen la función tangente. Pero no fue hasta los años 1200, donde Nasir-Eddin, hizo uno de los primeros libros de trigonometría plana y esférica, para resolver problemas en triángulos y esferas. En Europa medieval (S. XII) Regiomontano escribió su obra *De triangulis*, que en su segundo tomo habla directamente de la trigonometría, demostrando el seno y el coseno.

En Renacimiento Regiomontano, presenta en sus libros I y II, donde se trabaja propiedades de triángulos con trigonometría, teorema de seno y determinación de ángulos. Época de transición al barroco (1475 – 1580) con la obra de Nicolás Copérnico, se obtienen grandes avances en lo que es la trigonometría, por sus postulados de que la tierra gira alrededor del sol. Pero su aprendiz Georg Joachim Rheticus Opus palatinum de triangulis, crea las relaciones trigonométricas con proporciones respecto a los lados del triángulo rectángulo detallando las 6 funciones trigonométricas conocida.

La “Modelación Matemática” tiene que ver con la matematización en cursos regulares, sistemática y programada.

Ahora con respecto a la epistemología de la modelación, la autora divide la modelación en 5 grandes etapas:

- I. Época pitagórica: Con los números se explicaba el universo. En esta época el uso de las matemáticas estaba ligado a una visión de tipo religiosa y dominada por los mitos y religiosidad.
- II. Revolución científica de Galileo: Descripción de fenómenos naturales y leyes que rigen a la naturaleza, escritos en forma matemática.
- III. Época mecánica de Newton: Domina el pensamiento científico. una concepción mecanicista, asociada al movimiento de cuerpos. La naturaleza depende de las matemáticas y viceversa.
- IV. Siglo XX: Se dejó, paulatinamente, de mencionar modelos de tipo mecánico para dar lugar a formas de describir los fenómenos a partir de la analogía de las estructuras matemáticas subyacentes a éstos.
- V. Actualidad: Hoy el interés por la modelación matemática ha pasado a ser de sólo un dominio de quienes se dedican a las matemáticas aplicadas a un área de interés para la educación matemática. Se utiliza en todas las áreas de la matemática, y para todas las aplicaciones.

La unión entre lo que son las razones trigonométricas y la modelación, es que ambos nacieron de la necesidad de matematizar una situación y buscar la razón de aquel fenómeno.

### **Análisis curricular**

Es importante mencionar previo al análisis desde la perspectiva curricular, que el contenido de las Razones Trigonométricas fue eliminado del currículum pero en el año 2013 junto al ajuste curricular que tuvo la educación ese año se encuentra información de que el contenido habría sido asignado para realizarse en 2º año medio, donde solo el currículum muestra los aprendizajes esperados asignados a este contenido. Frente a lo mencionado completamente realizaremos el análisis curricular respecto a la TSD. Es por ello que para realizar un análisis más completo respecto a lo curricular se empleará una observación desde cada curso por sí solo, siendo Segundo Medio con el que se comenzará y luego se

empleará y utilizará dos visiones en 3° Medio las cuales serán comparadas y trabajadas cada una por sí sola, una es desde el Programa de estudio del año 2013 y la otra desde los archivos de Educar Chile, que es una página de apoyo dirigido a la comunidad educativa, principalmente a docentes y estudiantes.

### Contexto formal

Se utilizarán los primeros tres capítulos del texto “Trigonometría Elemental” para relacionarlos con el tema seleccionado siendo los capítulos II y III los utilizados para el trabajo de la secuencia didáctica.

Al leer el texto formal se puede denotar que en primera instancia busca dar las explicaciones a conocimientos previos que se deben tener para la comprensión de las Razones Trigonométricas, como lo son el manejo de los ángulos y la forma en la que los especialistas los trabajan (grados y radianes) que son tratados en el capítulo I del texto, pero no se debe olvidar que en el contexto escolar se emplean principalmente los grados.

Luego centrándonos en el Capítulo II llamado Razones Trigonométricas, lo primero que presenta el texto es la definición formal de razón para luego pasar a la presentación de lo que son las razones trigonométricas, dando la explicación formal a través del triángulo rectángulo de cada una de las 6 y luego empleando las demostraciones de estas a través de las relaciones entre ellas mediante los ángulos.

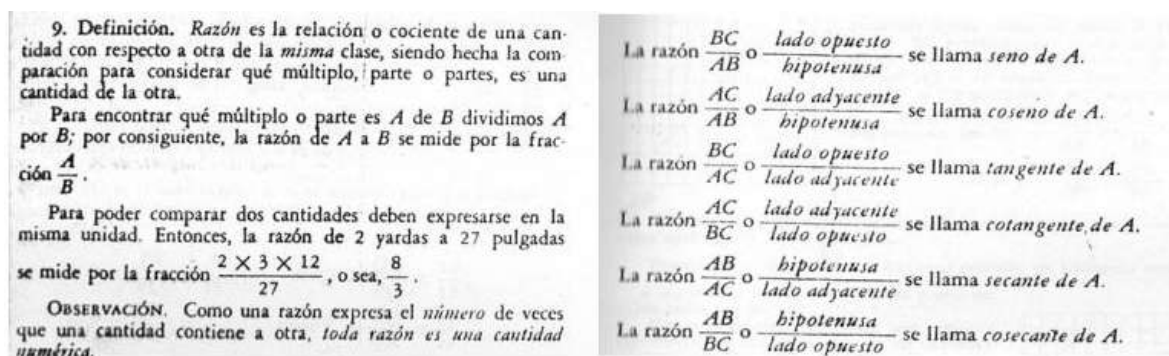


Imagen 2: Trigonometría Elemental, H. S. Hall, M. A.

