RESOLUCIÓN DE LABERINTOS EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA DEL NIVEL MEDIO

Lorena Verónica Belfiori
Instituto San Francisco de Asís. Argentina.
lorenabelfiori@gmail.com

Resumen

Los alumnos necesitan aprender matemática, sin embargo, muchas veces le resulta tedioso el método por el cual intentamos enseñársela. Proponemos hacer uso de la resolución de laberintos para que ellos desarrollen habilidades matemáticas tales como estrategias de resolución, percepción espacial, fijar la atención, encontrar patrones perceptivos, desarrollar la memoria y la representación mental.

En el presente trabajo se relata una experiencia llevada a cabo en escuelas de nivel medio en las cuales los alumnos resuelven laberintos y a su vez, estos son utilizados para introducir conceptos de probabilidad y combinatoria.

Introducción

Las matemáticas nos ayudan a entender el mundo en que vivimos, a situarnos en él, a representarlo y a desmenuzarlo. En ocasiones nos cuesta reconocer las situaciones que pueden propiciar que nuestros alumnos construyan el significado y el sentido matemático de ese mundo en el que viven y las prácticas matemáticas que se desarrollan en las aulas se convierten, la mayoría de las veces, en ejercicios rutinarios que nada tienen que ver con sus conocimientos, ideas e inquietudes. Por tal motivo proponemos hacer uso de la resolución de laberintos en las clases de matemática.

La construcción de laberintos es muy antigua. Inicialmente se construyeron con fines míticos y religiosos. Luego se utilizaron con fines ornamentales y de diversión.

Por definición, un laberinto no es más que una estructura formada por calles y encrucijadas, normalmente compleja, que intenta conseguir la confusión en quien en ella se adentra. Su nombre proviene del latín “labyrinthus” y del griego “labýrinzos”. Sin embargo, la idea de laberinto que todo el mundo tiene difiere en parte con la definición original del mismo. Así, un laberinto, en el sentido clásico, llamado también laberinto univiario, es aquél en el que solo existe un único recorrido posible. En este tipo de laberintos no hay, por tanto, bifurcaciones y, podemos alcanzar sin pérdida el centro o final del laberinto desde su única entrada, recorriendo todo el espacio del mismo y, a través de una sola vía.

Sin embargo, cuando normalmente se piensa en un laberinto, siempre aparecen en nuestra cabeza caminos difíciles con bifurcaciones o vías cerradas que complican la llegada a la meta. Estos otros tipos de laberintos menos antiguos son los denominados mazes o laberintos de caminos alternativos. En ellos la elección de un camino u otro puede guiarnos hasta la salida o simplemente obligarnos a vagar por el mismo sin rumbo alguno.

Resolver un laberinto, es decir, recorrerlo por el sendero correcto para llegar a la meta siendo que existe una cantidad considerable de caminos posibles, representa un desafío para la mente de quien lo resuelve. Dada esta característica y por su connotación lúdica, se incluyen en la gran mayoría de las revistas de entretenimiento ya sea en formato papel o electrónico, y también se venden los tridimensionales construidos con alambres.

Hoy en día varios software educativos dan la posibilidad de crear laberintos utilizando contenidos escolares, tal como es el caso de Clic o HotPotatoes.

Uso de laberintos matemáticos en los escritos de Borges

También encontramos en la literatura alusiones a laberintos. Un escritor para el cual el laberinto es algo más que un símbolo, es Borges. En ocasiones lo convierte en el verdadero eje del relato, en el elemento estructural del mismo.

Todas sus obras giran en torno a laberintos y espejos, dos símbolos que se refieren a lo mismo, pues bastan dos espejos opuestos para construir un laberinto. Borges interpreta a los laberintos como una imagen del universo o de la forma en que la humanidad ve el universo, una imagen de la cultura humana, un lugar para perder a los hombres, una expresión del caos, una expresión del orden, lo que no puede comprenderse, la escritura de Dios, lo inhumano, los rigores de la lógica, la razón, etc.

