

O CONCEITO DE FUNÇÃO: SIGNIFICADOS UTILIZADOS POR UM GRUPO DE PROFESSORES

Rogério Fernando Pires – Benedito Antonio da Silva
rfpires25@hotmail.com – benedito@pucsp.br
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) - Brasil

Tema: Pensamento Algébrico

Modalidade: CB

Nível educativo: Não específico

Palavras chave: Função, Significados de Função, Registro de Representação

Resumo

O presente trabalho apresenta e discute os resultados de uma investigação realizada com oito professores de Matemática que atuavam nos Ensinos Fundamental e Médio. Tal investigação teve por objetivo identificar e analisar os diferentes significados de função apresentados por esses professores, como também, a coordenação dos diferentes registros de representação apresentada por eles durante a realização de algumas atividades matemáticas. Para tanto, a fundamentação teórica buscou apoio na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003, 2011) e nos pressupostos da natureza do processo de concepção de função de Dubinsky e Harel (1992). Os dados foram coletados por meio de uma lista composta de sete atividades referentes ao conceito de função e uma questão, na qual os sujeitos teriam que expressar quais eram os significados que atribuíam para função. Os resultados mostram que alguns dos professores investigados apresentaram dificuldades na manipulação dos diferentes registros de uma função; nas transformações entre eles (principalmente no que tange a conversão); muitas variáveis visuais pertinentes não foram levadas em consideração na realização de algumas atividades e que grande parte dos sujeitos investigados atribuíram a função o significado de relação entre dois conjuntos.

Introdução

O conceito de função permeia grande parte da Matemática. As funções estão presentes na maioria das ciências, pois grande parte dos fenômenos estudados pelo homem pode ser modelada por uma relação funcional.

Por se tratar de algo tão essencial para a ciência como um todo, e principalmente para a Matemática, acreditamos que o ensino e a aprendizagem de tal conceito seja influenciado pela maneira como o indivíduo que ensina concebe esse objeto matemático, ou seja, os significados que o professor atribui para esse objeto, exerce influência no processo de ensino e aprendizagem.

Partindo dessa perspectiva, o presente estudo apresenta e discute os principais resultados de uma investigação realizada com oito professores de Matemática de atuavam nos Ensinos Fundamental e Médio, que teve por objetivo identificar e analisar

os diferentes significados de função apresentados por esses professores e, ainda, a coordenação dos diferentes registros de representação utilizados por eles na realização de algumas atividades que envolviam o conceito de função.

Ao investigar os significados que os professores atribuem à função, acreditamos que eles poderiam emergir de maneira espontânea e diversificada na realização de atividades, é por esse motivo que os dados do presente estudo foram coletados por meio de uma lista contendo sete atividades referentes ao conceito de função que contemplavam a articulação entre as diferentes representações desse objeto matemático e uma questão, na qual os sujeitos expressaram os significados que atribuíam para esse objeto.

Fundamentação teórica

As questões relacionadas ao conhecimento humano estão diretamente ligadas ao objeto de conhecimento e suas representações. Muitas vezes tidas como “imitações” do objeto, as representações são confundidas com o próprio objeto, gerando o que aqui chamamos de “dualidade entre objeto e representação”.

Na Matemática essa dualidade pode acontecer com frequência, o que provavelmente trará dificuldades na compreensão dos conceitos, podendo causar limitações no processo de ensino e aprendizagem. É muito comum alunos e até mesmo professores referir-se a “ $f(x) = 2x+2$ ” como sendo uma função e não a representação algébrica da mesma.

Diferentemente de outras áreas do conhecimento na Matemática, as representações assumem um papel fundamental na constituição dessa ciência, uma vez que todos os objetos de conhecimento da ciência em questão são abstratos e que só conseguimos manipular suas representações, sendo, portanto, essencial conhecer as diversas representações de um mesmo objeto.

De acordo com Duval (2011), o conhecimento é adquirido a partir do momento que o indivíduo não confunde a representação de um objeto com o próprio objeto e compreende que as representações são meios de acesso aos conhecimentos relacionados ao objeto em questão.

