Procesos de validación de futuros profesores

Melina Zampar y Sara Scaglia
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral

Trabajo de investigación
Nivel de enseñanza: Formación inicial de profesores

Resumen
Esta comunicación tiene como objetivo analizar los procesos de validación puestos en juego por futuros docentes de matemática para fundamentar una proposición geométrica. Los sujetos de estudio son estudiantes que cursan Geometría Euclídea Plana, una asignatura del segundo año del Profesorado de Matemática.
A partir del estudio de las producciones de los alumnos se confirma la dificultad de los estudiantes para justificar satisfactoriamente una propiedad geométrica. En los resultados obtenidos observamos que sólo dos alumnos (de un total de 19) desarrollan un proceso de validación que podría caracterizarse como demostración. Los errores que predominan son los de razonamiento, especialmente relacionados con el uso de hipótesis que no están dadas.

1. Introducción[1]

La demostración es considerada una característica fundamental de la esencia de las matemáticas. Esta cuestión no puede desatenderse en la enseñanza, dado que "la formación matemática de un individuo incluye no sólo el desarrollo de competencias específicas, sino también la consolidación de una concepción de lo que son las matemáticas y de cómo se validan sus construcciones, concepción que se logra mediante la experiencia del quehacer matemático" (Camargo, Perry y Samper, 2005; p. 54).
En las orientaciones curriculares de diversos países se hace hincapié en la necesidad de justificar o validar las afirmaciones y resultados (NCTM, 1990; NAP, 2006). Sin embargo, "varios estudios han reportado que la deducción formal entre los estudiantes que han estudiado geometría escolar secundaria está prácticamente ausente" (Battista y Clements, 1995; p. 48). Estos autores reportan diversas investigaciones en las que se ponen de manifiesto las dificultades que tienen los sujetos para justificar los resultados a los que arriban, y más aún para desarrollar demostraciones formales.
Con la finalidad de profundizar en las particularidades de las demostraciones que realizan los alumnos, se ha diseñado un estudio que tiene por objeto indagar la evolución de la habilidad para demostrar resultados geométricos de estudiantes del profesorado de matemática. Se propone para ello realizar un estudio longitudinal de un grupo de estudiantes que cursan una asignatura del segundo año de la carrera, considerando tres momentos específicos: el inicio del año académico, la finalización del primer cuatrimestre y la finalización del año académico. En esta comunicación presentamos los resultados obtenidos en el primer momento, es decir al comienzo del año académico, en una de las actividades propuestas.
La asignatura Geometría Euclídea Plana se dicta durante el primer cuatrimestre del segundo año de la carrera Profesorado de Matemática. El estudio de conceptos y propiedades geométricas se propone a partir de una construcción axiomática. Se espera analizar la repercusión que podría tener una formación sistemática en geometría y en

[1] Esta indagación se enmarca en una adscripción en investigación desarrollada en el proyecto de investigación C.A.I.D.+D. P.E. 227 "La problemática de la demostración en el aprendizaje de la geometría".

sus métodos de demostración en la evolución del pensamiento geométrico de los sujetos, en particular en lo que refiere a las habilidades para demostrar resultados. Como futuros docentes de matemática estos alumnos deberán desarrollar la capacidad de formular conjeturas y demostrarlas de modo formal para un adecuado desempeño profesional.

2. Marco teórico

Siguiendo a Balacheff (Balacheff, 2000; p. 12) la *explicación* "establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad, es decir, sus propias reglas de decisión de la verdad". Esto es, cuando la explicación se lleva a cabo tiene como objetivo hacer evidente la verdad de las proposiciones. Cuando una explicación es reconocida y aceptada se le asigna el término *prueba*. Cuando la explicación expresada en un discurso asegura la validez de una proposición y esta es aceptada por una comunidad, se habla del paso de la explicación a la prueba. La *demostración* es un tipo de prueba dominante en las matemáticas, consiste en una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto de reglas (Balacheff, 2000).

El término *razonamiento* hace referencia a la actividad intelectual que consiste en la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. La expresión *proceso de validación* es asignada a esta misma actividad, cuando tiene como fin asegurarse de la validez de una proposición y producir una explicación.

Balacheff (2000) menciona dos obstáculos en la enseñanza de la demostración. En primer lugar, presenta el obstáculo de la evidencia de los hechos, que en geometría se agudiza porque los sujetos se convencen fácilmente de que una propiedad es verdadera al realizar un dibujo y comprobar que la misma se cumple en esa representación gráfica. En segundo lugar, describe un obstáculo relacionado con el funcionamiento del sistema didáctico, que se caracteriza por despojar a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. En general, las actividades de demostración consisten en probar propiedades enunciadas por el profesor, en lugar de presentar consignas en las que se pida explorar y conjeturar resultados o propiedades para demostrarlos posteriormente.

