

## INVESTIGACIÓN PARA MODELAR CON MATEMÁTICAS ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE

Daniel Flores Ibarra – Bertha Medina Flores – Dulce María Peralta González Rubio –  
Carolina Rodríguez González

[daniel.flores1221@gmail.com](mailto:daniel.flores1221@gmail.com) – [berthamedina2002@yahoo.com.mx](mailto:berthamedina2002@yahoo.com.mx) –  
[dulperalta@yahoo.com](mailto:dulperalta@yahoo.com) – [fmenes@prodigy.net.mx](mailto:fmenes@prodigy.net.mx)

Tema: II.1 - La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelización Matemática.

Modalidad: CB comunicación breve

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)

Palabras clave: Investigación, aprendizaje, matemáticas, estrategia.

### Resumen

*Utilizamos el aprendizaje basado en proyectos de investigación en nuestros cursos como trabajo integrador para aprender matemáticas. El uso de esta metodología de enseñanza se justifica por la intención de promover propuestas educativas que reconozcan la capacidad y responsabilidad del estudiante y la colaboración de los grupos escolar, familiar y social en el aprendizaje de esta disciplina. El desarrollo de una investigación para modelar la realidad con matemáticas, ofrece a los alumnos cierta libertad en decidir los problemas a trabajar guiados por el profesor y, consideramos, se apega a los principios educativos que son el eje vertebral del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, es, además, una poderosa herramienta para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje porque permite enriquecer y diversificar aún más las formas de aprender que, como docentes, ofrecemos a nuestros alumnos. El trabajo con base en proyectos de investigación promueve la integración de diversos contenidos de los programas de matemáticas con los conocimientos de otras disciplinas y áreas de interés de los estudiantes, lo que permite un trabajo más amplio al potenciar las habilidades de los alumnos.*

**Introducción.** En la actualidad, el conocimiento matemático es de suma importancia para desarrollarse profesionalmente y la escuela ha de proporcionar las herramientas y estructuras para que sus alumnos se apropien de éste. En particular, el modelo educativo del CCH se propone formar individuos útiles a la sociedad, capaces de aprender a aprender, aprender a ser, aprender a hacer y aprender a convivir, consideramos que la estrategia de aprendizaje basada en proyectos de investigación, se apega a estos principios educativos que son el eje vertebral del Plan de Estudios del Colegio.

### *Descripción breve del aprendizaje basado en proyectos de investigación*

Esta estrategia de enseñanza constituye un modelo de aprendizaje en el que los estudiantes planean, implementan y validan proyectos que tienen aplicación en el

mundo real y/o de la propia disciplina que pueden ir más allá del aula de clase (Mora, 2002) y (Gil et al, 2001).

La tarea general es saber conseguir o generar la información pertinente que se requiere, con la intención de resolver un problema planteado por los propios alumnos, para luego organizarla, analizarla, sintetizarla y simbolizarla en la búsqueda de regularidades y patrones que ayuden a crear un modelo matemático que represente la realidad en estudio y permita, al operar con él, dar respuesta a dicha problemática. Esto involucra un gran trabajo, tanto de los alumnos como de los docentes que los asesoramos; los estudiantes, al desarrollar sus investigaciones, aprenden a conducirse en sus tareas de indagación y estudio, tanto en forma independiente como colectiva, elaborando y adquiriendo conocimientos —de matemáticas y otras disciplinas— con sus compañeros de equipo, utilizando para ello el apoyo de las TIC y otros recursos que eligen o generan en sus metodologías para lograr los objetivos planteados en sus trabajos de investigación.

***Características del aprendizaje basado en proyectos de investigación.*** Las metas del programa de aprendizaje de las matemáticas por proyectos de investigación, considera, además del reforzamiento en el dominio de los contenidos del programa de la materia, el logro de aprendizajes nuevos sobre la disciplina, el mejoramiento de las relaciones interpersonales e interinstitucionales —que se refleja en las participaciones en concursos de las ciencias, competencias de matemáticas, exposiciones, ferias y otros eventos académicos— así como los impactos positivos en la adquisición y desarrollo de habilidades intelectuales en todos y cada uno de los integrantes del equipo y del grupo, por lo que el cambio positivo en actitudes y valores es también altamente apreciado por todos. (Pozo, 2006).

