

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN SITUACIONES PROBLEMA DE LA VIDA COTIDIANA

**Rafael Pantoja Rangel, María de Lourdes Guerrero Magaña, Ricardo Ulloa Azpeitia,
Sandra Minerva Valdivia Bautista**

Departamento de Matemáticas, CUCEI. Universidad de Guadalajara, Jalisco. México
rpantoja@prodigy.net.mx, lourdes.guerrero@gmail.com, ricardo.ulloa@cucei.udg.mx,
sandy_87siel@hotmail.com

Resumen

El estudio se centra sobre los elementos que intervienen en la modelación matemática, en el afán de incidir sobre la relación existente, entre las matemáticas y la vida cotidiana, contexto en el que desarrollan sus actividades, y no sólo en el aula. Algunas situaciones problema tratadas son: el atletismo, el lanzamiento de un balón, el tiempo de calentamiento de un automovil o de un horno, el llenado y vaciado de recipientes, el ciclismo, el movimiento de una rueda, un resorte o un péndulo, el movimiento de un automovil real y de juguete, el movimiento de una motocicleta, entre otros.

Introducción

Las matemáticas se han utilizado en la vida desde que el ser humano existe, las distintas civilizaciones a través del tiempo han dejado un cúmulo de conocimientos matemáticos de diferentes características y en distintos contextos, cada uno de ellos, de acuerdo a las necesidades que prevalecían en los diferentes momentos de la historia, tuvieron como objetivo dar respuestas a todo fenómeno, ya sea del área de física, química, astronomía, música, astrología, arte o religión, pero tal parece que en cierto momento, el profesor de matemáticas se ha olvidado de relacionar tales problemas de la vida cotidiana con la matemática planteada en el aula, que de acuerdo a Arrieta y Díaz (2015) y Suárez (2014), hacen más interesante su enseñanza y aprendizaje.

En este estudio se plantea como estrategia didáctica que a partir del desarrollo de actividades con diversas situaciones problema (Hitt, 2013) relacionadas con su contexto y apoyadas en la teoría de representaciones semióticas, el video digital y el software Tracker, el alumno construya la competencia de modelación matemática. El Tracker juega un papel preponderante en la estrategia porque a partir de la grabación en video de una situación problema, el estudiante interpreta y relaciona los datos, los gráficos y las funciones que proporciona el software con el desarrollo de la actividad, en la que se evidencia la acción de modelar (Ezquerro, Iturrioz y Díaz, 2011; Pantoja, Ulloa y Nesterova, 2013).

Es importante para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que se integren a la práctica escolar circunstancias, fenómenos, sucesos, etc., que propicien la aparición de las matemáticas en la vida del estudiante, en contextos diferentes a los tratados en las aulas tradicionales como son el atletismo, el lanzamiento de un balón, el tiempo de

calentamiento de un automóvil o de un horno, el llenado y vaciado de recipientes, el ciclismo, el movimiento de una rueda que gira sobre su eje o que rueda sin resbalar, un resorte o un péndulo, el movimiento de un automóvil real y de juguete, el movimiento de una motocicleta o las fotos de un chorro de agua de una fuente, de un arco de la iglesia y del arcoíris en un día con lluvia y sol.

Con el desarrollo de las situaciones problema mencionadas, en las que el estudiante es el protagonista principal, se pretende que obtenga datos y gráficas en tiempo real, adquiridos del programa Tracker a partir del video, para su análisis e interpretación y no como sucede en el aula, por ejemplo, que son un conjunto de datos extraídos de los libros de texto o ficticios inventados por el profesor.

Modelación matemática

Se ha mencionado que existe una gran preocupación por parte de investigadores en educación matemática, para que el alumno aprenda de manera significativa y una de las recomendaciones para lograrlo, es generar actividades didácticas que relacionen el contexto en el que desarrolla su vida cotidiana con las matemáticas, con la finalidad de promover en el estudiante el descubrimiento, la exploración, la intuición y la motivación por aprender matemáticas.

La modelación matemática es una de las opciones de que dispone el profesor para provocar en el estudiante motivación por aprender matemáticas, porque además de construir el modelo matemático de una situación problema, propicia reflexión sobre el comportamiento de las variables que intervienen y su vínculo con el fenómeno.

