CB-323

USO DEL GEOGEBRA EN UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA EN PRIMER AÑO DE LA UNIVERSIDAD

Carlos Berejnoi – Florencia María Alurralde – José Vicente Giliberti
berejnoi@gmail.com – florencialurralde@gmail.com – gilijv@gmail.com
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa.)
Consejo de Investigación de la U.N.Sa., Argentina

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: 7. No específico (Universitario)
Palabras clave: Articulación Horizontal, Geometría, Geogebra

Resumen
En este trabajo se presenta una propuesta de actividad de articulación horizontal entre dos asignaturas del primer cuatrimestre del primer año de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la UNSa: Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA) y Análisis Matemático I (AMI). El cálculo de áreas de figuras geométricas planas es un contenido que puede ser desarrollado utilizando tanto los conceptos de la geometría clásica escolar integrado a AMI, como los del álgebra vectorial perteneciente a ALGA. La actividad de articulación consiste en aplicar los dos marcos para demostrar la relación que existe entre el área de un cuadrilátero inscripto en un rectángulo y el área de este último cuando se cumple cierta condición. Como refuerzo, se aprovecha la característica dinámica del software Geogebra para integrar dichos entornos, facilitar la visualización de la situación planteada y verificar el resultado obtenido.

1. Introducción

Las asignaturas Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA) y Análisis Matemático I (AMI) corresponden al primer cuatrimestre del primer año del plan de estudio de las carreras de Ingeniería de la UNSa. Es política de la Facultad, además de ser una recomendación de los actuales procesos de acreditación, favorecer la articulación horizontal y vertical entre las asignaturas de la carrera según lo establecido en el Convenio de Articulación de las Universidades Nacionales del NOA, para el CICLO COMÚN ARTICULADO (CCA), aprobado por el Consejo Directivo, mediante Resolución Nº 693/04 y por el Consejo Superior mediante Resolución Nº 701/04.

ISBN 978-84-945722-3-4

Esta propuesta, se articula con el Proyecto del Consejo de Investigación de la U.N.Sa. (CIUNSa) Nº 2386 que incluye el uso de las TIC, en particular del software de geometría dinámica Geogebra, en la asignatura ALGA. Además de alentar a los estudiantes a utilizar este software con el fin de validar procedimientos y resultados; ambas asignaturas lo incorporan en sus clases (tanto teóricas como prácticas) y en la plataforma Moodle mediante la inclusión de actividades que contribuyen a reforzar y reflexionar sobre los contenidos, así como también obtener la visualización gráfica del problema, la elaboración de conjeturas y la verificación de resultados de la situación problemática.

El problema elegido para la propuesta de actividad de articulación se refiere al cálculo del área de un cuadrilátero inscripto en un rectángulo. Su planteo posibilita el abordaje analítico desde las dos asignaturas, a partir de la geometría básica utilizada en AMI, y desde el álgebra vectorial trabajada en ALGA.

2. Objetivo

Articular un contenido común a ALGA y AMI, mediante la realización de una actividad de cálculo de áreas complementada con el uso del software de geometría dinámica Geogebra como herramienta integradora.

3. Marco teórico

Desde el punto de vista de AMI el abordaje del problema elegido para la propuesta de articulación se refiere al uso de conceptos básicos de geometría y el cálculo de áreas de figuras geométricas planas elementales. Particularmente, el área de un cuadrilátero inscripto en un rectángulo se puede obtener como el área del rectángulo menos la sumatoria de las áreas de cuatro triángulos; o bien como la suma de las áreas de los dos triángulos que conforman el cuadrilátero. Para resolver el problema, se pone en juego conocimientos básicos de geometría (como reconocer figuras, calcular sus áreas) y estrategias para obtener los datos necesarios para el cálculo.

Desde la mirada de ALGA, la resolución de un problema geométrico como el elegido, se puede encarar empleando conceptos del álgebra vectorial, es decir utilizando vectores geométricos, permitiendo familiarizar al estudiante no sólo con el lenguaje propio de la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Física, sino también con los conceptos abstractos del álgebra lineal como espacios vectoriales, aplicaciones lineales, etc.

"…estudiaremos los vectores, su aritmética y su geometría, porque desempeñan un papel importante en matemáticas, física, ingeniería, procesamiento de imágenes, gráficas computarizadas y en muchos otros campos de la ciencia y de la vida cotidiana.

En el plano y en el espacio los vectores tienen existencia doble: son a la vez objetos algebraicos y geométricos. Este tipo de dualidad nos permite estudiar la geometría con métodos algebraicos…" (Nakos y Joyner, 1999).

La resolución del mismo problema desde los dos enfoques antes indicados se complementa con el software Geogebra.

El estudio de la Geometría con el apoyo del Geogebra hace posible que el estudiante trabaje de manera autónoma, construya conjeturas y valide resultados obtenidos a partir de la resolución de problemas con lápiz y papel (Sánchez Rosal, 2012).

"A diferencia de otros software de matemáticas, la geometría dinámica fue destinada desde su origen a la enseñanza, por lo que se reconoce fácilmente su vocación didáctica y se resaltan sus potencialidades en la enseñanza..." (Acosta Gempeler, 2005).

"….podría ser valioso considerar que la pantalla del programa permite construir una figura, o si se quiere una serie de figuras que se obtienen en forma dinámica por la variación de ciertos elementos, que permita establecer una conjetura. Estamos queriendo decir que de algún modo, el dibujo se ha transformado en una "figura de análisis" que permite explorar la situación pero cuyas respuestas posiblemente las hallemos fuera de la pantalla…" (Bifano y Lupinacci, 2012).

4. Actividades a proponer

1- Demostrar que un cuadrilátero inscripto en un rectángulo, tiene la mitad del área de éste si un par de vértices opuestos del cuadrilátero determinan un segmento paralelo a un lado del rectángulo:
   a) Utilizando geometría clásica
   b) A partir del álgebra vectorial

2- Abordar el problema anterior utilizando Geogebra.

ISBN 978-84-945722-3-4

5. Desarrollo

5.1 Cálculo del área del cuadrilátero a partir del cálculo del área del rectángulo y de los triángulos interiores

Al inicio se trabaja de la manera acostumbrada en las clases prácticas (con papel y lápiz) realizando un modelo de la situación planteada y explicitando cada uno de los elementos que intervienen en el mismo.

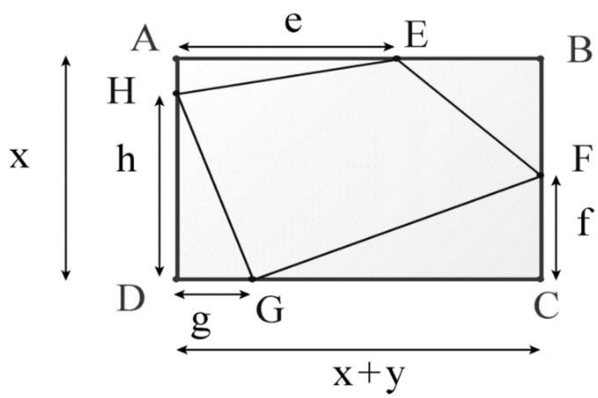

Figura 1. *Gráfica que representa la situación problemática y los elementos utilizados en la resolución desde la geometría básica.*

El siguiente paso consiste en identificar las áreas intervinientes indicando su correspondiente denominación. Así:

Área del rectángulo ABCD = A_1

Área del cuadrilátero EFGH = A_2

Área del triángulo AEH = T_1

Área del triángulo EBF = T_2

Área del triángulo FCG = T_3

Área del triángulo HDG = T_4

Las fórmulas de cálculo utilizadas son:

$$A_1 = x(x+y) = x^2 + xy \qquad (1)$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{4} T_i \qquad (2)$$

$$T_1 = \frac{e.(x-h)}{2} \qquad (3)$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$$T_2 = \frac{(x+y-e)\,.\,(x-f)}{2} \tag{4}$$

$$T_3 = \frac{f\,.\,(x+y-g)}{2} \tag{5}$$

$$T_4 = \frac{g\,.\,h}{2} \tag{6}$$

$$A_2 = \frac{e(x-h)+(x+y-e)(x-f)+f(x+y-g)+gh}{2} \tag{7}$$

Operando y simplificando:

$$A_2 = \frac{x^2+xy+(f-h)(e-g)}{2} \tag{8}$$

Si $f = h$ o $e = g$, resulta:

$$A_2 = \frac{x^2+xy}{2} = \frac{A_1}{2} \tag{9}$$

En esta última igualdad se observa que cuando se cumple la condición de que dos vértices del cuadrilátero determinan un segmento paralelo a dos lados del rectángulo, el área del cuadrilátero inscripto es la mitad del área del rectángulo.

5.2 Cálculo del área del cuadrilátero usando álgebra vectorial sintética

Nuevamente se realiza una interpretación gráfica de la situación y se identifican los elementos puestos en juego.

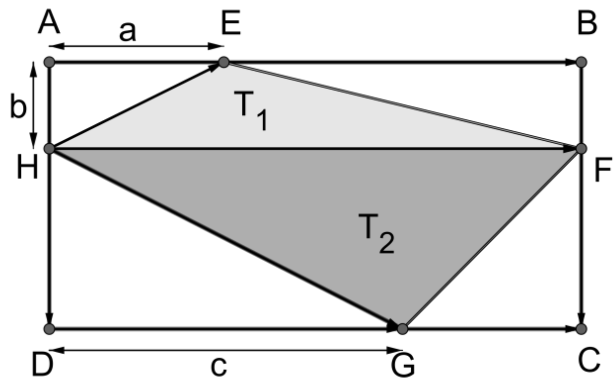

Figura 2. *Gráfica que representa la situación problemática y los elementos utilizados en la resolución desde el álgebra vectorial.*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Área del rectángulo ABCD = $\left| \overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AD} \right|$ (10)

Área del cuadrilátero EFGH = área del triángulo T1 + área del triángulo T2 (11)

Área de T_1 = $\frac{1}{2}\left| \overrightarrow{HE} \text{ x } \overrightarrow{HF} \right| = \frac{1}{2}\left| \left(b\ \overrightarrow{DA} + a\ \overrightarrow{AB}\right) \text{ x } \overrightarrow{HF} \right|$ (12)

Pero si los puntos H y F determinan un segmento paralelo al lado AB, entonces $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AB}$

Área de T_1 = $\frac{1}{2}\left| \left(b\ \overrightarrow{DA} + a\ \overrightarrow{AB}\right) \text{ x } \overrightarrow{AB} \right| = \frac{1}{2}\left| b\left(\overrightarrow{DA} \text{ x } \overrightarrow{AB}\right) + a\left(\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AB}\right) \right| =$

$$= \frac{1}{2}\left| b\ \left(\overrightarrow{DA} \text{ x } \overrightarrow{AB}\right) \right| = \frac{1}{2} b\ \left| \overrightarrow{DA} \text{ x } \overrightarrow{AB} \right| = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \text{área ABCD} \quad (13)$$

Área de T_2 = $\frac{1}{2}\left| \overrightarrow{HG} \text{ x } \overrightarrow{HF} \right| = \frac{1}{2}\left| (1-b)\ \left(\overrightarrow{AD} + c\overrightarrow{DC}\right) \text{ x } \overrightarrow{HF} \right| =$ (14)

Área de T_2 = $\frac{1}{2}\left| \left[(1-b)\ \overrightarrow{AD} + c\ \overrightarrow{DC}\ \right] \text{ x } \overrightarrow{AB} \right| =$

$$= \frac{1}{2}\left| \left[(1-b)\ \left(\overrightarrow{AD} \text{ x } \overrightarrow{AB}\right) + c\ \left(\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AB}\right)\ \right] \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| \left[(1-b)\ \left(\overrightarrow{AD} \text{ x } \overrightarrow{AB}\right)\ \right] \right| = \frac{1}{2}(1-b)\ \left| \overrightarrow{AD} \text{ x } \overrightarrow{AB} \right| = \frac{1}{2}(1-b) \text{ . Área ABCD} \quad (15)$$

Área de T_1 + Área de T_2 = $\frac{1}{2}$ b. Área ABCD + $\frac{1}{2}$ (1– b). Área ABCD (16)

Área de EFGH = $\frac{1}{2}$ Área ABCD (17)

5.3 Planteo y resolución del problema con Geogebra

Las actividades a realizar con Geogebra empleando el enfoque vectorial son las siguientes.

1. Se construye un rectángulo de dimensiones variables.
2. Se construye un cuadrilátero inscripto en el rectángulo. Para ello se elige un punto de cada lado del rectángulo.
3. Se calcula las áreas del rectángulo y del cuadrilátero con los comandos adecuados.
4. Se insertan etiquetas de texto para visualizar los valores calculados en el punto anterior.
5. Se repiten los pasos 2 y 3 moviendo los puntos de los lados de manera que se cumpla la condición indicada en el enunciado del problema.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

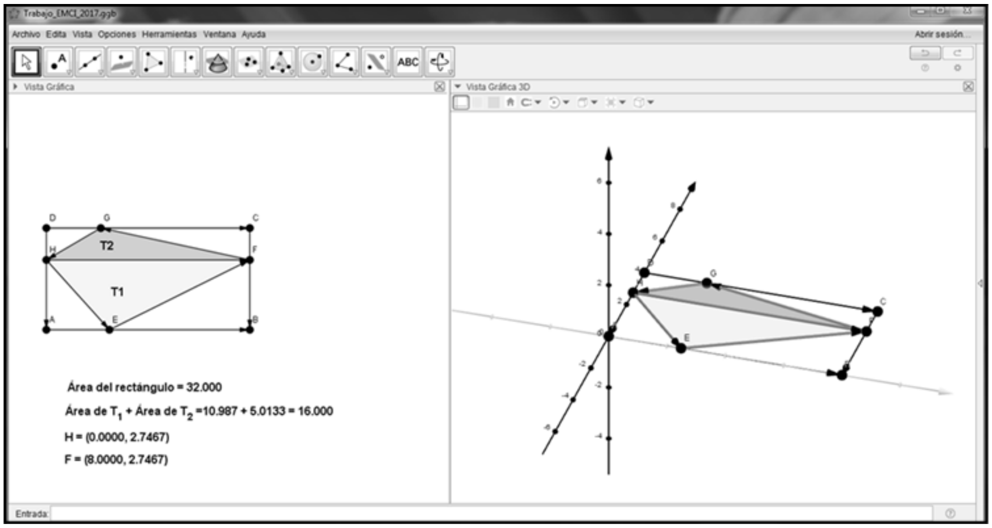

Figura 3. *Gráfica que representa la situación problemática y los elementos utilizados en la resolución desde el álgebra vectorial.*

Se observa en la pantalla indicada en la Figura 3 que con la condición solicitada el área del cuadrilátero es la mitad del área del rectángulo.

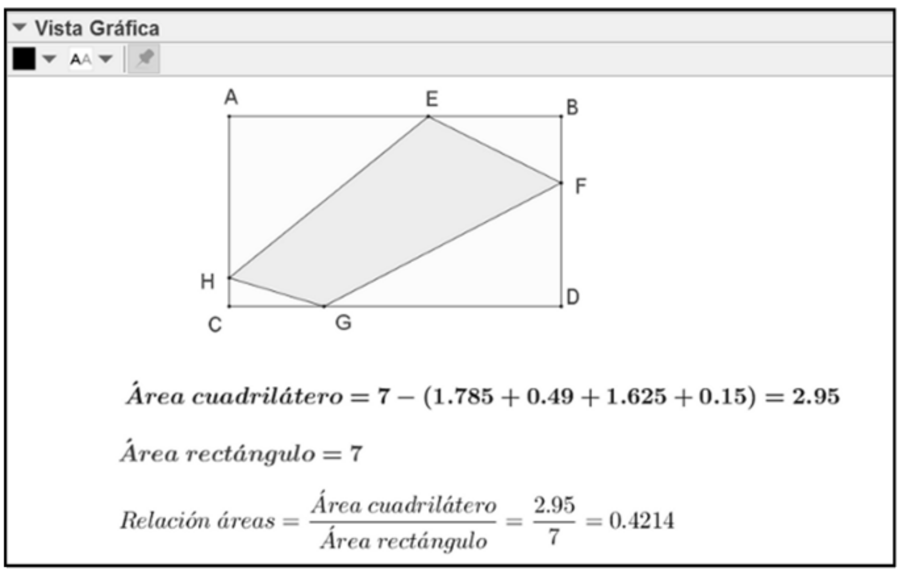

Figura 4. *Vista gráfica del Geogebra en la resolución propuesta por AMI en el caso general.*

ISBN 978-84-945722-3-4

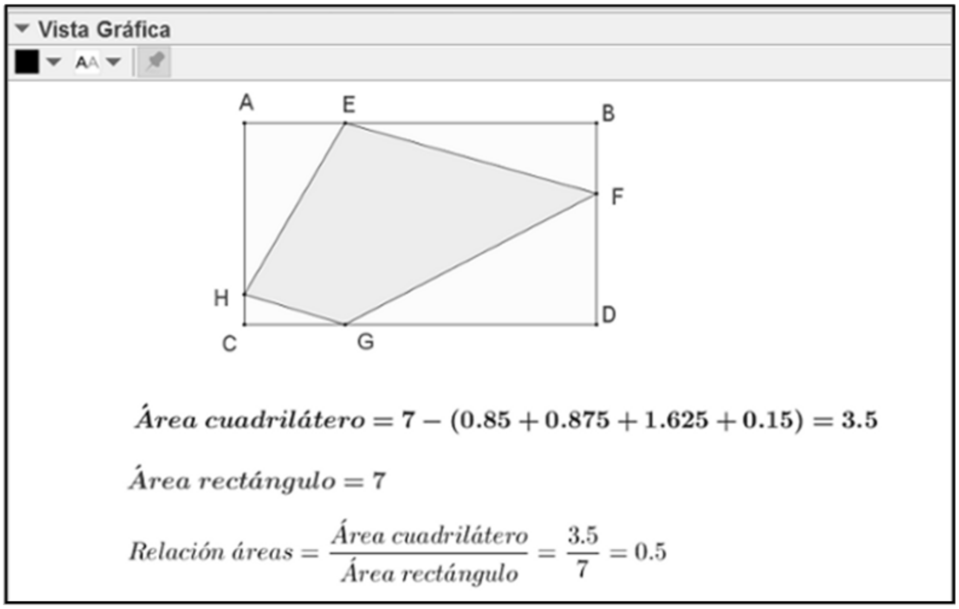

Figura 5. *Vista gráfica del Geogebra en la resolución propuesta por AMI cuando se cumple la condición que dos extremos del cuadrilátero se encuentren en un segmento paralelo a un par de lados del rectángulo.*

6. Conclusiones

La resolución de la situación problemática elegida utilizando conceptos de las dos asignaturas puede contribuir a la articulación horizontal de contenidos y favorecer la comprensión del tema.

Geogebra se utiliza como herramienta integradora de ambos enfoques y para verificar el resultado obtenido. Su característica dinámica permite ajustar la situación problemática a diversas posibilidades que conducen a casos particulares. Así el hecho que el área del cuadrilátero sea la mitad que la del rectángulo no es una conjetura a priori evidente para el estudiante.

Es importante resaltar que el uso de las herramientas informáticas, en especial el Geogebra, no debe permitir perder de vista la necesidad de conocer los objetos matemáticos y las propiedades geométricas implícitas, sino que debe servir para una integración de las prácticas de enseñanza. De allí la importancia de resolver el problema primero analíticamente desde las dos formas planteadas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias

Acosta Gempeler, M. E. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. Revista Educación Matemática. 3 (27), 121-140.

Bifano, F.; Lupinacci, L. (2012). *Misión posible, ¿una construcción imposible?* En: R. Ferragina (Ed), GeoGebra entra al aula de Matemática, Capítulo 3, pp. 46. Buenos Aires: Ediciones Espartaco.

Nakos, G.; Joyner, D. (1999). *Álgebra con aplicaciones*. Ed. Thomson.

Sánchez Rosal, A. (2012). Incorporación de las TICs en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. Revista de Educación Matemática. 27(3), 23-38. Unión Matemática Argentina. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

ISBN 978-84-945722-3-4