Sowder y Harel (1998) consideran que probar o justificar un resultado involucra convencerse uno mismo y convencer a otros. Definen así el *esquema de prueba* de un individuo como los argumentos que utiliza esta persona para convencer y persuadir, y lo clasifican en tres categorías:

1) *Esquemas de pruebas basados en lo externo*.
2) *Esquemas de pruebas empíricos.*
3) *Esquemas de pruebas analíticos o matemáticos*.

1) Los esquemas de pruebas basados en lo externo refiere a los argumentos utilizados por los sujetos cuando se apoyan en fuentes externas a él, las cuáles pueden ser:

- apoyo en la autoridad, refiriéndose a libros de textos, declaraciones de docentes, o de algún conocimiento aprendido en la clase.
- rituales, entendiendo a éstos como aquellos procedimientos que adquirió el sujeto para justificar o demostrar de determinada manera, de acuerdo a una situación y que es utilizada cada vez que se presente una situación similar. Por ejemplo, es usual que los sujetos cuando observan un problema que involucre los números naturales, automáticamente demuestren por inducción matemática, a pesar de que para ciertos problemas éste método no sea el adecuado.
- manipulación de símbolos, refiriéndose a éste como el uso de símbolos independientemente del significado y relación de la situación presentada.

2) *Los esquemas de pruebas empíricos* son aquellos en donde los sujetos justifican sólo basándose en ejemplos o en pruebas perceptuales (esbozos o varios dibujos).

3) *Los esquemas de pruebas analíticos o matemáticos* se refieren a pruebas formales, entre las que se distinguen:

- transformacionales, cuando los estudiantes justifican aspectos generales de una situación, e involucran un razonamiento orientado a resolver la conjetura general.
- axiomáticas, cuando los sujetos organizan el conocimiento de manera que los resultados siguientes son consecuencias lógicas de resultados previos, constituidos por ideas primitivas, axiomas, definiciones y teoremas.

En lo que respecta a categorizaciones de errores en geometría, Franchi y Rincón (2003) proponen una tipología errores en el área de la Geometría Plana que permita identificar y clasificar los errores de los alumnos. Las categorías en las cuales se ubican los errores son las siguientes:

1. Errores de pre-requisitos:

"Los errores de pre-requisitos se deben a un aprendizaje deficiente de hechos, habilidades y destrezas que el alumno debió adquirir antes de iniciar el estudio de la geometría" (Franchi y Rincón, 2003; p. 197). Se incluyen en este tipo los errores observados en operaciones, en la manipulación de expresiones algebraicas o cuando se utiliza inadecuadamente los instrumentos de dibujo.

2. Errores propios del lenguaje geométrico

"Estos errores se hacen evidentes cuando el estudiante utiliza inadecuadamente las notaciones de las figuras y elementos geométricos, demuestra o intenta demostrar una proposición geométrica que no se le pide, da una respuesta distinta o adicional a la que se le pide en un problema geométrico, cuando plantea una ecuación o proposición en discordancia con el enunciado de un problema geométrico dado y cuando utiliza inadecuadamente la terminología geométrica o describe defectuosamente la construcción de figuras geométricas" (Franchi y Rincón, 2003; p. 198).

3. Errores gráficos

"Se entenderá que un estudiante incurre en este tipo de errores cuando dibuja una figura geométrica que no se corresponde con el enunciado de un problema geométrico propuesto, no dibuja una figura geométrica a propósito de un problema geométrico propuesto, cuando toma mal un dato de una figura geométrica o lo ignora en la solución o demostración de un problema geométrico" (Franchi y Rincón, 2003; p. 198).

4. Errores de razonamiento

Se incluyen aquí los errores derivados del mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas. "Se manifiestan cuando el alumno añade hipótesis que no están dadas en la solución o en la demostración de un problema geométrico, intenta demostrar o resolver un problema geométrico sin utilizar algún dato dado, usa un axioma, teorema o corolario sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación o lo usa en un contexto que no le corresponde, interpreta y usa inadecuadamente una definición, usa el recíproco de una implicación como verdadera, cuando construye y usa una implicación que no es verdadera" (Franchi y Rincón, 2003; p. 199).

