

## A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS COMO POSSIBILIDADE PARA O ESTUDO CONJUNTO DA GEOMETRIA E DA ÁLGEBRA

Lilian Esquinelato da Silva – Inocêncio Fernandes Balieiro Filho  
lilianes93@gmail.com – balieiro@mat.feis.unesp.br  
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Brasil

Tema: I.3 Pensamento Geométrico.

Modalidade: Comunicação Breve

Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)

Palavras-chave: Atitudes; Geometria; Álgebra; Teorema de Pitágoras.

### Resumo

*O objetivo da pesquisa que estamos realizando é elaborar e desenvolver com os alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual na cidade de Ilha Solteira – SP atividades de ensino que relacionem os conteúdos algébricos e geométricos para o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras e, com isso, discutir as contribuições dessas atividades para a compreensão dos alunos. Para isso, foram aplicados questionários diagnósticos com o intuito de verificar as atitudes dos alunos com relação à Matemática e as dificuldades que eles encontram na resolução de problemas que envolvem álgebra e geometria. Após a análise dos dados obtidos, foi elaborada e desenvolvida com os alunos uma sequência de atividades para o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras. Podemos afirmar que as atitudes dos alunos com relação à Matemática estão relacionadas ao desempenho que eles têm na disciplina e que as atividades desenvolvidas contribuíram para um bom desempenho dos alunos na resolução dos problemas propostos.*

### Introdução

A falta de conhecimento dos conceitos geométricos tem sido um dos fatores que influenciam as dificuldades dos alunos na compreensão da interligação da geometria com a álgebra. Diversos trabalhos publicados nos Anais de recentes congressos da área de Educação Matemática (por exemplo, EBRAPEM 2010 e CIAEM 2011) apresentam estudos que discutem tais dificuldades.

Dentre esses estudos, destacamos os trabalhos de Melo (2011) e de Kluth (2011) que, além de discutir as dificuldades dos alunos em estabelecer relações entre os conteúdos geométricos e os conteúdos algébricos, apresentam e discutem atividades que foram desenvolvidas com os alunos e que exploram as intersecções entre esses conteúdos da Matemática.

Melo (2011), por exemplo, estuda o procedimento de verificação de igualdades algébricas utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Ensino. Como referencia teórica, utiliza a Teoria das Situações

Didáticas de Brousseau e o jogo de quadros proposto por Douady e sua abordagem metodológica é a Engenharia Didática proposta por Arigue.

Kluth (2011) desenvolve uma pesquisa que envolve o método corpóreo rítmico de ensino de conceitos matemáticos da aritmética e da geometria que foi aplicado na 3ª série do Ensino Médio. Seu objetivo era trabalhar o conhecimento geométrico utilizando movimentos corpóreos rítmicos e associando-o ao conceito de segmento, perímetro, área, noção de número como medida (distância ou referente à área) e sequências numéricas.

As políticas públicas educacionais têm apontado o uso da resolução de problemas no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática como uma metodologia que pode levar os alunos a “aprender a aprender”. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), enfatizam que, ao resolver um problema, o aluno elabora hipóteses, faz tentativas, compara seus resultados com os dos seus colegas e verifica se os procedimentos que está utilizando são válidos. (BRASIL, 1998, p. 41).

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (BRASIL, 1998, p. 38).

Segundo Brousseau (2002), diante das concepções modernas de ensino, espera-se que o professor escolha de maneira criteriosa os problemas que serão propostos aos alunos. Tais problemas devem fazer os alunos falar, agir, pensar e evoluir. Ao passo que o aluno trabalha sobre o problema proposto, o professor não deve interferir ou sugerir o conhecimento que se pretende construir. Para Brousseau (2002), o aluno sabe muito bem que o problema foi escolhido para ajudá-lo a adquirir um novo conhecimento, mas ele também deve saber que esse conhecimento é possível de ser construído em virtude da lógica interna do problema.

Nesse contexto, o objetivo da pesquisa que estamos realizando é elaborar e desenvolver com os alunos de uma turma de 9º ano de uma escola pública estadual da cidade de Ilha Solteira uma sequência de atividades de ensino que relacione os conteúdos algébricos e geométricos, por meio do Teorema de Pitágoras e discutir as contribuições do desenvolvimento dessa atividade para a compreensão dos alunos.