De manera particular, la modelación de una situación problema es una representación matemática de un objeto, que comprende signos o figuras que actúan como expresiones matemáticas del concepto. La modelación (Ver Figura 1), en el ámbito escolar se entiende como una práctica (de referencia) ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinado en respuesta a una situación o fenómeno del mundo externo pero cercano a la realidad del estudiante, de manera individual y colectiva, mediante el proceso de interacción (Córdoba, 2011, p. 10).

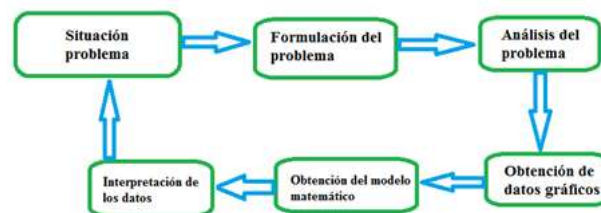


Figura 1. Esquema del proceso de modelación matemática.

Video digital en la enseñanza de las matemáticas

Como lo señala Jofrey (2010), el video digital se ha introducido en el aula con mayor fuerza que el video analógico, porque los controles de una VCR obstaculizaban la consulta de un video, a diferencia de los dispositivos de grabación y los programas para manipular video, una de las causas que en los últimos años ha mostrado la conveniencia de su introducción en el aula, para aprovechar su potencial de expresión y comunicación que ofrece un video digital. Uno de los beneficios de la tecnología de análisis de vídeo es que los estudiantes pueden visualizar varias representaciones de la misma situación problema, por ejemplo, del video digital del movimiento del ciclista se visualiza: una fotografía pictórica, tablas de datos, gráficas, fórmulas matemáticas y descripciones verbales y escritas (Jofrey, 2005).

En la actualidad se vive en una sociedad que cada vez es más visual, los estudiantes se interesan más en consultar videos de su interés en las bases de datos de internet, aunado a la disminución del costo de las videocámaras y en el desarrollo de tecnologías que facilitan el uso y distribución de medios y materiales educativos digitales. La producción de clips de videos educativos apoya la enseñanza, porque ofrece la oportunidad para comprender y desarrollar capacidades intelectuales durante el proceso y promover que los estudiantes se conviertan en creadores o diseñadores, con la finalidad de alcanzar una mayor profundidad en los temas de estudio.

Registrar en video objetos que se mueven o de situaciones reales, facilita a los docentes incorporar en el aula investigaciones auténticas que permitan a los estudiantes, con ayuda de software especializado, mejorar la comprensión de conceptos a aprender, así como a realizar representaciones gráficas, analíticas y numéricas de situaciones problema relacionadas con la vida cotidiana, como lo señalan Calderón, Núñez y Gil (2009), que utilizan la cámara digital como instrumento de laboratorio de Física para el estudio de un proyectil lanzado por un dispositivo de fabricación artesanal, que tuvo por objetivo comparar las predicciones teóricas con los resultados experimentales.

En Tracker los estudiantes pueden “marcar” la posición de un objeto en cada uno de los cuadros de un clip de video, para obtener información sobre su posición y velocidad, señalar los cuadros por segundo (*FPS*) de video, seleccionar la sección de video de interés y calibrar la interfase para relacionar las medidas del escenario real con la pantalla de la computadora, entre muchas otras funciones que se pueden realizar con las rutinas del programa.

Teoría de Raymond Duval

Es sabido que la cátedra tradicional se orienta hacia lo algorítmico y se deja de lado lo que Duval (2006) llama las representaciones semióticas de un objeto matemático, sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. En este estudio, el sistema de representación semiótica fue de utilidad dado que el profesor planteó de manera verbal y por escrito, diversas situaciones problema, relacionadas con su contexto para que eligieran con la que trabajarían, para posteriormente, mostrar los

Propuestas para la enseñanza de la matemática

registros analítico, numérico, gráfico, que en el caso del lanzamiento del balón, se relacionaron con el objeto matemático Parábola y sus representaciones semióticas, a saber:

- las gráficas de la parábola en sus diferentes posiciones en el plano cartesiano,
- los problemas de la vida cotidiana, en este caso, el lanzamiento del balón al aro del juego de basquetbol,
- las ecuaciones, en función de su posición en el plano cartesiano,
- las parejas ordenadas obtenidas de una medición de las variables en una situación problema y
- la descripción del objeto matemático en lenguaje común.