5. Errores de transferencia

"Se presentan, cuando el estudiante transforma defectuosamente una situación problemática real en un problema geométrico, o cuando aplica defectuosamente conocimientos propios de otras asignaturas o disciplinas en un problema geométrico planteado" (Franchi y Rincón, 2003; p. 200).

6. Errores de técnica

Se incluyen aquí los errores que surgen por la aplicación inadecuada de procedimientos o algoritmos en la solución de problemas geométricos o en la demostración de proposiciones geométricas. "Se puede identificar este tipo de errores cuando el estudiante utiliza un algoritmo correcto en la solución de un problema geométrico pero lo aplica en forma defectuosa, enuncia proposiciones ciertas sin justificación o mal justificadas o cuando utiliza un algoritmo adecuado para la solución o demostración de un problema geométrico pero no llega a su solución" (Franchi y Rincón, 2003; p. 201).

7. Errores de tecnología

"Se consideran errores de tecnología, aquellos que se producen cuando el alumno selecciona un algoritmo inadecuado para resolver un problema geométrico o usa una estrategia inadecuada para realizar una demostración geométrica" (p. 201).

8. Errores azarosos

Se incluyen en este grupo los errores ocurridos por un descuido. "Se pueden detectar cuando el alumno transcribe mal una cantidad o símbolo o sustituye mal un dato en una ecuación dada, manipula inadecuadamente los signos algebraicos o cuando ejecuta mal operaciones aritméticas" (Franchi y Rincón, 2003; p. 203).

A partir de las consideraciones anteriores, en este trabajo se estudian los procesos de validación que los sujetos ponen en juego para fundamentar una proposición geométrica. La clasificación de Franchi y Rincón (2003) será utilizada para analizar los errores observados.

Diversos autores proponen distintas clasificaciones de las justificaciones de los alumnos cuando intentan validar resultados (Balacheff, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000; Rodríguez Díaz, 2006). En esta comunicación nos limitaremos a identificar los esquemas de prueba de algunos sujetos, y dejaremos para estudios posteriores el intento de clasificar las producciones observadas según las categorizaciones de investigadores que se han ocupado del tema.

3. Encuadre metodológico

Esta indagación se sitúa en el paradigma interpretativo (Cohen y Manion, 1990). Se trata de un estudio descriptivo en pequeña escala, cuya finalidad es la interpretación de las respuestas y producciones de sujetos de modo de comprender sus acciones, sin perseguir la generalización de los resultados. Desde el punto de vista metodológico, se trata de una investigación cualitativa donde los datos son frases y palabras, antes que datos numéricos. Además, el análisis de datos no descansa en métodos estadísticos.

Para el procesamiento de la información se elabora una categorización inicial que da cuenta de las diferentes instancias de respuestas, de modo de volcar en una tabla (incluida en el Anexo) las afirmaciones dadas por todos los sujetos. Posteriormente se retoman las categorías que resultan de mayor interés en función del objetivo del trabajo, esto es, analizar los procesos de validación puestos en juego por los estudiantes.

Como se ha expresado, los sujetos de estudio son estudiantes que cursan Geometría Euclídea Plana, una asignatura del segundo año del Profesorado de Matemática. Se administró el cuestionario a 19 sujetos, 10 de los cuales ingresaron en el año 2006, y los 9 restantes en años anteriores (5 en 2005, 2 en 2004, 2 en 2003). De este último grupo, sólo 4 ya habían cursado la asignatura.

El cuestionario se administró en la segunda semana del primer cuatrimestre. Los estudiantes habían tenido en la semana previa 4 horas de clase en las que comenzaron el estudio de los axiomas y propiedades de enlace, ordenación y sentido en el plano, siguiendo el texto de Puig Adam (1980). Durante las dos semanas siguientes a la administración del cuestionario, algunos sujetos fueron sometidos a entrevistas personales con el objeto de aclarar algunas dudas surgidas durante el estudio de las respuestas al cuestionario.

Para elaborar el cuestionario en primer lugar se adopta el criterio de seleccionar propiedades elementales conocidas por los estudiantes (aunque difícilmente hayan trabajado a partir de una demostración formal). Se desea que los estudiantes puedan disponer mínimamente de ideas previas que les permitan abordar la resolución del cuestionario.

Un segundo criterio es presentar propiedades que puedan relacionarse en una cadena deductiva. Así, la justificación de que la suma de los ángulos interiores del rectángulo es 360º podría basarse en la obtención de dos triángulos al trazar su diagonal. De este modo, se utilizaría la propiedad de la actividad 1 para justificar la respuesta a la actividad 3. Este segundo criterio justifica también la inclusión de definiciones de rectángulo.