Existe uma diferença fundamental entre os objetos e suas representações, é que diferentemente dos objetos as representações podem variar segundo o ponto de vista e o

sistema utilizado para reproduzir a representação. Parafraseando Duval (2011), o objeto surge como invariante de suas inúmeras representações, possibilitando assim, uma compreensão do objeto de diversos pontos de vista, permitindo ao indivíduo a exploração das diversas características que estão relacionadas a esse objeto.

Para Duval (2003), aprender Matemática está condicionado ao ato de representar, tratar e converter registros de representação semiótica num determinado nível cognitivo. Ele ainda salienta que a abordagem cognitiva tem por finalidade, em seu início, procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar, ele próprio, a diversidade do fazer matemático (atividade matemática) que lhe é proposto em situação de aprendizagem.

Partindo dessa perspectiva, entendemos que a apropriação de um conceito matemático deva acontecer de forma que o indivíduo tenha uma compreensão global, relacionando os diferentes registros de um mesmo objeto para que não se corra o risco dele confundir o objeto de estudo com a sua representação.

Nesse sentido, Duval destaca que:

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na disponibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. (2003, pp.14).

Partindo dessa perspectiva, acreditamos que o processo de ensino e aprendizagem também deva privilegiar a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, pois só assim o estudante só terá domínio do conceito estudado.

Na realização das atividades matemáticas, algumas transformações entre os registros de representação são realizadas com o intuito de compreender melhor a atividade proposta e realizá-la da maneira mais satisfatória possível. Contudo, essas transformações de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica são classificadas de duas maneiras, o tratamento que é uma transformação dentro de um mesmo sistema de registro, ou seja, uma transformação interna em que o sistema inicial é preservado. O outro tipo de transformação é a conversão, que consiste numa mudança de sistema (registro), conservando o objeto matemático, ou seja, o registro de partida após esse tipo de transformação não é o mesmo que o de chegada, apenas o objeto matemático é preservado.

Quanto as conversões entre os registros algébrico e gráfico, elas podem ser classificadas em quantitativas e qualitativas. Uma conversão é quantitativa quando, por exemplo, se

parte de uma expressão algébrica que representa uma função, em seguida calcula-se os valores numéricos que são transportados ao campo quadriculado, que de acordo com a correspondência estabelecida pela regra, os pontos são ligados para estabelecer a representação gráfica. Esse tipo de leitura dos dados, independente do sentido em que a conversão é realizada não permite uma coordenação entre os registros gráfico e algébrico.

A conversão entre os registros gráfico e algébrico é considerada qualitativa quando são identificadas as variáveis visuais pertinentes, ou seja, são interpretadas as implicações dos valores escalares pertencentes a representações algébricas nas representações gráficas, como também, os valores visuais das representações gráficas nas representações algébricas.

Quando a intenção é explorar a conversão entre a representação algébrica e a gráfica e vice-versa, é preciso identificar a maior quantidade possível de variáveis visuais pertinentes, seus diferentes significados e formas de apresentação para determinar o que implica cada variável escalar da representação algébrica na representação gráfica e vice-versa.

Na tentativa de evidenciar os significados de função utilizados pelos sujeitos participantes de nossa pesquisa, também utilizamos para a fundamentação de nosso estudo o trabalho de Dubinsky e Harel (1992), no qual os autores classificam a concepção de função em pré-função, ação, processo e concepções de objetos.

Os autores consideram pré-função como um assunto que não lembra muito o conceito de função. Seja qual for o termo utilizado para tal assunto, este significado não é muito usado na execução de tarefas que são chamadas na Matemática de atividades relacionadas às funções.

Uma ação é uma representação mental ou uma manipulação de objetos. Tal concepção de função envolve, por exemplo, a habilidade de relacionar números a expressões algébricas e calcular. Esta é uma concepção estática em que o sujeito tende a pensar um passo de cada vez. Segundo os autores, um indivíduo em que sua concepção de função é limitada à ação, pode ser capaz de formar uma composição de duas funções dadas pelas expressões algébricas, substituindo cada ocorrência da variável em uma expressão por outra expressão, em seguida simplificando-a, mas ele provavelmente será incapaz de

compor duas funções em situações mais gerais como, por exemplo, quando são dadas por diferentes expressões em diferentes partes de seu domínio, ou se elas não forem dadas absolutamente por expressões, mas por algoritmos.