En el Capítulo III que trata de las Relaciones entre las Razones Trigonométricas habla de las relaciones que se dan entre las mismas razones trigonométricas, demostrando que en varios casos se cumple una reciprocidad entre ellas. Finalizando el capítulo se muestra una serie de identidades trigonométricas son de apoyo para mostrar las relaciones y reciprocidad entre ellas.

Como bien se muestra el texto formal es un conjunto de definiciones y teoremas con los que se puede emplear el conocimiento desde su raíz principal, con esto, el texto no permite que se desarrolle una construcción del conocimiento propia por parte de los alumnos, pero lo que se podría emplear, es que el docente podría utilizar como una estrategia en base al

texto para generar el aprendizaje, donde los alumnos trabajaran las razones y utilicen extractos del texto formal entregados por el docente, con la intencionalidad de ir guiando a los alumno para concretarlo.

Frente a la modelación, el texto carece de trabajo para ello, puesto que solo presenta ejercicios a modo de replicación, y empleo de propiedades pero carece de ejercicios que generen o propicien a la modelación en el aula.

### **Análisis cognitivo**

Existen variados obstáculos y errores en el uso, tanto de la modelación, como de las razones trigonométricas. Por ende cuando se estudian ambos, los obstáculos se unen. Es así como en este apartado se clasifican esos obstáculos y luego con la secuencia didáctica, se intentaran eliminar. Previo a mencionar a los obstáculos, luego de amplias lecturas de respaldo, se considera de gran importancia saber de qué trata un obstáculo y por eso lo primero será definir un concepto de obstáculo según Bachelard (1938-1983) quien menciona entre otras cosas a los obstáculos didácticos como una tendencia, que de forma engañosa hace confiar en experiencias intuitivas. También se puede considerar como una pensión a generalizar, que puede esconder la singularidad de la situación.

### **Obstáculos**

Clasificación Ontogénico: a) Dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema. b) Dificultad en la aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas. Clasificación Epistemológica: Dificultad para modelar situaciones problema.

**Muestra:** La implementación exploratoria, en el marco del estudio de casos, aborda un caso de análisis, con 11 estudiantes de II° año de enseñanza media.

### **Instrumentos**

Secuencia: se empleara una secuencia didáctica propuesta por estudiantes de último año de la carrera de Pedagogía en Matemática y Estadística que consta de un test diagnóstico, una secuencia de duración dos clases y un test final.

### **Resultados y análisis**

Primer nivel de análisis:

Lo que se esperaba de los alumnos es que desde la evaluación diagnostica que se emplea, para luego aplicar una secuencia se pudiera demostrar que ellos lograran adquirir el aprendizaje para cuando es evaluado nuevamente en el test final, donde se esperaba que pudieran modelar todas las situaciones que se les presentaban, con respecto a triángulos rectángulos y que lograran desarrollarlos en el contexto de las razones trigonométricas,



## ***Propuestas para la enseñanza de la matemática***

---

utilizando seno, coseno y tangente, reconociendo ángulos de depresión y elevación. Además se esperaba que se evidenciara que los tres obstáculos encontrados se pudieran superar y el concepto quedara internalizado en los alumnos.

Los obstáculos eran:

- Dificultad para realizar las traducciones entre las distintas representaciones de las razones trigonométricas, a partir de los datos dados en el problema.
- Dificultad en la aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas (por ejemplo, confundir la definición de seno con la de coseno).
- Dificultad para modelar situaciones problema. (representación gráfica, simbólica, vocabulario e interpretación).

Dentro de lo que se dio en la sala de clases, con el test final, los alumnos fueron capaces de resolver satisfactoriamente el problema, ya que reconocieron cuales eran los de depresión y elevación y como interactuaban con el problema. Modelar la situación y entregar un resultado correcto. Lo mismo que con el tercer ejercicio. Pero a la hora de llegar al segundo ejercicio no lo entendieron de la forma que se esperaba, ya que la modelación no fue la correcta. Pero desde el punto de vista que la mayoría tuvo el mismo problema y lo entendió de la misma forma incorrecta, se concluye que el ejercicio estaba escrito de mala o no se dio a entender debido a su redacción. Por esto se concluye, por los otros dos ejercicios, que los objetivos fueron cumplidos, según lo que se rescató del test final, ya que lograron modelar las situaciones y resolverlas utilizando las razones trigonométricas.

### **Referencias bibliográficas**

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica En Educación Matemática*. Colombia. Una empresa docente.

Biembengut, M. y Hein, N. (2008). *Modelo, Modelación Y Modelaje: Métodos De Enseñanza-Aprendizaje De Matemática*. Departamento de matemática, Universidad Regional De Blumenau. Brasil.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal. Disponible en [http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas\\_teorico.pdf](http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf)

Fernández Medina, F. (2011). *Unidad Didáctica: Trigonometría, para un Master en formación al profesorado*. Universidad de Granada.

Montiel Espinosa, G. (2015). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

Palarea Medina, M. (2007). Algunos Obstáculos Cognitivos En El Aprendizaje Del Lenguaje Algebraico, Significado de Obstáculo. *Seminario nacional sobre lenguaje y matemática*. Chile.

Runza Montaña, G. (2015). *Las Razones Trigonométricas En El Planteamiento Y Resoluciones De Problemas*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de las ciencias.

Trigueros Gaisman, M. (2009). *El Uso De La Modelación En La Enseñanza De Las Matemáticas*. Instituto Politécnico Nacional. México.