PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR: RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS.

Caroline Salazar, Nezah Fuentes, Maribel Ñanco.
Escuela de Pedagogía en Matemática y Estadística Universidad de las Américas. Chile
caroline.salazar4@gmail.com, nezah_fuentes95@hotmail.com, maribelnanco@gmail.com

Resumen

Este trabajo gira alrededor de la problemática que tienen estudiantes al resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas aplicando diversos métodos de resolución, y en interpretación y uso dado a valores obtenidos, donde pueden identificar que las ecuaciones lineales por sí solas se transforman en obstáculo, impidiendo la comprensión de lo antes mencionado. Para salvar este obstáculo se propone una forma resolver sistemas de ecuaciones tomando en cuenta la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, ya que se suelen pasar por alto complicaciones de la operación de la conversión de registros sin asociar los elementos que se relacionan.

Introducción

A la conversión de un registro a otro se le entrega una importancia insustancial, cuando de hecho se ha documentado que en el álgebra lineal la conversión entre registros juega un papel central en el aprendizaje y que las conversiones que involucran al registro simbólico resultan de mayor dificultad. Tomando en cuenta documentos de apoyo relacionados con el tema de este trabajo, se consideran ciertos aspectos para el diseño de una secuencia didáctica, que busca que el estudiante que la lleve a cabo, tenga la oportunidad de apropiarse del conocimiento. Para lograr este objetivo se propone que el alumno trabaje diferentes registros: natural, gráfico, algebraico y aplicación. A su vez la estrategia principal es que el conocimiento se obtenga por descubrimiento guiado.

Desde nuestra perspectiva se piensa que es importante utilizar diferentes situaciones que involucren el contenido, y se cree que existen diferentes medios para adquirir un conocimiento, también se considera que involucrar más de uno enriquece el aprendizaje significativo, y aunque el proceso algebraico ha tenido prioridad en los últimos años, es bien sabido que por sí solo no es suficiente, por lo menos a lo que se refiere a la enseñanza-aprendizaje. Claro está, que con esto no se quiere decir que debamos dejar a un lado lo algorítmico, de lo que se trata es que el alumno interactué con los diferentes lenguajes matemáticos, para así darles la oportunidad de formarse criterios y construir su propio saber matemático. Con estas situaciones didácticas se espera favorecer el aprendizaje significativo, con el propósito de incidir positivamente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Antecedentes del origen y evolución del concepto matemático

El análisis o investigación de un objeto es necesario para el desarrollo de situaciones que lo involucren, y por lo tanto es de gran importancia saber su evolución histórica, ya que muestra los diversos obstáculos en el desenvolvimiento del objeto. El estudio histórico, de igual manera da pautas sobre las construcciones de los algoritmos que hoy son enseñados generalmente sin justificación. Realizando un recorrido por la cronología los primeros rudimentos de lo que hoy conocemos como sistemas de ecuaciones según un estudio realizado en el Instituto Tecnológico de Monterrey. Métodos numéricos y álgebra lineal: Los sistemas de ecuaciones lineales (NGJ/vo6, serie CB00851). Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica (Colette, J (1986) .Historia de las matemáticas, 2 vols., 2da. Edición, siglo xxi editores, México), plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = 7 manos
longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, es:

$$y + 4x = 28$$
$$y + x = 10$$

Restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

En el recorrido donde se analiza el objeto matemático en cuestión aparecen otros documentos descritos brevemente en un artículo llamado “Historia y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales” (Ramírez, U. (2013, noviembre 13). historia y desarrollo de los sistemas de ecuaciones lineales) donde se habla nuevamente de los babilonios y de otras etnias que han hecho su aporte o se han involucrado en el trabajo y desarrollo de los sistemas de ecuaciones.

Los babilonios (el mayor número de documentos corresponde al periodo 600 a. de C. a 300 d. de C.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado (Ramírez, 2013). Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhid -1.650 a. de C- y el de Moscú -1.850 a, de C.-) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refiere a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones (Ramírez, 2013). Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d. de C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era mayor por la geometría. Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal. Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de ecuaciones con n incógnitas. Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal (Ramírez, 2013). Diophante sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos (Ramírez, 2013).