Um processo de concepção de função envolve um processo dinâmico de transformação de quantidades de acordo com alguns meios repetitivos, dada a mesma quantidade original, produzirá sempre a mesma quantidade transformada. O sujeito tem a habilidade de pensar sobre a transformação como um início de uma atividade completa começando com objetos de algum tipo, fazer algo sobre esse objeto e a obtenção de novos objetos é o resultado do que foi feito.

Uma função é concebida como um objeto se for possível realizar ações sobre ele, ações de caráter geral que o transformam.

Considerando o indivíduo que a compreensão de função está sendo construída, de acordo com os autores uma ação de concepção é um tipo de pré-processo de concepção. Isso implica que muitos indivíduos encontram-se numa fase de transição da ação para o processo, e como toda transição cognitiva, o processo nunca segue uma única direção. Isso faz com que seja muito difícil determinar com certeza se o conceito de função que um indivíduo possui está limitado à ação ou ao processo de concepção.

Desenvolvimento do estudo, análise e discussão dos resultados

A pesquisa de caráter qualitativo que segundo Creswell (2010) é uma forma de investigação interpretativa em que o pesquisador faz uma interpretação do que enxerga, ouve e entende. Neste sentido, o estudo aqui relatado foi realizado com um grupo de oito professores de Matemática que atuavam nos Ensinos Fundamental e Médio.

A coleta de dados ocorreu em um encontro com duração de três horas, no qual os sujeitos investigados inicialmente realizaram sete atividades relacionadas ao conceito de função e ao final responderam uma questão na qual era solicitado para que expressassem os significados que atribuíam para função.

Com as sete atividades referentes ao conceito de função, nosso intuito era de observar a coordenação dos diferentes registros desse objeto matemático apresentada pelos sujeitos participantes, como também, fazer com que a partir da realização de tais atividades emergissem alguns significados desse conceito. Já com a questão sobre os significados,

o nosso propósito era fazer com que os indivíduos externassem os significados que atribuíam para esse objeto matemático.

Quanto a mobilização dos registros algébrico e gráfico de uma função, os dados que coletamos, nos levaram a perceber que cinco dos oito professores participantes fizeram uma leitura pontual dos dados, ou seja, a maioria desses sujeitos apenas fizeram a conversão do registro algébrico para o registro tabular, mas não estabeleceram uma relação dos valores dispostos na tabela com a questão da simetria apresentada pela parábola que representa a função apresentada na atividade 1.

A figura a seguir nos dá um exemplo desse tipo de resposta que foi bastante frequente.

Atividade 01: Uma bala é disparada de um canhão (como mostra a figura) e sua trajetória é descrita por uma parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$ (sendo x e y em metros).

Com base nessas informações preencha a tabela a seguir

x	1 m	5 m	8 m	10 m	12 m	15 m	19 m
y	57	225	288	300	288	225	57

Observando a tabela que acabou de preencher, é possível notar que os valores obtidos refletem a ideia de simetria na parábola, explique por que esse fenômeno acontece _____

figura 1: atividade 1 realizada pelo sujeito 3

Como podemos perceber, na figura 1, o sujeito realizou os cálculos preencheu a tabela, mas não estabeleceu qualquer tipo de relação entre valores obtidos e a parábola que representa a função. Porém, dois sujeitos conseguiram estabelecer tais relações, como podemos observar no exemplo da figura 2 que ilustra a resposta dada para mesma atividade por um desses dois sujeitos.

Atividade 01: Uma bala é disparada de um canhão (como mostra a figura) e sua trajetória é descrita por uma parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$ (sendo x e y em metros).

Com base nessas informações preencha a tabela a seguir

x	1 m	5 m	8 m	10 m	12 m	15 m	19 m
y	57	225	288	300	288	225	57

Observando a tabela que acabou de preencher, é possível notar que os valores obtidos refletem a ideia de simetria na parábola, explique por que esse fenômeno acontece pois os valores crescentes e decrescentes obedecem a ideia de simetria devido a gráficos ser uma parábola.

figura 2: atividade 1 realizada pelo sujeito 6

Observando a figura, é possível notar que mesmo sem muita propriedade o sujeito conseguiu estabelecer a relação esperada.