Para isso, temos os seguintes objetivos secundários:

- 1) discutir as atitudes dos alunos diante da Matemática;
  - 2) discutir as dificuldades dos alunos em conteúdos de álgebra, geometria e em problemas que relacionem essas áreas;
  - 3) discutir as contribuições do desenvolvimento de atividades diferenciadas para a compreensão dos alunos na resolução de problemas que relacionam álgebra e geometria.
- Neste trabalho, apresentamos os resultados obtidos com base nos dois questionários que foram aplicados com o objetivo de elaborar um diagnóstico sociocultural dos alunos, compreender as atitudes dos alunos em relação à Matemática e avaliar as dificuldades da turma para resolver problemas que envolvem conteúdos básicos de aritmética, geometria e álgebra. Além disso, apresentamos os resultados preliminares obtidos com o desenvolvimento de uma sequência de atividades para o ensino do Teorema de Pitágoras.

#### **Metodologia: Coleta e Análise de Dados**

O trabalho aqui apresentado foi realizado com uma turma do 9º ano em uma escola estadual de Ilha Solteira. Os sujeitos da pesquisa são jovens de 15 a 17 anos. A turma tinha 34 alunos.

Em março de 2012, foram aplicados dois questionários com o objetivo de elaborar um diagnóstico sociocultural dos alunos, compreender as atitudes dos alunos em relação à Matemática e avaliar as dificuldades da turma para resolver problemas que envolvem conteúdos básicos de aritmética, geometria e álgebra. O primeiro questionário era composto de 5 questões de Matemática (dois exercícios, sendo o primeiro deles com 4 itens) que relacionavam conteúdos de álgebra e geometria e o segundo de 9 questões sobre atitudes dos alunos em relação ao estudo e a aprendizagem de Matemática.

O primeiro questionário foi aplicado em 22 de março. Esse questionário foi elaborado tomando-se por base questões da Prova Brasil – 2011 e das Experiências Matemáticas – 8ª série (SÃO PAULO, 1994). A intenção deste primeiro questionário foi avaliar a compreensão dos alunos em associar a geometria e a álgebra para poder resolver alguns problemas matemáticos.

O segundo questionário foi aplicado no dia 23 de março. Nesse dia, dos 34 alunos da turma, 25 estavam presentes. Esse questionário foi elaborado a partir das questões da tese de doutorado de Brito (1996). A análise dos dados obtidos mostra que a maioria dos alunos não recebe ajuda para fazer as tarefas de casa, não têm o hábito de estudar durante a semana e que só estudam na véspera das provas. Em uma das questões, foi

solicitado que os alunos colocassem as matérias escolares em ordem, começando das que mais gostavam até as que menos gostavam. Dos 25 alunos que responderam ao questionário, apenas 4 colocaram a disciplina de Matemática entre as três primeiras.

Em outra questão, perguntamos quais os dois conteúdos de Matemática, vistos nos anos anteriores, que eles mais tinham gostado. Dois alunos responderam Geometria, 1 notação científica e frações, 2 frações, 2 “mais e menos”, 2 “bolinhas”, 1 raiz quadrada, 2 dízima periódica e frações, 6 responderam “nenhum”, 4 não responderam a questão e 1 respondeu que gostava de todos, 1 que gostava dos conteúdos da 7ª série (8º ano) e 1 que gostava dos conteúdos do ano anterior.

Sobre a relação com a Matemática os adjetivos usados pelos alunos foram tristeza, desânimo, raiva, sofrimento, cansaço, perda de tempo, tortura e preguiça. O que podemos afirmar até o momento, é que a atitude dos alunos com relação à Matemática está relacionada ao desempenho que eles têm na disciplina.

Com os resultados obtidos por meio do primeiro questionário, percebemos que os alunos conseguiram resolver as questões que tratavam de razões entre lados de retângulos, mas tiveram dificuldades nas questões que envolviam áreas de figuras geométricas. O motivo desses resultados é um ponto que pretendemos investigar melhor.

As relações entre geometria e álgebra, foram exploradas no primeiro questionário mediante exercícios que relacionavam razão (entre lados, entre perímetros e entre áreas de retângulos) e dízimas. Os alunos parecem ter compreendido essas relações, mas devemos lembrar que o conteúdo sobre dízimas estava sendo estudado na ocasião da aplicação do questionário. Assim, para discutir as dificuldades dos alunos em conteúdos de álgebra, geometria e em problemas que relacionem essas áreas, concluímos que precisávamos aprofundar nossas investigações. Desse modo, elaboramos e desenvolvemos com os alunos uma sequência de atividades para introduzir o Teorema de Pitágoras.

### **Atividades Envolvendo o Teorema de Pitágoras**

Foi elaborada uma sequência de atividades sobre a relação das medidas dos lados do triângulo retângulo com as áreas quadrados cujos lados têm medidas iguais às medidas dos lados do triângulo retângulo. Essas atividades foram desenvolvidas com a turma de 9º ano de uma escola estadual da cidade de Ilha Solteira. As atividades foram desenvolvidas em 18 aulas.

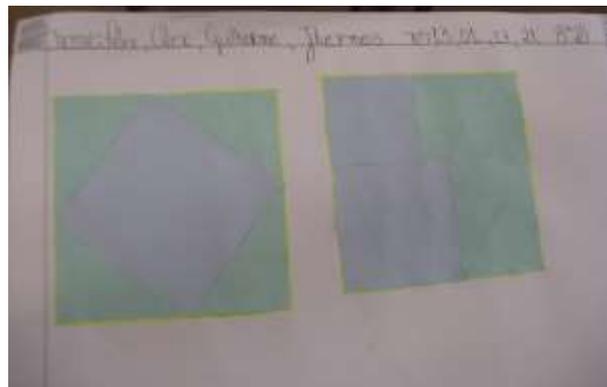
Na aula do dia 19/10/2012, foram propostos alguns problemas para que os alunos tentassem resolver da forma que considerassem mais adequadas. Após as tentativas de resolução, foi sugerido que utilizassem o Teorema de Pitágoras para poder resolver os problemas propostos.

Para isso, foi apresentado o triângulo retângulo e a nomeação dos lados, ou seja, catetos e hipotenusa. Em seguida, no papel quadriculado, pediu-se que os alunos desenhassem 3 triângulos retângulos e, para cada triângulo retângulo, que desenhassem quadrados relativos aos lados. Em seguida, pedimos que eles observassem a área dos quadrados relativos aos catetos e a área do quadrado relativo à hipotenusa de cada um desses triângulos.

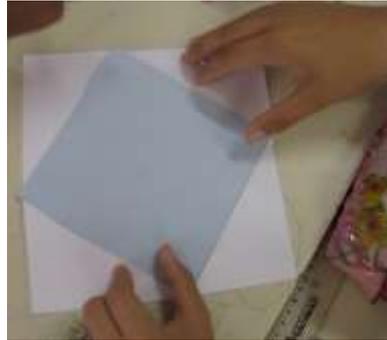
Na aula seguinte, foi solicitado aos alunos que desenhassem e recortassem em uma cartolina 8 triângulos de medidas 12 cm, 16cm, 20cm e quadrados de respectivos 12cm, 16 cm, 20 cm. Os alunos foram orientados para que, em grupos, montassem dois quadrados:

- i) um quadrado utilizando 4 triângulos mais um quadrado de 20cm;
- ii) um outro quadrado utilizando 4 triângulos e mais dois quadrados de lados 12 cm e 16 cm.

Abaixo podemos conferir um dos trabalhos feito por um grupo dos alunos da 8ª série:



Esta atividade foi importante para levar os alunos a expressarem e enxergarem uma das muitas representações do Teorema de Pitágoras.



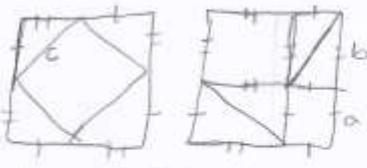
Na aula do dia 14/11/2012 foram propostos alguns problemas para 12 alunos presentes. A primeira atividade propunha para que os alunos indicassem através dos valores dados aos lados dos seguintes triângulos, se são particularmente triângulos retângulos. Apenas 25% dos alunos não souberam resolver a atividade por falta da má interpretação. A questão 2 é um problema para identificar a altura de um muro dado que há uma escada de 12 metros apoiada à ele e a distância da base da escada ao muro é de 8 metros. Nesta questão 67% dos alunos conseguiram responder coerentemente. Seguindo para a terceira questão, o problema é descobrir a distância percorrida pela bola de gude de acordo com os dados da figura. Tivemos que 5 alunos conseguiram resolver questão, outros 5 alunos chegaram na expressão algébrica correta mas erraram cálculos ao tentarem encontrar a solução e outros 2 alunos não tentaram resolver o problema. A quarta questão é para indicar os nomes dados aos lados do triângulo retângulo, e 67% dos alunos responderam corretamente. E a quinta questão tinha o objetivo de encontrar a área do triângulo, mas primeiro os alunos deviam encontrar a altura através do Teorema de Pitágoras.

A partir desta avaliação e das avaliações do processo da aprendizagem dos alunos, propomos aos 22 alunos que estudassem um pouco mais em casa e para reforçar os conceitos trabalhados durante estas aulas entregassem, dia 21/11/2012, na forma de trabalho, os exercícios trabalhados na sala de aula. Destes 22 alunos, 68% entregaram o trabalho.