Lo anterior nos ha llevado a definir las características que conforman nuestra propuesta de programa de aprendizaje de las matemáticas por proyectos de investigación, misma que a continuación enlistamos: §Está compuesto de actividades diversas orientadas educativamente. §Responde a necesidades específicas sobre la problemática del aprendizaje de las matemáticas de los alumnos del CCH. §Las actividades del proyecto pueden corresponder a contenidos transversales y horizontales del Plan de Estudios, dependiendo del problema objeto de la investigación. §Los estudiantes toman decisiones dentro de un encuadre prescrito. §Existe un problema o reto sin resolver (es no rutinario y abierto, i. e. nadie sabe lo que va a resultar). §Los estudiantes eligen y

diseñan las formas de trabajo y métodos para alcanzar una solución. § Los alumnos son responsables del acceso y manejo de la información que recaban. § La evaluación se torna constante durante el proceso de investigación. § Los aprendices reflexionan regularmente sobre lo que están haciendo. § El producto final que se genera con la investigación es evaluado con criterios de calidad. § El trabajo en grupo se desarrolla en una atmósfera de tolerancia y respeto al error, al cambio y a la opinión diferente.

***Ventajas de aplicar el programa de enseñanza “aprendizaje por proyectos de investigación”.*** Esta estrategia de enseñanza beneficia a los estudiantes porque los motiva a aprender cosas interesantes y/o importantes en su vida, ya que ellos mismos son quienes seleccionan el contexto y problema que desean investigar. La elaboración en sus investigaciones haciendo matemáticas les permite percatarse de la belleza y utilidad de esta ciencia en conexión con otras disciplinas cómo física, química, biología, medicina, arquitectura, música, pintura, escultura, teatro, periodismo y con las mismas matemáticas, por mencionar algunas (Cole, 1999). Aprender con interés propio es mucho mejor, ya que parte de la motivación de los estudiantes para realizar sus investigaciones se debe también a que le ven sentido y conexión a lo aprendido en el aula y la realidad que decidieron estudiar, esto deriva en que adquieran y retengan conocimientos con menos gasto de energía, además de lograr un mejoramiento en el desarrollo de sus habilidades y conocimientos de matemáticas. (Pozo et al, 2006).

Los alumnos, en el *programa de aprendizaje por proyectos de investigación* tienen la oportunidad de desarrollar una gran variedad de habilidades tales como trabajo en colaboración, planeación de proyectos, toma de decisiones y manejo organizado del tiempo, entre otras. Los valores y actitudes también juegan un papel importante aquí, pues la solidaridad, compromiso, responsabilidad, honestidad, formalidad, respeto al otro, entre otras, son necesarias para realizar sus investigaciones pues es necesario trabajar en ambientes propicios para el desarrollo de sus estructuras axiológicas. Esta experiencia coadyuva a preparar a los estudiantes para el mundo actual que les exige ser emprendedores y trabajar en grupo. (Bruer, 1995).

Optimiza la diversificación y la articulación de capacidades individuales y colectivas, así como potencia las destrezas de comunicación y resolución de problemas. Este aumento en las habilidades cognitivas y académicas apoya a los estudiantes en el mantenimiento y aumento de su autoestima, pues se saben capaces de lograr empresas

que tienen valor dentro y fuera del aula. (Cubero, 2000). Asimismo, las oportunidades de colaboración para construir conocimiento en colectivo les permiten compartir ideas entre ellos, lo que sirve de caja de resonancia a las ideas de otros para expresar sus propias opiniones y negociar soluciones, habilidades necesarias en sus futuros desempeños como profesionales. Esta estrategia de aprendizaje-enseñanza también les posibilita formas prácticas para enfrentar el mundo real y saber usar la tecnología (La Cueva, 2000).

Con esta experiencia de aprendizaje estamos proporcionando a los estudiantes, desde el nivel bachillerato, herramientas y destrezas cognitivas para realizar investigaciones que deberán desarrollar con mayor rigor científico-metodológico en el nivel superior, de esta manera, estamos contribuyendo a su formación universitaria para que tengan éxito académico.