Todas estas representaciones semióticas no se obtienen de manera natural (Figura 2), ya que es el profesor quien debe diseñar actividades para que el alumno logre apropiarse de ellos, es decir, con propósitos comunicativos.

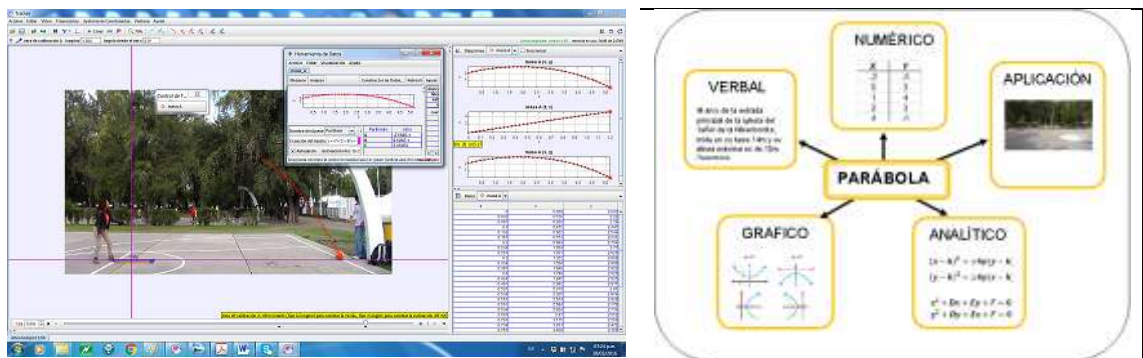


Figura 2. Registros semióticos del objeto parábola

Para Duval (2006) la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas, las cuales son de dos tipos: tratamiento y conversión. El tratamiento sucede cuando una transformación produce otra al interior de un mismo registro y hace relevante la elección del “mejor” cambio de registro para resolver el problema dado, al transformar internamente el registro.

En el objeto matemático Parábola, se realizan diferentes transformaciones dentro de un mismo registro, por ejemplo, si se considera el registro analítico, se puede aplicar el tratamiento a la ecuación ordinaria de la parábola $(x+2)^2 = -4(y+1)$ para obtener la ecuación general $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$ o viceversa. La conversión se refiere a la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial, es el cambio de un registro a otro, así por ejemplo del registro gráfico al registro analítico (Figura 3) o del registro verbal hacer la conversión al registro gráfico, numérico o analítico, para que el estudiante pueda interiorizar su conocimiento.

Propuestas para la enseñanza de la matemática

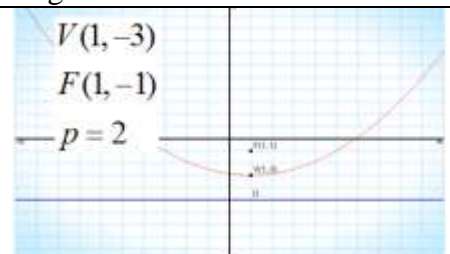
Registro Gráfico	Registro Analítico
	$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$ $(x - 1)^2 = 4(2)(y - k)$ $x^2 - 2x - 8y - 23 = 0$

Figura 3. Conversión del registro gráfico al analítico.

La conversión cognitiva rápida y espontánea de la coordinación de al menos dos registros de representación, es la base de la comprensión (integral) de un contenido conceptual, situación que el alumno tuvo que enfrentar cuando en la pantalla del computador se muestra el video del movimiento del balón, tres gráficas que representan el movimiento y los datos numéricos de la posición respecto del tiempo y de su posición. Con otra rutina, se presenta la opción de seleccionar la función que más se apega a los datos, en suma, los estudiantes en trabajo colaborativo tuvieron que interpretar las distintas conversiones entre los registros del objeto parábola con la situación problema del movimiento del proyectil.