La Biblioteca de Babel (Borges, 1981), cuento de la colección de relatos El jardín de los senderos que se bifurcan, surgida a partir de la descripción matemática fundamentada en un cálculo probabilístico y en el convencimiento de que los veinticinco signos del alfabeto producen un número finito de combinaciones, desemboca en último término en una errar cíclico al interior de un terrible laberinto que consume a la especie humana y la pone al borde de su próxima extinción. *A cada uno de los muros de cada hexágono corresponden cinco anaqueles; cada anaquel encierra treinta y dos libros de formato uniforme; cada libro es de cuatrocientas diez páginas; cada página de cuarenta renglones, cada renglón, de unas ochenta letras de color negro.*(Borges, 1981) El autor concluye su relato con las siguientes palabras: *Yo me atrevo a insinuar esta solución del antiguo problema: La biblioteca es ilimitada y periódica. Si un eterno viajero la atravesara en cualquier dirección, comprobaría al cabo de los siglos que los mismos volúmenes se repiten en el mismo desorden (que, repetido, sería un orden: el Orden).* (Borges, 1981)

Otros usos de los laberintos

Existen dos campos dentro de la ciencia interesados por los laberintos: la psicología y el diseño de computadoras. Los psicólogos han usado laberintos desde hace varias décadas para estudiar el comportamiento de aprendizaje en el hombre y en los animales. Se sabe que aún al más inferior de los gusanos se le puede enseñar a recorrer el laberinto de un tenedor, y la hormiga puede aprender laberintos hasta con diez puntos de elección. Para los diseñadores de computadoras, los robots que manejan laberintos son parte de un emocionante programa para construir máquinas que, como los animales, saquen provecho de su experiencia.

Uno de los más antiguos de estos pintorescos instrumentos es Teseo, el famoso ratón robot para resolver laberintos inventado por Claude E. Shannon, ahora en el Instituto Tecnológico de Massachussets. El ratón hace su camino sistemáticamente a través de un laberinto desconocido, que puede ser de conexiones múltiples, usando una variación del algoritmo expuesto por Edouard Lucas. Cuando el ratón llega a la unión en la que debe elegir, no lo hace al azar, como un hombre lo haría, sino que siempre toma el sendero más cercano a un cierto lado. *Esto es bastante difícil para máquinas de solución de problemas que contienen elementos aleatorios*, explica Shannon (1951). *Es difícil decir cuando está fallando la máquina si usted no puede predecir lo que ésta debería hacer*.

Una vez que el ratón ha encontrado su camino hacia la meta, los circuitos de la memoria le permiten recorrer el laberinto una segunda vez sin error. Un verdadero ratón es mucho más lento para aprender un laberinto, porque su técnica de exploración es en gran medida, aunque no completamente, de prueba y error al azar, y necesita lograr muchos éxitos antes de memorizar el camino correcto.

Las máquinas de aprendizaje del futuro adquirirán enormes poderes y jugarán papeles insospechados en las máquinas automáticas de la era espacial.

Resolución de laberintos

Cuando enfrentamos a los alumnos a la resolución de un laberinto, los desafiamos a un problema. Entendemos por problema lo que constituye un obstáculo o dificultad, siempre que exista un individuo con suficiente interés o inteligencia que se enfrente (lo ha percibido) y tenga la necesidad de resolverlo, reconociendo así el dominio donde está inserto y conociendo perfectamente la situación inicial (o situaciones iniciales) y el objetivo (u objetivos), razón por la cual es necesario encontrar la solución, esto es el camino de transformación de la situación inicial en la situación final.

Martín Gardner (1991) en su libro "Nuevos Rompecabezas Mentales" enuncia que, *desde el punto de vista matemático, un laberinto es un problema de topología. Si su plano se dibuja en una lámina de hule, el camino correcto desde la entrada hasta la salida es topológicamente invariante y se mantiene correcto no importa cuánto se deforme el hule. El laberinto se puede resolver rápidamente en un papel cuando se sombrean todos los callejones sin salida hasta que sólo queden las rutas directas.*

Pero cuando uno se enfrenta con un laberinto cuyo mapa no se posee, la cuestión es diferente. Si éste tiene una entrada, y el objetivo es encontrar el camino a la única salida, siempre puede resolverse el problema colocando la mano contra el muro de la derecha (o el de la izquierda) y manteniéndola ahí conforme se camina. Es seguro que se encontrará la salida, a pesar de que la ruta, con mucha probabilidad, no será la más corta. Este procedimiento también funciona en el laberinto tradicional, en el que la meta está en el interior, pero partiendo de la consideración de que no hay ruta por la que se pueda caminar alrededor de la meta y regresar a donde se empezó. Si la meta está rodeada por uno o más de estos circuitos cerrados, el método de la mano en la pared con seguridad lo llevará por la ruta más larga y lo sacará del laberinto; nunca podrá llevarlo a la "isla" dentro del circuito.

A los laberintos que no contienen circuitos cerrados, los topólogos los llaman "simplemente conectados". Esto equivale a decir que el laberinto no tiene muros separados. Los laberintos con muros separados sí contienen circuitos cerrados, y se les conoce como laberintos de "conexiones múltiples".

La técnica de la mano en la pared, que se usa sólo para laberintos "simplemente conectados", nos lleva una sola vez en cada dirección a lo largo de cada sendero por lo que asegura el arribo a la salida.

Existe un algoritmo que soluciona los laberintos, incluyendo los que están conectados en forma múltiple, con circuitos cerrados que rodean la meta. Una buena formulación se da en el libro de Edouard Lucas "Recréations mathématiques" (volumen 1, 1882*): Conforme camina a través de un laberinto, dibuje una línea en un costado del camino, digamos a la derecha. Cuando llegue a una nueva unión de caminos, tome el que desee. Si al caminar a lo largo de un sendero, regresa a una unión que previamente ha visitado, o llega a un callejón sin salida, dé la vuelta y regrese por donde llegó. Si al caminar a lo largo de un camino anterior, ya recorrido (un camino marcado sobre la izquierda), llega a una unión ya visitada, tome un nuevo camino, si uno está disponible; de otra manera tome uno de los viejos caminos. Nunca entre a un camino que esté marcado por ambos lados.*

Resolución de laberintos en el aula de matemática

En el aula de matemática se puede utilizar laberintos construidos con alambres o bien laberintos en papel. Los primeros nos permiten realizar un trabajo manual más palpable. Con alambres es posible hacer laberintos tridimensionales, representar situaciones basadas en problemas reales tales como ¿cabe un sofá por la puerta? ¿cómo colocarlo? o ¿Cómo sacar una pieza de un lugar inaccesible? O algo tan cotidiano como ¿cómo atar una bicicleta?, o bien elaborar pasatiempos para mejorar la visión espacial.

Los alumnos mientras juegan con los laberintos de alambre estudian la estructura, los movimientos y sus efectos; las equivalencias entre estructuras como por ejemplo orden de conexión topológica, estrategias de resolución, movimientos posibles, variación en la dificultad con algún cambio, formas de figuras que aparecen y otras. Además todas estas actividades mejoran la percepción espacial.

En la resolución de laberintos en tres dimensiones se ven implicados algunos procesos cognitivos importantes como la atención, los patrones perceptivos, la memoria y la representación mental.

Además, los laberintos se pueden utilizar en las clases de matemática como elementos disparadores y luego como herramientas para la introducción de determinados temas del currículo, como por ejemplo la Combinatoria o la Probabilidad, haciendo uso de la teoría de grafos.

Trabajo de campo realizado

Se trabaja con alumnos de tercer y cuarto año de una escuela secundaria de provincia durante el primer trimestre de clases en un taller especial con motivo al festejo de las Bodas de Oro de la institución.

Inicialmente, se les pide a los alumnos que investiguen acerca de la historia de los laberintos, dónde surgieron, de qué año datan, para qué se utilizaban. Nadie pensó en buscar la forma de resolverlos pues no creían que existiese un método sino que lo consideraban pura intuición y entretenimiento.

Luego se pidió que traigan a la clase distintos tipos de laberintos en papel. Algunos trajeron laberintos encontrados en alguna sección de juegos de diarios y revistas, otros buscaron en internet y varios compraron revistas específicas de resolución de laberintos y juegos de ingenio.

Reuniendo todo el material y la información recaudada por ellos, se hizo una puesta en común y se presentaron también los laberintos de alambres. Una cantidad considerable de alumnos los conocían y de hecho, algunos de los chicos declararon tener de esos juegos en sus casas o haberlos utilizado en jardín de infantes.

Los alumnos separados por grupos realizaron láminas con fotografías de laberintos encontrados, contando los datos pedidos en el cuestionario de investigación. Otros armaron presentaciones multimediales acerca del tema.

Luego se pasó a la etapa de resolución. En una primera instancia los alumnos se familiarizan con los laberintos de alambre tratando de resolverlos, es decir, buscando estrategias para separar las partes.

En esta primera fase, con los laberintos de alambres, los alumnos se divierten, intentan resolverlos y se compenetran en el juego, olvidándose que en realidad están utilizando matemática. El aspecto lúdico de la actividad permite que los estudiantes aprendan con mayor facilidad y menos tensión o preocupación.

Se observa a los educandos buscando estrategias para hallar el objetivo de separar los alambres. Muchos actúan sólo por intuición y tanteo, pero otros tanto piensan antes de intentar actuar.

Aproximadamente la mitad de la clase logra el objetivo en el tiempo fijado, el resto se lleva el laberinto para seguir intentándolo en sus casas. Se explica que existe una técnica para encontrar la solución, deben pensar, analizar la situación y luego actuar.

Después, en una segunda instancia se les pide que resuelvan distintos laberintos en papel explicando cómo halló la solución. Para que sean sinceros y detallen el procedimiento realmente empleado sin omitir la cantidad de intentos fallidos, se les pidió que no le colocasen nombre a la hoja. Se busca identificar las estrategias empleadas para la resolución de los laberintos y la evolución de las mismas, en caso de que existan.

En algunos casos, en el enunciado del laberinto a resolver se le incluyen reglas de juego lo cual le quita cierta libertad de accionar y los enfrenta a un problema real para ellos.

Cabe destacar que los laberintos dados en papel son de dos tipos, aquellos en los que se puede entrar en él o bien partir de un punto concreto de su interior y tener que buscar la salida y, por otro lado, aquellos en los que se pide que se encuentre un tesoro escondido en el laberinto, y que una vez encontrado, se salga del mismo. En el primer caso, no se tiene que recorrer el laberinto completo, sino buscar un camino que lleve a la salida. Pero para el último tipo de problemas, se tiene que recorrer el laberinto entero para poder encontrar el tesoro y hallar después un camino hacia la salida.

En esta segunda fase, los alumnos comienzan todos a resolver los laberintos con lápiz, procurándose tener siempre a mano una goma para borrar si no aciertan el camino. No presionan mucho el lápiz para que les resulte más fácil eliminar las evidencias del intento fallido.

Luego de repetirles reiteradas veces que la idea es que no borren y para ello se les facilita varias copias de cada uno de los laberintos que se les pide resolver, logramos que vayan dejando el rastro de lo trabajado.

Notamos que inicialmente intentan adivinar la solución correcta, se enojan por no hallarla en el primer intento y siguen trabajando por tanteo. Recién luego de varios fallos comienzan a pensar una estrategia y a valorar el tener frente a ellos los registros de los errores cometidos.

Los alumnos planifican su actuar. Algunos comienzan atacando el problema por el comienzo y otros, plantean resolverlo comenzando por el final, en forma inversa. Buscan regularidades entre un laberinto y otro. Cuando logran resolver uno, lo utilizan de ejemplo y se fijan si pueden repetir la estrategia en los otros.

Finalmente se explicó qué es un grafo y algunos conceptos necesarios de teoría de grafos para la resolución de laberintos y luego se enseñó distintos métodos de resolución de laberintos asociando el tema al cálculo combinatorio.

Los cuatro métodos explicados se extrajeron del libro ¿Perderse en un laberinto? No con las matemáticas (Hernández Fernández, I., Contreras, C., Nuñez Valdés, J., 2010). Luego de ponerlos en conocimiento de los métodos se les pidió que analizaran en grupos la aplicación y alcance de cada uno. En la puesta en común surgió que arribaron a las siguientes conclusiones:

Utilizando el primer método se puede recorrer el laberinto completo si la representación de éste lleva a un grafo que no tenga ciclos, es decir, que se trate de un árbol. Sin embargo, si el grafo tiene un ciclo, el laberinto no tiene por qué ser recorrido entero con este método, aunque lo que sí encontraremos será una salida.

El segundo método sirve para explorar el laberinto por completo recorriendo cada pasillo del laberinto dos veces, una vez en cada sentido. Hay que tener en cuenta que para su aplicación, se considera que cada pasillo comienza y acaba en un cruce y que un cruce es un punto donde se encuentran más de un pasillo.

Es el docente quien tuvo que explicar que en el grafo asociado a un laberinto la conclusión a la cual llegan los alumnos significa que si tenemos una arista formada por los vértices u y v, recorreremos la arista de u a v y también de v a u. Con esta consideración, podemos asignar al laberinto un grafo dirigido o digrafo. Además se hizo notar que con este método siempre se puede recorrer todo el laberinto lo que significa encontrar un camino euleriano en su digrafo asociado, recordándoles que la condición necesaria y suficiente para que un digrafo posea un circuito euleriano es que sea conexo y que todo vértice posea el mismo grado de entrada que de salida.

Entonces, luego de analizar un poco más el método concluyeron que como todos los vértices de los digrafos asociados al laberinto poseen un número par de aristas incidentes en ellos, la mitad de entrada y la otra mitad de salida, siempre se cumple la condición del teorema y por lo tanto existe el camino euleriano, es decir, cualquier laberinto se puede recorrer por completo.

Al analizar el tercer método, sólo encontraron diferencia respecto del segundo en lo que atañe a las reglas.

Del cuarto método comentan que fácil de aplicar aunque bastante largo. Sirve para explorar el laberinto por completo, aunque se recorren la mayoría de los pasillos más de una vez. Notaron que se basa en el conocimiento en todo el laberinto de la *distancia* entre donde uno se encuentra y el punto de partida, dada por el número de pasillos que hay entre los dos puntos.

Como cierre se comentó que el segundo método fue descrito por el matemático francés Gaston Tarry en 1895 mientras que el tercero fue inventado por el ingeniero francés Trémeaux, en la misma época que el anterior, y redactado por el matemático E. Lucas en el primer tomo de sus Récréations Mathématiques, en tanto que el cuarto fue diseñado por el matemático americano Oysten Ore.

En particular se asoció la resolución de laberintos con la Combinatoria en el tipo de grupos que se desean formar, asimilando esta cuestión con el número de bifurcaciones posibles en una etapa del laberinto, la importancia del hecho de que los elementos que formen esos grupos estén ordenados o no, que puede ser reflejada en la opción de elegir un sentido del recorrido del laberinto, la posibilidad de repetición de elementos en cada grupo, idealizada por el poder pasar o no varias veces por un mismo camino, etc.

Además, se relacionan los laberintos con la probabilidad a través del análisis de los diferentes caminos existentes en él.

Los alumnos demostraron mayor interés en el tema al ser planteado a través de la resolución de laberintos, haciendo matemática casi sin darse cuenta.

Conclusiones

Se considera la resolución de laberintos como una buena estrategia para ser introducidas en las clases de matemática ya que su uso facilita el aprendizaje de ciertos temas haciendo que los alumnos aprendan inicialmente jugando y luego formalizando conocimientos.

Obviamente, la forma de utilizar esta herramienta es totalmente subjetiva, dependiendo lógicamente de la mayor o menor profundidad con la que se desee emplear, del nivel de comprensión de los alumnos, del tiempo del que se pueda disponer para ello, y de otras variables más.

Pero, del presente trabajo, se puede concluir que el llevar el hacer matemático a realizaciones de orden manual como la manipulación de los laberintos de alambres permite un mejor manejo de las habilidades de la percepción espacial, ya sea estudiando la estructura, los movimientos y sus efectos o las equivalencias entre estructuras como por ejemplo orden de conexión topológica, modificando las estrategias de resolución, los movimientos posibles, o realizando una variación en la dificultad con algún cambio.

Además, la resolución de laberintos en papel permite analizarlos desde un punto de vista matemático para buscar posibles formas de resolución, enumerando los métodos que se conocen hasta el momento para alcanzar el final de estas misteriosas encrucijadas y llevar a nuestros alumnos a pensar y reflexionar sobre las estrategias utilizadas y la optimización de las mismas.

Referencias bibliográficas

Borges, J. (1981) El jardín de los senderos que se bifurcan. *Ficciones.* Décima edición. Buenos Aires: Alianza Editorial. pp.89-100

Flores Martínes, P. (2002). Laberintos con alambres (estructuras topológico-métricas) *Revista Suma N° 41*, pp. 29-35.

Gardner, M. (1991). *Nuevos Rompecabezas Mentales*. Buenos Aires: Editorial Selector

Hernández Fernández, I., Contreras, C., Nuñez Valdés, J. (2010). ¿Perderse en un laberinto? No con las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. N° 21,* pp. 69-85

Laberintos y matemáticas. Recuperado de http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/orden/mate5j.htm

Lucas, E. (1882) *Recréations mathématiques* Volumen 1 Lyon: Gauthier-Villars

Shannon, C. (1951) *Presentación en el 8° Encuentro Macy*.