Na aula do dia 21/11/2012 foi aplicada uma avaliação individual. A questão 1 tinha o objetivo de avaliar se os alunos recordavam a aplicação do Teorema de Pitágoras e 80% dos alunos acertaram. Na questão 2 era pedida a nomeação dos lados do triângulo retângulo e 87% dos alunos souberam responder. E a ultima questão propunha que os alunos demonstrassem o Teorema de Pitágoras e 41% dos alunos conseguiram demonstrar.

Abaixo, está uma demonstração tradicional feita por um dos alunos:

Exercício 3. Demonstre o Teorema de Pitágoras.



$A_1 = (a+b) \cdot (a+b)$   
 $A_1 = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$   
 $A_1 = a^2 + 2ab + b^2$  ✓  
 por altura lado  $A_1$ '  
 Área de 4 triângulos + área de um quadrado de lado  $c$   
 $A_1 = 4 \times \frac{b \times a}{2} + c^2$   
 $A_1 = 2ab + c^2$  ✓  
 nos temos duas expressões que representam o  
 $A_1 = A_1$   
 $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$   
 $a^2 + 2ab - 2ab + b^2 = c^2$   
 $a^2 + b^2 = c^2$

*cateto<sup>2</sup> + cateto<sup>2</sup> = hipotenusa<sup>2</sup>*

As atividades desenvolvidas durante este período tiveram o objetivo de despertar no aluno uma visão mais abrangente do Teorema de Pitágoras, indo além de propor exercícios em que o aluno simplesmente realizasse aplicações. Eles tiveram a oportunidade de aprender e compreender como demonstrar, por meio da geometria, o Teorema de Pitágoras. Os alunos tiveram um bom desempenho na resolução dos problemas propostos, não só aplicando uma “fórmula”, mas interpretando e explicando o que estava sendo pedido nos problemas. Devemos salientar que um estímulo importante foi a pretensão da maioria dos alunos em realizarem a prova de acesso ao Ensino Médio na escola técnica ETEC de Ilha Solteira.

O desempenho dos alunos na resolução da questão 3, pode ser explicado pela dificuldade em “isolar” o ‘x’, dado que ‘x’ é a altura do muro e um dos catetos que forma um triângulo retângulo com a hipotenusa determinada pela escada.

Poucos alunos conseguiram realmente finalizar a demonstração do Teorema de Pitágoras. O trabalho realizado durante as aulas (a demonstração e a aplicação do Teorema de Pitágoras) facilitou a compreensão de alguns alunos e os auxiliou a iniciarem a demonstração, mas apenas 42% dos alunos conseguiram concluir a demonstração.

### Considerações

Trabalhar com as duas áreas paralelas, a álgebra e a geometria, foi importante para explicar a demonstração do Teorema de Pitágoras. Desta forma, os alunos tiveram uma noção para que, sozinhos, pudessem aprender a demonstração clássica do Teorema de Pitágoras. Além disso, eles puderam perceber que o teorema relaciona as áreas dos quadrados relativos às medidas dos lados do triângulo retângulo. Conseguimos, ao longo das atividades, que alunos considerados tímidos, expressassem suas dúvidas, e também despertamos a curiosidade dos alunos em alguns assuntos matemáticos.

Pretendemos, com base nos resultados obtidos, elaborar outras atividades que relacionem esses conteúdos, tendo como foco o Teorema de Pitágoras, segundo a metodologia de resolução de problemas e história da Matemática, buscando fazer que os alunos tenham uma nova relação com a disciplina de Matemática e que, dessa forma, possam apresentar atitudes mais positivas.

### Referências bibliográficas

- Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática*. Brasília: Ministério da Educação – Secretaria do Ensino Fundamental.
- Brito, M. R. F. (1996). *Um Estudo sobre as Atitudes em Relação à Matemática em Estudantes de 1º e 2º graus*. 1996. (Tese de Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York: Kluwer.
- Kluth, V. S. (2011). Aproximações entre Aritmética e Geometria: um resgate fenomenológico de aspectos humanos na construção do conhecimento matemático. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife: Edumatec, UFPE.
- Melo, A. F.; Freitas, J. L. M. (2011). Verificação de Igualdades Algébricas por meio de mudanças de quadros no Ensino Fundamental. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife: Edumatec, UFPE.
- São Paulo (1994). *Experiências Matemáticas, 8ª série*. SEE-CENP.
- Wagner, E. (2006). *Teorema de Pitágoras e Áreas - Iniciação Científica OBMEP*: Rio de Janeiro, Brasil.