### ***¿En qué consiste el aprendizaje basado en proyectos de investigación?***

Es un programa de aprendizaje a desarrollar en un año escolar (dos semestres) y consiste en la elección de un problema de interés para un grupo de alumnos (máximo 5 integrantes). Es una actividad cuya finalidad principal es fomentar la interdisciplina, se lleva a cabo a mediano plazo (un año) y está centrada en el estudiante, quien aprende construyendo en colectivo, nuevas ideas o conceptos con base en sus conocimientos previos, actuales y los futuros por aprender que visualiza como de acceso posible en el corto plazo para llevar a buen logro su investigación.

Las actividades del proyecto responden a contenidos transversales integrando las áreas de conocimiento que forman el Plan de Estudios del Colegio —historia, ciencias experimentales, talleres y matemáticas— vinculándolas de acuerdo con los temas y fenómenos que eligen investigar los alumnos.

Las metas del proyecto de investigación que planteamos a los alumnos en nuestros cursos, consideran el logro de los aprendizajes, mejoras de las relaciones interpersonales e interinstitucionales y la generación de conocimiento nuevo que, por sí mismo, crea en ellos motivación, retos y gozo al jugar un papel activo durante la realización de su investigación.

*Elementos a considerar en el diseño de los protocolos de investigación que sirven como anteproyectos para participar en el programa de aprendizaje por proyectos de investigación.* (Mora, 2002 y 2004). Para el diseño de los protocolos y con la finalidad de conseguir con ellos los objetivos de aprendizaje planteados en nuestros cursos, nos preguntamos lo siguiente: ¿Qué habilidades cognitivas deseamos que nuestros discípulos desarrollen? ¿Cuáles son las habilidades afectivas y sociales que queremos promover en nuestros alumnos? ¿Qué habilidades metacognitivas anhelamos que desarrollen los estudiantes? ¿Qué tipo de problemas serán los que estén en capacidad de resolver los alumnos a este nivel? ¿Qué actitudes y valores queremos que nuestros educandos pongan en juego al realizar este trabajo?

Con base en lo anterior, para este año escolar diseñamos tres protocolos generales de investigación y dejamos a los estudiantes en libertad de elegir el tema que fuera de su interés relacionado con alguno de los protocolos propuestos.

### ***Implementación del trabajo.***

Para llevar a cabo la *estrategia de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas mediante la realización de investigaciones*, procedimos como sigue:

***&Orientación de los trabajos de investigación.*** La plática introductoria para los estudiantes versó sobre lo significa investigar y el valor de una investigación matemática, para que se enteraran, de qué partes se compone (introducción, objetivos, delimitación del problema, hipótesis, marcos teórico y de referencia, metodología, análisis de resultados, conclusiones y alcances), qué es un protocolo de presentación, cómo realizar la presentación de sus reportes finales.

Durante los meses que dura la actividad, orientamos a los estudiantes e hicimos énfasis en: ***&Cómo se hace una investigación matemática.*** ***&Las investigaciones en matemáticas y el diseño metodológico según la modalidad (experimental o documental).*** ***&La organización del trabajo en equipo para lograr las metas de la investigación.*** ***&Cómo delimitar el problema, realizar la descripción clara de los objetivos y las hipótesis a probar.*** ***&En el diseño de la metodología para cada investigación, según la modalidad que escogieran (experimental, documental).*** ***&En la elaboración de los marcos teóricos y de referencia adecuados.*** ***&Cómo llevar a cabo el análisis de los datos***

recabados. **&Cómo validar la modelación matemática de lo estudiado.** **&En cómo debe ser la estructura de presentación de un reporte de investigación, entre otras cosas.**

**&Temas y contenidos,** los estudiantes tuvieron como opciones para elegir tres temas presentados mediante protocolos de investigación para estudiar sobre: uso y abuso del agua, número de oro y nutrición, una vez elegido el tema, hicieron su investigación.

**&Materiales,** la recopilación de materiales y datos acerca del problema a investigar quedó a cargo de cada equipo. **&Propósitos del trabajo,** los alumnos plantearon los objetivos de sus trabajos de investigación dentro del marco de un de los tres protocolos presentados.

**&Formas de realizar la investigación,** los alumnos eligieron las formas que consideraron más convenientes para realizar sus investigaciones. **&Asesoramiento.**

El trabajo de dirección de investigaciones se realizó durante las asesorías impartidas los viernes en horario extra-clase de 8 a 15 horas. Estuvieron presentando sus avances semanalmente, así como sus dudas y problemáticas de cada grupo. La orientación les sirvió también para superar obstáculos. **&Trabajo en equipo y aprendizaje colaborativo.**

En este renglón, ante los problemas de los estudiantes para trabajar integrados en equipo y observar que al término de un semestre habían sido incapaces de concretar sus trabajos de acuerdo con las metas propuestas, fue necesario impartir un taller extraordinario para que aprendieran a trabajar en equipo. Como resultado de esta actividad, la mayoría de los estudiantes lograron terminar sus investigaciones, incluso algunos equipos participaron en la XX Concurso Feria de las Ciencias. **&Evaluación,**

fue un proceso continuo ya que desde el inicio de la experiencia los alumnos fueron supervisados, valorados y retroalimentados por nosotras sus asesoras. Al término del segundo semestre, cada equipo preparó un audiovisual para presentar su trabajo al pleno del grupo y de las asesoras con lo cual lograron una de las valoraciones que compusieron la calificación final del trabajo realizado. Los elementos a considerar en esta evaluación que contempló, tanto el desempeño individual como el global por equipos, se cristalizó en las respuestas a las siguientes preguntas: 1. La exposición ¿deja claro cuál es el objetivo del estudio? Digan porqué. 2. El trabajo de investigación, ¿realmente aporta un conocimiento (para el grupo) relacionado con matemáticas? ¿Cuál? 3. Digan cuál es el conocimiento que más les llamó la atención y califiquen al equipo con una escala del 0 al 10, dependiendo de lo claro que les quedó el trabajo.

### ***Resultados del programa “aprendizaje por proyectos de investigación”***

El trabajo de investigación implicó enfrentar obstáculos y resistencias, unas externas y otras internas, por parte de los investigadores (alumnos) y sus asesoras; en cuanto a los obstáculos internos, por ejemplo, podemos mencionar la organización y logro del trabajo en equipo, lo cual requirió nuestra intervención con un taller extra-aula, como ya mencionamos arriba. Otros obstáculos se presentaron en investigaciones que implicaban, por su complejidad, profundidad y alcance, mayor estudio de teorías y conocimientos que están fuera del currículo del bachillerato o que son tan avanzados o especializados que los alumnos no pudieron acceder a ellos, ya sea porque todavía no tenían la madurez para adquirirlos y mucho menos aplicarlos en una investigación con rigor científico o porque las reglas de los institutos de investigación no les permitieron la entrada, entre otros.

En cuanto a los obstáculos externos, hubieron investigaciones que requirieron de información especial, como por ejemplo, el equipo que escogió el tema de cáncer provocado por el uso de envases de plástico que necesitaron de datos de morbilidad en hospitales y centros de salud, tropezaron con restricciones para el conocimiento y uso público de esta información; con la finalidad de poder acceder a ella se buscaron alternativas como entrevistas a médicos, estadísticas del INEGI, boletines y publicaciones médicas, sin embargo esto no fue suficiente y la investigación quedó corta en relación con los objetivos que se habían planteado, aun así, el equipo obtuvo diploma en el XX Concurso Feria de las Ciencias.

Otras investigaciones requirieron del estudio de conocimientos de temas que los estudiantes desconocían hasta ese momento, como por ejemplo, la investigación que trató de encontrar el número Phi en algún elemento de nuestro Sistema Solar, los alumnos necesitaron estudiar conceptos de física, astronomía, geometría analítica y las leyes de Kepler; en otras se necesitaban conocimientos de conceptos y técnicas estadísticas como muestreo y pruebas no paramétricas para probar sus hipótesis.

El estudio de conocimientos fuera del currículo del CCH para lograr las investigaciones, a nosotros los asesores, nos permitió recordar contenidos y técnicas de mayor alcance que se pueden aplicar en estas investigaciones, y a los alumnos, ampliar sus conocimientos más allá de los que podían obtener en nuestros cursos. En la última experiencia con esta metodología asesoramos a 42 equipos. Mencionaremos los títulos

de los cinco trabajos que fueron seleccionados para presentarse en el XX Concurso Feria de las Ciencias.

Título de la investigación	<i>Resultado en el XX Concurso Feria de las Ciencias</i>
Matemáticas para desmitificar al número áureo como criterio de belleza.	<i>Primer lugar</i>
La razón de oro y el color.	<i>Tercer lugar</i>
Matemáticas, una ventana al mundo joven y a la alimentación.	<i>Mención honorífica</i>
Matemáticas que modelan la relación entre las conductas alimentarias y el aprovechamiento escolar.	<i>Finalista y diploma</i>
Matemáticas para descubrir la realidad... ¿El pet causa cáncer? Estadísticas y datos interesantes.	<i>Diploma</i>

Algunos de los títulos de las otras investigaciones que no concursaron porque terminaron a destiempo son: §Phi y el color, §Phi en el Sistema Solar, § La razón dorada en la naturaleza, § “Todo lo que brilla es oro”, §¿En dónde podemos encontrar el número áureo? §Producción de botellas de plástico en México y el cáncer de mama. §Número áureo entre mujeres y hombres de 12 a 17 años. §Matemáticas que modelan conductas alimenticias para la salud (6 con el mismo título). §La dieta de las matemáticas. §La razón de oro. El número áureo en la música y sus efectos. §Un cuerpo, un método. §Combustible cerebral. §Matemáticas para el mejor aprovechamiento del agua. §Matemáticas y mi alimentación. §Alimentación en CCH Sur. §En busca del número áureo en nuestro sistema solar. §Las matemáticas, ser adolescente y la comida.

**Conclusiones y perspectivas.** Los resultados que hemos obtenido con este programa de aprendizaje por proyectos, en todos los años que llevamos implementándolo desde 2006, nos ha dado grandes satisfacciones —el que los alumnos participen en diversos concursos y obtengan los primeros lugares viendo premiados sus esfuerzos y los nuestros y, sobre todo, no podemos dejar pasar la enorme satisfacción de mencionar, que aun cuando no todos los alumnos han concursado, si podemos, como ellos lo afirman, decir que aprendieron mucho y que obtuvieron otro panorama de lo que significa hacer matemáticas, pensamos que esto es lo que hace realidad el Modelo Educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

Nuestra idea es continuar con este trabajo docente ya que redundo en posibilidades para el desarrollo del pensamiento matemático en nuestras aulas, además de que tiene la virtud de permitir el que los alumnos aprecien las matemáticas con una visión más amplia y humana de esta ciencia y sus aplicaciones en el entorno en que vivimos.

### **Bibliografía**

- La Cueva, A. (2000). *Ciencia y tecnología en la escuela*. Madrid. Editorial Popular.
- Bruer. J. T. (1995). *Escuelas para pensar*. Ministerio de Educación y Ciencia. Barcelona. Temas de educación Paidós.
- Cole, K.C. (1999). *El universo y la taza de té. Las matemáticas de la verdad y la belleza*. Barcelona. Ed. SineQuaNon.
- Cubero, R. (2000). *Cómo trabajar con las ideas de los alumnos*. Sevilla. Díada Editorial S. L.
- Mora. D. y R. Oberliesen. (2004). *Trabajo y educación: jóvenes con futuro*. La Paz, Bolivia. Editorial Campo Iris.
- Mora, D. (2004) *Aprendizaje y enseñanza. Proyectos y estrategias para una educación matemática del futuro*. La Paz, Bolivia. Editorial Campo Iris.
- Mora, D. (2002) *Didáctica de las matemáticas*. Universidad Central de Venezuela. Ediciones de la Biblioteca.2002.
- Gil, D. et al. (2001) *Formación del profesorado de las ciencias y la matemática. Tendencias y experiencias innovadoras*. Barcelona. Editorial Popular.
- Pozo, J.I. et al. (2006). *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona. Editorial Grao.