Com relação a exploração das variáveis visuais pertinentes, constatamos que quatro professores não as levaram em consideração para a realização da atividade 4. Esse fato é ilustrado pela figura 3.

Atividade 04: Observe as representações gráficas a seguir

O gráfico em vermelho é uma representação da função $f(x) = x^2$, que chamamos de função de referência. Já o gráfico em azul, representa uma função que chamamos de função associada e foi obtido a partir da função de referência com algumas alterações. Com base nas informações, responda:

a) observado as representações gráficas, quais as alterações que ocorreram na representação gráfica da função associada, considerando que ela foi obtida a partir da função de referência?
a função associada não está na origem

b) determine as coordenadas do vértice de cada uma das parábolas que representam graficamente as funções. função de referência $V(0, 0)$ função associada $V(-1, -1)$

c) escreva a expressão algébrica que representa o gráfico da função associada.
 $f(x) = x^2 - 1$

figura 3: atividade 4 realizada pelo sujeito 6

Observando a figura 3, é possível notar o deslocamento que ocorre com a parábola, altera seu vértice e por consequência a sua representação algébrica também se altera, sendo possível escrever a representação algébrica da função associada em sua forma canônica, utilizando as coordenadas do vértice da parábola, por meio da expressão $f(x) = a(x - u)^2 + v$, onde u e v são as coordenadas do ponto que representa o vértice da parábola $V(u, v)$. Neste caso, entendemos que ao não privilegiar as variáveis visuais pertinentes na conversão do registro gráfico para o registro algébrico, esses sujeitos não efetuam uma conversão qualitativa entre esses registros.

Analisando a atividade 8 presente na lista que era a questão que pedia para os professores expressarem os significados que atribuíam para função, a respostas mais frequente foi a relação entre os elementos de dois conjuntos, onde cada elemento do primeiro conjunto é associado com apenas um elemento do segundo conjunto, como é possível perceber na figura 4.

Atividade 08: Expresse em algumas palavras o (os) significado (os) de função.

É a relação entre dois conjuntos onde os elementos do 1º conjunto tem relação com apenas um elemento do 2º conjunto

figura 4: significado de função expressado pelo sujeito 2

Em suma ao analisar o desempenho dos professores nas sete atividades e os significados que atribuíam a função, podemos inferir que a concepção de função desses professores, encontra-se na ação, pois apresentam habilidades para a realização de cálculos, manipulam expressões algébricas e constroem gráficos, porém, de acordo com

Dubinsky e Harel (1992), eles tendem a pensar em um passo de cada vez, ficando limitados a ação.

Considerações finais

A análise realizada nos dados coletados junto ao grupo de professores à luz da fundamentação teórica que utilizamos nos possibilitou inferir que para grande parte dos participantes desse estudo função significa a relação entre os elementos de dois conjuntos. Na realização das atividades, eles demonstraram habilidades para a realização dos cálculos, manipulam as expressões algébricas, relacionam números a tais expressões, porém, foi possível perceber que as conversões realizadas por esses sujeitos são quantitativas, pois eles não exploraram as variáveis visuais pertinentes em cada um dos registros, que segundo Duval (2003) caracteriza uma compreensão pontual e não global.

Vale ainda ressaltar que ao pedir para os professores realizarem sete atividades referentes ao conceito de função antes de expressarem os significados que atribuíam ao conceito de função, nosso intuito era que as atividades pudessem contribuir para a diversidade desses significados. Contudo, esse objetivo não foi alcançado, pois mesmo depois de realizarem as atividades o significado mais frequente nas respostas foi a relação ente dois conjuntos, sendo muitas vezes o único significado que atribuíram.

Referencias bibliograficas

- Creswell, J. W. (2010). *Projetos de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução: Magda Lopes. Porto Alegre: Artimed.
- Dubinsky, E. and Harel, G. (1992). *The nature of the process conception of function*. In: Dubinsky, E. and Harel, G. (Eds.). *The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes 25, (pp. 85-106).
- Duval, R. (2003). *Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão matemática*. In: Machado, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, (pp. 11-33).
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica*. In: Campos, T. M. M. (org.) Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem.