COMO NOS COMUNICAMOS CON EL LENGUAJE SIMBOLICO AL ABORDAR PROBLEMAS DE MATEMATICA

Caserio, Mónica.   Vozzi, Ana María.
caserio@fceia.unr.edu.ar, amvozzi@fceia.unr.edu.ar
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. Argentina.

Tema: Bloque 1 Los procesos de comunicación en el aula de matemática y su impacto sobre el aprendizaje del alumnado.
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel: Formación y actualización docente
Palabras claves: Comunicación – Problemas – Lenguaje – Docentes.

Resumen

En el marco del proyecto de investigación del que formamos parte (El libro de texto, factor coadyuvante en la producción de conocimientos) nos resulta de especial interés indagar sobre la utilización del lenguaje simbólico en las aulas de matemática, de qué manera es utilizado y cómo los docentes "comunicamos" los conocimientos matemáticos. Dado que de nuestras investigaciones surge la interrelación entre el manejo correcto del lenguaje matemático formal con la lectura comprensiva de textos de matemática y su influencia en el aprendizaje

Exponemos en este trabajo algunos problemas resueltos por profesores de matemática en el marco del Taller de Aplicación Centrado en Resolución de Problemas correspondiente al módulo final del Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística, de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (FCECON) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR).

Se pone de manifiesto aquí que resolver correctamente un problema no significa comunicarlo bien. Creemos necesario insistir durante la formación docente en la importancia de "comunicar correctamente" los conceptos y procedimientos implicados en la resolución de un problema, tanto en forma oral como escrita, permitiendo así que los estudiantes estén en condiciones de abordar un texto de matemática en forma autónoma.

Un poco de historia

Somos docentes investigadoras en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingenieria y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina. Hemos integrados diversos proyectos cuyo eje se ubica en las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de matemática en carreras no matemáticas.

El primer proyecto giró en torno a los errores de nuestros alumnos en matemática en los primeros años de la carrera de ingeniería, su origen, su impacto y nuestra responsabilidad al respecto.

Pudimos advertir, en numerosas ocasiones, que ante un problema, los conocimientos previos (en el estudiante) adquieren la forma de "reglas" o "fórmulas" a aplicar y en el intento por resolverlo pone en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas nuevos.

Si denominamos automatismos a la aplicación, sin reflexión previa, de reglas o fórmulas aprendidas, para resolver problemas o cuestiones que muestren "a simple vista" algún parecido con situaciones conocidas, y bajo el nombre de Teorema – alumno, hablamos de aquellas afirmaciones y/o negaciones que se originan en supuestos falsos, incompletos o fuera de contexto, que si bien el alumno no es capaz de explicarlo, adquiere para él, el status de "teorema".

Diseñamos actividades áulicas con el objeto de constatar la presencia de automatismos y teoremas – alumnos y poder reflexionar sobre ello, así como sobre las "responsabilidades" que nos compete como docentes en este aspecto.

En el análisis a posteriori pudimos elaborar algunas reflexiones y muchos interrogantes. "Gran parte de los automatismos que nuestros alumnos utilizan, creemos, han sido promovidos a lo largo de las distintas etapas de formación", con actitudes que, entre otras:

- Priorizan la enseñanza programada, la pedagogía por objetivos, etc.
- Desconocen los modelos utilizados por los alumnos en la apropiación del conocimiento.
- Utilizan sistemáticamente algoritmos o técnicas rutinarias sin explicitar los fundamentos teóricos en la clase.

Nos preguntamos entonces:

¿sobre qué nos enseñan los errores de nuestros alumnos?

» ¿sobre el hecho de aprender?

» ¿sobre los aprendizajes que ellos nos proponen?

» ¿sobre la presencia de obstáculos de naturaleza didáctica?

» ¿sobre lo implícito que reina entre los alumnos y nosotros?

» ¿sobre la enseñanza de la matemática?

En las conclusiones de este proyecto expusimos una serie de emergentes detectados durante el transcurso de nuestra investigación, entre los que destacaba la dificultad que representa para los alumnos el abordaje de los textos universitarios.

- Errores en la interpretación de símbolos
- Dificultad para distinguir datos e incógnitas, que conducen a planteos incorrectos y posterior soluciones erróneas.

- Errores en la traducción al lenguaje simbólico.
- Errores de comunicación
- Dificultades para generalizar.
- Apego al pensamiento concreto (Es necesario pasar del ejemplo a la abstracción).
- La justificación parece ser una novedad para el alumno

En el área de la Matemática Básica de las carreras de Ingeniería, hemos encontrado que una de las principales causas de re-cursado y/o deserción en los primeros años está en la falta de capacidad de lectura, expresión y comprensión de textos que se potencia con los obstáculos que presenta el pasaje permanente entre los registros verbales, gráficos y simbólicos que exige el trabajo matemático.

El segundo proyecto de investigación se centró entonces en las formas en que utilizamos el libro de texto y la importancia que reviste en la enseñanza-aprendizaje de matemática en carreras de ingeniería, el vínculo entre Estudiantes-Libro de Texto-Docentes. En esta investigación tomamos nota de la influencia del lenguaje tanto en su forma oral como escrita, verbal y no verbal (gráficas, esquemas, representaciones geométricas, etc.) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de ésta disciplina.

Matemática es la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma poderoso, conciso y sin ambigüedades. La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo.

Marco Teórico

Nos resulta de especial interés indagar sobre la utilización del lenguaje simbólico en las aulas de matemática, de qué manera es utilizado y cómo los docentes "comunicamos" los conocimientos matemáticos. Dado que de nuestras investigaciones surge la interrelación entre el manejo correcto del lenguaje matemático formal con la lectura comprensiva de textos de matemática y su influencia en el aprendizaje.

Sabemos que el saber científico, el saber sabio, según Chevalard, debe sufrir adaptaciones y restricciones para ser transformado en un "saber a enseñar", que no se pueden considerar sólo como una simplificación del saber científico sino, ajustes efectuados sobre él en el marco del contrato didáctico establecido, como señala el autor: “Transposición didáctica es el pasaje de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de este objeto de saber”.

Entendemos que el lenguaje es un factor de gran relevancia en el contrato didáctico, para Brousseau (1986), la comunicación y el lenguaje forman parte de un proceso complejo en el sistema profesor - estudiante - medio, donde el juego es la clave de dicho proceso.

En investigaciones de los "90" se recuperan muchos elementos comunicativos en el desarrollo e implementación curricular. Ello permite sistematizar situaciones y analizar problemas nuevos tales como: lenguaje matemático adquirido por alumnos con dificultades, análisis de interacciones en el aula, procesos de descripción, etc. Se reincorpora también el análisis sintáctico con un contenido semántico, como se ve en trabajos que analizan lo comunicativo en álgebra (Healy, Sutherland y Hoyles 1990, 1991) y en resolución de problemas (Nesher 1989,1991)

En la actividad matemática en el aula se utiliza gran cantidad de elementos del lenguaje, pero la resolución de problemas tiene específicamente el lenguaje como medio de interacción entre conceptos y procedimientos. Pensamos que, una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la actividad matemática.

En este sentido, se puede decir que en los últimos años se ha venido observando cómo muchos docentes " pretenden bajar el tenor del lenguaje matemático" tratando de hacerlo más atractivo y comprensible por parte de los estudiantes, sin tomar en cuenta la importancia trascendental que el mismo representa para la matemática, ya que posibilita la transferencia del aprendizaje. (Albarrán, 1998)

Por otra parte, la utilización generalizada del lenguaje formal en el salón de clase por los profesores, tiene serias consecuencias, ya que en vez de moldear los usos matemáticos atendiendo a su lenguaje informal, enfatiza en ese lenguaje especial de la Matemática en forma ofuscante. Pimm (1999). También se tienen los significados múltiples, característicos de muchos términos matemáticos, esto es debido a que en ocasiones se toman palabras de uso cotidiano para interpretar cualquier símbolo, pero no siempre se ajustan a ellas con precisión.

En este orden de ideas, Fennell citado por Ruiz (2003), señala "la comunicación matemática, los símbolos estandarizados y las definiciones de la terminología son necesarios, pero la enseñanza de la matemática en lenguaje muy formalizado, algunas veces, causa una especie de bloqueo en la comprensión" . Esta situación debe ser manejada cuidadosamente por el docente quien considera que el alumno está comprendiendo los conceptos matemáticos, sin embargo los resultados obtenidos en las evaluaciones aplicadas por él, evidencian las debilidades en la adquisición y comprensión del conocimiento matemático.

La experiencia

Bajo estos supuestos realizamos un análisis de los problemas resueltos y "comunicados" por docentes de matemática y exponemos en este trabajo algunos problemas resueltos por profesores de matemática en el marco del Taller de Aplicación Centrado en Resolución de Problemas correspondiente al módulo final del Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística, de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística (FCECON) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR).

En varios de los encuentros del citado Taller distribuimos entre los participantes distintos problemas para que fueran analizados, resueltos y comunicados por ellos, la temática es variada, entre elementos de álgebra y de geometría.

Dado que los participantes del taller son docentes de matemática del nivel medio, la evaluación de la tarea tuvo que ver principalmente con la fundamentación de la resolución elegida y su comunicación.

Cuando leímos y/o escuchamos cómo "comunicaban" la resolución encontramos con demasiada frecuencia, lo que podríamos denominar, mal uso del lenguaje matemático, en diversos aspectos, por ejemplo:

En geometría: - no se diferencia el nombre de un segmento con su longitud:

" El segmento AB, su longitud AB"

- inconsistencia entre la representación gráfica y el desarrollo analítico:

"Se dibujan segmentos y se opera con vectores"

En álgebra: - no se justifican los pasos o secuencias adoptadas

- no se identifican claramente las variables

- utilización confusa de los símbolos

A modo de muestra en el Anexo I presentamos algunos problemas resueltos por distintos grupos de docentes, donde se evidencian algunos de los aspectos descriptos en este trabajo.

Reflexiones finales

Al pensar en los objetos de la Matemática, podemos situarnos en dos polos opuestos: considerar el lenguaje en un nivel secundario en relación con los objetos o pensar que la objetividad de la Matemática está inseparablemente unida a su formulación lingüística: “la Matemática no es más que un juego del lenguaje formal”. Entre esta dos posiciones sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente, parece razonable aceptar que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, como señala Popper (1974), no puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control critico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestra construcciones.

Aprender y enseñar son partes de un mismo proceso. La enseñanza en el nivel superior se basa, en cierta forma, en una clara apreciación del proceso de aprender. Un conocimiento del desarrollo de este proceso ayuda a ambas partes: estudiantes y profesores a realizar su tarea en común.

En las primeras carillas de esta comunicación indicamos que nos interesa indagar sobre las responsabilidades que nos compete como docentes respecto, entre otras cosas, a la utilización por parte de nuestros alumnos de *automatismos* y *teoremas-alumnos*
Pudimos observar en estos trabajos que somos "nosotros mismos" (los profesores) quienes a pesar de poseer el conocimiento disciplinar, incurrimos en los mismos errores que pretendemos corregir.

Se hace necesario entonces insistir desde la formación de profesores de matemática en la relevancia de la correcta utilización del lenguaje matemático así como el pasaje permanente entre los registros verbales, gráficos y simbólicos que exige el trabajo matemático, en la importancia de mantener la "coherencia" entre el discurso oral con el escrito, e invitarlos a reflexionar sobre estos temas y su implicancia en el resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Pimm, D (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. Ediciones Morata S.R.L. España

Ruiz, D (2003). *El lenguaje en clases de Matemática*. Mérida, Venezuela.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascon, J. (1997). Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona, España: Horsori

Brousseau, G. (1988) *Fondement et méthodes de la didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Nº72, pp.33-115. La pensée sauvage, Grenoble-France.

Caserio, M.; Guzmán, M.; Vozzi, A.M. (2011). *Importancia del libro de texto en la producción de conocimientos*. Revista Épsilon. vol. 28(3) pp.27-45

Hoyles, C; Healy, L y Sutherlan, R. (1991). *Patrones de discusión entre pares alumnos en equipo y entornos no-computacionales*. Diario de Aprendizaje Asistido Por Computadora Volumen 7(4),pp 210-228, diciembre 1991

Nesher, P. (1999). *El papel de los esquemas de la resolución de problemas de enunciado verbal*. Revista Suma 31, pp. 19-26

Albarran, J y Bernabeu, M. (1998)- La instrucción heurística y la transferencia del saber en la educación matemática de las nuevas generaciones.III Taller Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. La Habana-Cuba.

ANEXO I

10- Probar que la suma de dos números naturales consecutivos y la suma de sus cuadrados son primos entre sí.

El enunciado puede ser utilizado en el desarrollo del tema "números primos" en 1° año.

Para resolver el siguiente problema esbozamos las dos ecuaciones que nos plantea el enunciado.