ACODESA

En la metodología ACODESA se toma en consideración el trabajo individual y en grupo colaborativo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una adaptación a un acercamiento de interaccionismo social del aprendizaje de las matemáticas (Hitt & Cortés, 2009). En las 3 primeras fases el profesor funge como un guía y se deja a los estudiantes argumentar y validar sus producciones en el proceso de institucionalización. (Ver Tabla 1):

Tabla 1. La metodología ACODESA y su relación con el estudio propuesto

Trabajo individual	Ocurre en la participación del estudiante en el curso taller, en la modelación de la situación problema y en el diseño del escenario de grabación por ejemplo al lanzar el balón o realizar una carrera.
Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación	Se presenta en la grabación de las situaciones problema seleccionadas, en la obtención del modelo matemático y en la elaboración de reportes del trabajo realizado.
Debate	En el proceso de obtención e interpretación del modelo matemático, presentación del trabajo, elaboración de reportes y conclusiones.
Trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión.	En la fase final se les pidió que realizaran el proceso con una situación problema y hacer el análisis correspondiente.
Institucionalización.	Ocurre en la presentación de los trabajos en grupos colaborativos durante la discusión grupal y revisión de los reportes entregados.

Descripción de la fase de campo

Las situaciones problema tratadas fueron: movimiento: corredor, ciclista, automovil real y de juguete, motociclista y patinadora; lanzamiento de un balón en los juegos de voleibol, basquetbol, futbol soccer, futbol americano, frontón y caída libre; rodado de una llanta de bicicleta sin resbalar y girando sobre su eje; el llenado y vaciado de recipientes; el movimiento de un yoyo.

Los escenarios de grabación fueron la unidad deportiva y el coliseo olímpico del CUCEI, el aula y una carretera local. Previo a cada grabación de las escenas, se platicó con los estudiantes sobre la importancia de relacionar los conceptos matemáticos aprendidos en el aula de clases en situaciones cotidianas, además de hacer patente que la cámara de video se ubicara perpendicular al escenario, que la unidad de medida estuviera visible y que el actor o el objeto en movimiento portara un distintivo perceptible en todo momento en el video, porque de esa manera se genera menor error en los datos durante la transición de lo real a lo virtual. En la Figura 4 se muestran dos escenarios de grabación: caída libre y basquetbol.

Los alumnos se recrearon mucho, se mostraron interesados y contentos porque se divertían en su clase de matemáticas, suceso que pocas veces habían experimentado, a saber por los comentarios que hacían entre ellos, extendidos hacia el profesor. También se observó que muchos no están acostumbrados a jugar, no lanzaban bien el balón o al principio se tardaban un poco en participar, pero finalmente todos aceptaron y ya no fue un martirio jugar y aprender matemáticas.



Figura 4. Imágenes de la caída de un objeto y tiro a canasta al aro de basquetbol.

Es interesante la forma en cómo el trabajo de campo llamó la atención de los estudiantes, por ejemplo, el diálogo entre profesora y alumnos en el caso de la caída libre (Tabla 2), muestra que el trabajo colaborativo propició la discusión sobre cuál era la posición más conveniente de los ejes, el corte del video sobre el desplazamiento del objeto en cuestión y el movimiento que se analizaría, el número de cuadros que se tomaría en cuenta, entre otros parámetros.

Propuestas para la enseñanza de la matemática

Tabla 2. *Conversación entre alumnos 4 y el profesor de la situación problema de la caída libre*