Dificultades en el aprendizaje del objeto a enseñar

Obstáculo n° 1: Ecuaciones Lineales

En un artículo de Mabel Panizza se encuentran las siguientes evidencias:

Clasificación: Epistemológico, ya que en base a la definición del objeto matemático, surgen los errores en los estudiantes.

Evidencias:

Todos los estudiantes entrevistados resolvieron los sistemas propuestos correctamente. El primer sistema que se les presentó fue:

$4x = 3y + 8$
$x + y = 2$, cuya solución es el par *2,0.*

Ellos explicaron que un par de números es la solución del sistema si verifica cada una de las ecuaciones. Sin embargo, cuando nosotras preguntamos si la solución del sistema que ellos habían obtenido era una solución de la ecuación $4x = 3y + 8$ –considerada ésta aislada del sistema–, ellos dijeron que no. (E= entrevistadora; R= Rodolfo; D= Daniel)

Entrevista:

E: –Este par (el *2,0,* solución del sistema), ¿es solución de esta ecuación?
R: –No, de las dos.
D: –De las dos juntas, porque es un sistema.
E: –Ajá. Y ustedes, antes, ¿cómo habían hecho para saber que el *5,4* es solución de la de arriba?
R: –Reemplazando.
E: –Y quieren probar si el *2,0* es solución de la de arriba.
D: –No va a dar.

Todo ocurre como si los estudiantes pensaran que, en tanto el par *2,0* fue una solución obtenida manipulando las dos ecuaciones, no podría seguir siendo solución cuando desapareciera una de las ecuaciones que intervino en el proceso de obtención.

Frente a una explicación del entrevistador, Daniel y Rodolfo parecen aceptar finalmente que el par *2,0* es solución de la primera ecuación. Sin embargo, esta aceptación es sólo transitoria: cuando se los enfrenta a un nuevo sistema de ecuaciones en el cual sigue apareciendo la ecuación $4x = 3y + 8$ y se les pregunta si el par *2,0* es solución de la misma, ellos dicen que no, «porque ya no está esta ecuación» ($x + y = 2$, la segunda ecuación del primer sistema tratado).

Este resultado mostraría que, desde la perspectiva de los chicos, «la ecuación con dos variables en un sistema» es un objeto diferente de «una ecuación con dos variables».

Desde ese punto de vista, no tiene por qué haber relación entre la solución de la ecuación obtenida a partir del sistema y la solución de la ecuación aislada del mismo.

Evidentemente este hecho refuta el supuesto en el cual nos habíamos apoyado para pretender provocar desequilibrio en los alumnos al introducir una nueva solución de la ecuación «de la mano» de un sistema. (Panizza, M., Sessa, C., & Sadovsky, P. (1999). La ecuación lineal con dos variables. In Enseñanza de las Ciencias (p. 457-458)).

Justificación de la propuesta

Una ecuación puede contener uno, dos o más incógnitas, es decir, varios números distintos que se complementan en una ecuación, pero se sabe que a las incógnitas se le pueden designar diversos valores y tener infinitas soluciones. Cuando se forma un sistema de ecuaciones, es decir, dos o más ecuaciones, los valores satisfacen las mismas incógnitas y por lo tanto el sistema puede tener una solución o no tener solución (sistema de ecuación no compatible). Para el estudiante a veces es un obstáculo poder comprender que por una parte una ecuación con dos incógnitas posee infinitas soluciones y por otra comprender, identificar y analizar que dentro de un sistema de ecuaciones también forma parte de las soluciones por cada ecuación. Al proponer esta actividad se quiere obtener varios objetivos por ítems y en progreso. Primero cuando se comienza en el ítem I se le ayuda con valores que puede tener x, donde el par ordenado que obtengan como resultado, lo podrán utilizar a medida que vayan avanzando en la guía, observando así en esta parte de la guía de trabajo el lenguaje natural.

También se quiere que los estudiantes antes de llegar al registro algebraico y gráfico puedan observar en el plano cartesiano que ellos mismos confeccionaran, las soluciones que pueden seguir siendo más de las que logran sacar al reemplazar los valores de x. En el siguiente ítem ya se introduce el concepto de sistema de ecuaciones, al contener las ecuaciones del ítem I con otras (Figura 1.), que son pares ordenados justo y ya sacado de los primeros ítems. Se solicita que respondan con respecto a la presentación y destaquen la intersección que se han generado. Este ítem otorgaría el paso a la institucionalización del concepto. En el ítem III (Figura 2.), se quiere lograr que ellos también comprendan que existen sistemas de ecuaciones no compatibles, es decir, que no poseen un par ordenado en común al comparar una ecuación que satisface dos sistemas diferentes. Se ve que en uno de los sistemas tiene solución y el otro no. Y por última instancia se pregunta por el/los par(es) ordenado(s) que los estudiantes consideren que posee una solución, con la ayuda del anexo 1 (Método de Sustitución).

Figura 1. Ítem I, propuesta didáctica.

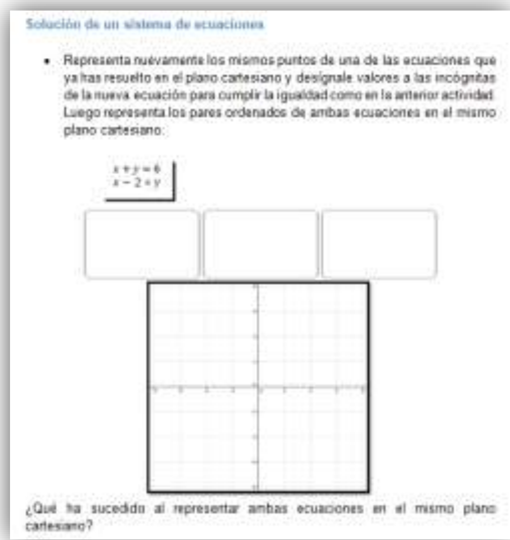

Figura 1. Ítem II, propuesta didáctica**.**

Conclusiones

Los sistemas de ecuaciones lineales son la operación que busca la solución que comparten las ecuaciones bajo todos los criterios que puede tomar éste, aunque aquello provoca una confusión en las soluciones de la ecuación lineal con dos incógnitas, ya que el resultado del sistema, se toma como lo antes mencionado y no se logra identificar que aquellos valores (resultado de “x” e “y”) son un par de la solución del sistema con dos incógnitas. Sin embargo la propuesta de enseñanza diseñada para aquella dificultad, toma en consideración que el problema proviene desde la identificación de la ecuación lineal con dos incógnitas (sus soluciones particulares), y se comienza por cubrir aquello realizando ejercicios de identificación de soluciones. Otra dificultad que se presenta en esta operación son las transformaciones que se realizan en los distintos tipos de registros, lo que quiere decir que no se logra hacer una conversión entre ellos, dificultando aún más el tratamiento que se debe realizar en la transformación. No se logra realizar la conversión entre el lenguaje natural al algebraico y del algebraico al gráfico, donde una de las causas identificadas en esto, es que los textos escolares y algunos profesores no realizan estas transformaciones en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones, enfocándose solo en los métodos de resolución, correspondiente al tratamiento del registro algebraico. También no existe conciencia de que este contenido corresponde a la introducción al álgebra lineal y se pasa solo como un contenido de álgebra I.

Referencias bibliográficas

Colette, J (1986). *Historia de las matemáticas*. México: SIGLO XXI editores.

De Herrero, M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 7(1)*, 49-78.

MINEDUC (2011). *Programas de chile 7° básico y 2° medio*. Actualización 2009. (Edición 2011)

MINEDUC (2012). *Programas de chile 5° y 6° básico*. Actualización 2012.

Panizza, M., Sessa, C., Sadovsky, P. (1999). La ecuación lineal con dos variables. *En enseñanza de las ciencias vol. 17*, pp. 453-461.

Tecnológico de Monterrey (2004). *Métodos numéricos y álgebra lineal. Sistemas de ecuaciones lineales*. Monterrey, México.

Zañartu, H., Arrigrandi, J., Ramos, O. (2013). *Texto del estudiante 2° medio* (4ta ed., p. 272). Santiago: Santillana del Pacifico.