- Suma de dos números naturales consecutivos:

$$x + x + 1 = 2x + 1$$

- Suma de sus cuadrados:

$$x^2 + (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$

Suponemos que existe $p \in Z, tal\ que\ p\ es\ divisible\ por\ 2x+1\ y\ por\ 2x^2+2x+1$

$$pc = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p\ impar\ y\ c\ impar$$

$$pt = 2x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p\ impar\ y\ t\ impar$$

$$pc + pt = 2x^2 + 4x + 2 \quad \textbf{Sumamos miembro a miembro}$$

$$p(c+t) = \underbrace{2(x+1)^2}_{\text{Par}} \quad \Rightarrow \quad p\ es\ divisible\ por\ 2(x+1)^2, entonces\ p\ es\ divisible\ por\ (x+1)^2$$

$$pt = 2x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p\ impar\ y\ t\ impar$$

$$pc = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p\ impar\ y\ c\ impar$$

$$pt - pc = 2x^2 \quad \textbf{Restamos miembro a miembro}$$

$$p\underbrace{(t-c)}_{\in Z} = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad p\ es\ divisible\ por\ 2x^2, entonces\ p\ es\ divisible\ por\ x^2$$

$$(x; x+1) = 1 \Rightarrow (x^2; (x+1)^2) = 1 \Rightarrow p\ es\ divisible\ por\ (x^2; (x+1)^2)\ , entonces\ p\ es\ divisible\ por\ 1$$

Integrantes:

BUFARINI, Cecilia

SEQUIER; Romina

TRAMONTINI, Natalia

4) Probar que el producto de tres enteros positivos consecutivos no puede ser un cubo.

Consideramos los tres siguientes números enteros consecutivos:

$$n$$
$$(n+1)$$
$$(n+2)$$

El producto de los mismos es $n.(n+1).(n+2) = (n^2+n).(n+2)$

$$n.(n+1).(n+2) = n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n$$

$$n.(n+1).(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

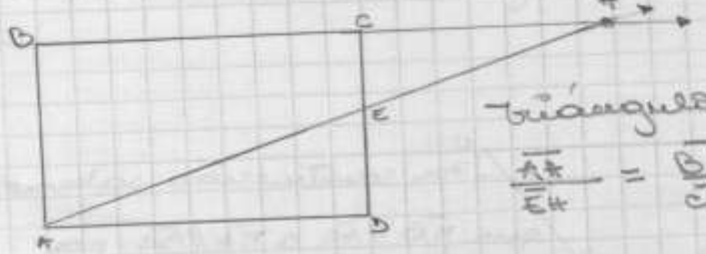
Si el producto de los 3 fuese un cubo, aplicando el Cubo de un binomio, sería necesario que esté

En el término independiente el número 1:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

$\therefore$ No es posible que el producto de tres números enteros consecutivos sea un cubo

EJERCICIO 5



Por construcción el triángulo $\overset{\triangle}{AHB}$ es prop. al $\overset{\triangle}{EHC}$

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CE}}$$

$$\frac{\overline{BC} + \overline{CH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CE} + \overline{ED}}{\overline{CE}}$$

como $\overline{BC} = \overline{CH} \Rightarrow \frac{2\cancel{\overline{CH}}}{\cancel{\overline{CH}}} = \frac{\overline{CE} + \overline{ED}}{\overline{CE}}$

$$2 = \frac{\overline{CE} + \overline{ED}}{\overline{CE}}$$

$$2\overline{CE} = \overline{CE} + \overline{ED}$$

$$2\overline{CE} - \overline{CE} = \overline{ED}$$

$$\overline{CE} = \overline{ED}$$

QUIROGA, MARÍA LAURA

ULLA, VANINA

REFLEXIÓN

Creemos que esta propuesta es viable para trabajarla con los alumnos, pero necesariamente éstos deben saber utilizar la simbología y poder hacer la traducción del lenguaje coloquial al simbólico por lo menos en casos sencillos.

Encontramos que la propuesta es rica en contenido didáctico, el lenguaje es simple y accesible para los alumnos. Da lugar a que ellos puedan intuitivamente ir probando y tratando de encontrar regularidades y luego poder formalizarlas.

ALUMNAS: Favatier Ana María- Pradolini Betiana.-

Los cinco ejercicios son muy ricos como disparadores para iniciar el trabajo algebraico, algunos forman parte de la forma concreta y se busca obtener generalidades expresadas algebraicamente y en otros se parte de la generalidad y se busca establecer justificaciones la cual permite al alumno desarrollar el aprendizaje por descubrimientos, ser autónomos y poder expresar y justificar sus pasos lo cual lleva a un mayor grado de comprensión. A la vez que también desarrollan la capacidad de utilizar y entender el lenguaje simbólico propio de la matemática y lograr mayor nivel de abstracción

QUIROGA, MARÍA LAURA

ULLA, VANINA