<p>Pedro: Maestra...en este video (caída libre de la pelota), el aire nos la mueve un poquito del eje de las x. ¿eso no lo tomamos? Lo tomamos como si fuera un margen...</p> <p>Profesora: ¿Tú crees que te puede generar problemas cuando se desvía (la pelota)?</p> <p>Thelma: más bien... lo que nos interesa es la caída libre...o sea “y”.</p> <p>Pedro: lo que estamos planteando o lo que nos interesa es la caída en “y”...entonces... sí hay margen de error si tomamos x porque se va desviando...pero ya es por causas más externas por el material de la pelota o por la presencia del aire...entonces lo que nosotros hicimos...mmm este...pues a la “y”...la duda es...por ejemplo...aquí (señala la pantalla del video en Tracker) terminamos el corte (del video) cuando la pelota toca el suelo? ó ¿También cuando da el bote (la pelota)?...</p> <p>Un integrante de otro grupo interrumpe la conversación y contesta: Solo la caída libre.</p> <p>Profesora: puedes tomar todo el movimiento y hacer el ajuste de todo...desde que la sueltas (la pelota) hasta que rebota...o incluso cuando haya salido del cuadro y tomar todo el movimiento...pero...ustedes van a decidir qué es lo que te interesa... pueden hacer todo el tratamiento en Tracker...ustedes son libres de ubicar...sabes que de aquí a aquí (hace señas con las manos sobre la caída libre de la pelota) esto es lo que me interesa y lo demás no lo voy a tomar en cuenta...lo que decidas es correcto. A ver...si toman hasta abajo (refiriéndose a la caída de la pelota del balón hasta que toca el suelo) ¿sigue siendo caída libre?</p> <p>Luis Fernando: Sí.</p> <p>Profesora: Ah pues entonces pueden decidir de aquí a aquí es lo que me interesa y es con lo que van a trabajar.</p> <p>Luis Fernando: ¿Entonces puede ser hasta la medida de la regla?</p> <p>Thelma: Sí</p> <p>Profesora: Sí, pueden tomarlo así.</p> <p>Thelma: ¿Y nuestro eje no importa si lo ponemos arriba o abajo?</p> <p>Luis Fernando: Nada más sería...lo de cambio de signo ¿no? Si está arriba (refiriéndose a que los ejes se sitúen cuando se suelta la pelota)</p> <p>Profesora: Exactamente...de todas maneras obtendrían el ajuste...el punto donde ustedes quieren tomar el punto de referencia...el origen...si lo quieren en el piso o va a ser a partir desde donde se ve la pelota...como dicen solo va a ser el signo...si lo sitúan arriba va a empezar de menos.</p> <p>Pedro: ah...ok. Gracias.</p>

Análisis de la encuesta

La encuesta se integró de seis bloques relacionados con aspectos del proceso de solución de problemas, el empleo del programa Tracker, el papel del profesor, la realización de las actividades, el desempeño grupal, individual, las actividades, la presentación en sesión grupal y tres preguntas abiertas.

Con base en las respuestas dadas por los estudiantes, se intuye que tienen habilidades para resolver problemas matemáticos, que aprenden de mejor manera si se trabaja en forma colaborativa, en la cual se exponen ideas, escuchan a sus compañeros, llegan a acuerdos, conviven con sus compañeros y se propicia aprendizaje, les gustó trabajar con el programa Tracker, lo creen útil y consideran que su empleo facilita la comprensión de situaciones reales en matemáticas, además que el uso del software aumenta el interés y motivación para aprender matemáticas y consideran importante la actitud y la disposición del profesor para propiciar aprendizaje.

Pregunta. ¿Consideras importante el empleo de la tecnología?

Todas las respuestas coincidieron que la tecnología es importante para aprender matemáticas, enseguida se muestra la respuesta más representativa:

Respuesta: *“Sí, yo opino que sí, debido a que desde siempre las personas buscamos la manera de siempre usar los recursos necesarios de modo que podamos facilitar siempre el trabajo. En esta época en la cual la tecnología está revolucionando el mundo es importante empezar a aplicarla más en el aprendizaje y menos en actividades de ocio”*

Pregunta: ¿Consideras importante el uso de situaciones reales en matemáticas? Justifica tu respuesta.

Las respuestas dadas coinciden en que el empleo de situaciones reales en matemáticas permite comprender conceptos y algoritmos matemáticos y relacionar situaciones cotidianas con las matemáticas. Se muestran algunas respuestas interesantes.

Respuesta: *“Sí, porque eso te demuestra que las matemáticas sí son necesarias y no son sólo un conocimiento inútil y además, eso motiva a la gente a despertar el gusto por las matemáticas”*

Conclusiones

Las actividades que incluyen situaciones problema en cursos de matemáticas, con el empleo de la tecnología y el trabajo colaborativo, permiten al alumno tomar un rol activo en su aprendizaje, porque mediante la propia experiencia construye conceptos y desarrolla habilidades; mediante la interacción con sus compañeros, se enriquecen y fortalecen las ideas, los conocimientos, los argumentos y conclusiones expuestas por cada integrante del grupo para defender sus ideas, concepciones y puntos de vista basados en experiencias anteriores, conocimientos y habilidades adquiridas a lo largo de su educación.

La selección de situaciones problema relacionadas con el contexto del estudiante, genera ventajas sobre las actividades algorítmicas que generalmente se trabajan en el aula de clases, porque enfrentan al alumno a un escenario completamente diferente y real, lo que motiva a aprender matemáticas de manera activa, divertida y con un objetivo claro para el estudiante debido a que encuentra útil los conceptos y algoritmos matemáticos aprendidos en el salón de clases.

La modelación matemática como recurso didáctico en el aula de clases y fuera de ella, aplicado a cada situación de la vida cotidiana asignadas a cada equipo colaborativo, es una

buena opción para que el alumno discuta y exponga sus ideas, perspectivas, conocimientos propios, con el que se propicia interés por el aprendizaje de las matemáticas mediante su relación con situaciones de su contexto, además de permitir involucrarse en forma activa y dinámica en su aprendizaje.

El uso de las TIC, en este caso el software Tracker y video digital, es responsabilidad principalmente del docente, el cual debe ser consciente de la importancia que tienen y del tiempo de aprendizaje que invierte el estudiante, así como priorizar las actividades a desarrollar, en la que se reflejen las representaciones semióticas, los tratamientos y las conversiones entre registros y considerar además su utilización como una ventaja por el interés y la motivación por el uso de la tecnología.

El empleo de la tecnología motiva al alumno a aprender matemáticas, facilita la interpretación de datos y gráficos obtenidos a partir de situaciones reales y fáciles de identificar para el estudiante, también le permite construir el conocimiento, a reflexionar sobre los procedimientos empleados, los parámetros y variables que intervienen en el análisis de un fenómeno en cuestión.

El trabajo colaborativo es un aspecto importante en la modelación matemática, que se complementa con la resolución de problemas para hacer interesante al alumno el aprendizaje de las matemáticas, en particular, del ajuste de polinomios reales de una variable real.

El video digital empleado de las situaciones problema, proporciona una manera fácil y eficiente de obtener gráficas y datos numéricos, mismos que fueron interpretados por los estudiantes para obtener la mejor representación del fenómeno.

Por último, es importante resaltar la importancia de hacerle saber al estudiante que los profesores se interesan no sólo porque pasen un examen sino también porque aprendan, también necesitan sentirse importantes y apoyados por el profesor, porque pusieron énfasis en agradecer la forma en la que fueron tratados por el profesor y las actividades que diseñaron para mejorar su aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, núm. 1, pp. 19-48. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002>

Calderón, S., Núñez, P. y Gil, S. (2009). La cámara digital como instrumento de laboratorio: estudio del tiro oblicuo. *Latin American Physics Education*. Vol. 3. No. 1. pp 87-92. <http://www.journal.lapen.org.mx>.

Córdoba, F. (2011). *La modelación matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México. Distrito Federal. http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/cordoba_2011.pdf.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (1), 143–168.

Ezquerro, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 <http://hdl.handle.net/10498/14733>. <http://reuredc.uca.es>.

Hitt, F. (2013) ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática*, 1(1). 1-11.

Hitt, F., Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet* 10(1). (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate).

Jofrey, J. A. (2005). Video Analysis. Real-Wordl explotation for secondary mathematics. *Learning & Leading with Technology*. Vol. 32. Number 6.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Pantoja, R., Ulloa, R., Nesterova, E.(2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con software AVIMECA y MATHCAD. *Revista Virtual GONDOLA*. ISSN 2145-4981 2010.Vol. 8.Num. 1.pp 8-22.

Suárez, L. (2014). *Modelación-Graficación para la matemática escolar*. Madrid España: Ediciones Díaz de Santos. ISBN: 978-84-9969-614-0.