Cuestionario

1) ¿Por qué la suma de los ángulos interiores de un triangulo cualquiera es igual a 180º?

2) Elige de las siguientes definiciones de rectángulo la que te resulte más conocida:

☐ *"Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene los cuatros ángulos iguales".*

☐ *"Un rectángulo es un paralelogramo que tiene un ángulo recto".*

3) A partir de la definición de rectángulo que elegiste, ¿a que es igual la suma de los ángulos interiores de un rectángulo? Justifica tu respuesta.

Como se ha expresado en la introducción, en la presente comunicación se estudian las respuestas de los alumnos referidas a la primera actividad.

4. Estudio de respuestas

Se analizaron las producciones de los alumnos completando la tabla incluida en el Anexo, que reúne la siguiente información:

Columna 1: incluye el número de identificación que corresponde a cada alumno.

Columna 2: Tipo de figura geométrica representada en el bosquejo[2] realizado.

Columna 3: Información incluida en el bosquejo, que puede referirse a: denominación de elementos, marcas de ángulos, medidas de ángulos.

Columna 4: Acciones observadas sobre el bosquejo (se mencionan: prolongación de las rectas o semirrectas que contienen los lados de la figura, trazado de una recta paralela a un lado por un vértice opuesto, trazado de una diagonal).

Columna 5: Se incluyen citas textuales de los sujetos que resultan claves para entender su razonamiento, o bien una descripción de lo que realiza en la explicación.

Columna 6: Se incluye el tipo de error cometido (si corresponde) según la clasificación de Franchi y Rincón (2003) y una breve descripción del error, para los alumnos que han desarrollado alguna explicación de la propiedad. Los tipos de error se identifican con E.R. (Error de razonamiento) y E.T. (Error de técnica). En el caso de que se produzcan dos errores del mismo tipo en una misma explicación, se añade a la derecha del tipo de error la expresión: "(2)".

Columna 7: Se indica si el sujeto arriba o no a una conclusión referida a la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. El valor "Sí" corresponde a los sujetos que se supone que consideran que su explicación alcanza para justificar la propiedad, en cambio "No" se usa para designar a los sujetos que dejan inconclusa la explicación. Cabe aclarar que para confirmar estos valores se ha recurrido (en algunos casos) a entrevistas individuales.

[2] Denominamos bosquejo a la representación de una figura en el papel, generalmente realizada a mano alzada y que es utilizada por el alumno como figura de análisis.

4.1. Categorías de respuestas

Una vez completada la información de la tabla, y con el objeto de clasificar los procesos de validación de los estudiantes, se organizaron las producciones de los sujetos en cinco categorías, descritas a continuación.

Categoría 1: Utilización de recta paralela a un lado por vértice opuesto

Cinco sujetos (3, 5, 12, 17 y 19 respectivamente) trazan paralelas a uno de los lados del triángulo por el vértice opuesto y luego intentan buscar relaciones de igualdad entre los ángulos determinados. Los mismos añaden un bosquejo del triángulo donde destacan los ángulos.

Un sujeto (5) sólo incluye la figura de análisis, sin añadir ninguna justificación. Otro sujeto (19) a partir del trazado de paralelas obtiene un paralelogramo, afirma que la suma de sus ángulos interiores es 360º y no realiza ninguna afirmación para la suma de los ángulos interiores de un triángulo. En la entrevista posterior el sujeto reconoce que su justificación es incompleta.

Un solo sujeto (17) de esta categoría completa una justificación satisfactoria de la propiedad, recurriendo a la comparación de ángulos determinados por rectas paralelas cortadas por una transversal. Se considera que el esquema de prueba de este sujeto es una combinación de los esquemas transformacional y axiomático, dado que se observa un razonamiento orientado a resolver la conjetura general (por un lado) y el desarrollo de un razonamiento basado en resultados previos (por el otro). Este sujeto ingresó a la carrera en el año 2003 y había cursado en una oportunidad la asignatura.

Dos sujetos (3 y 12) proponen el mismo camino pero se equivocan al comparar los ángulos.

Categoría 2: Utilización de un rectángulo dividido por una diagonal

Ocho sujetos parten de un rectángulo y trazan una diagonal para dividirlo en dos triángulos. Estos alumnos añaden un dato no dado: la presencia de un ángulo recto en el triángulo.

Cuatro alumnos de este grupo (sujetos 5, 11, 13 y 18 respectivamente) consideran erróneamente que la diagonal del rectángulo biseca los ángulos interiores correspondientes, obteniendo así 90º + 45º + 45º = 180º. En algunos paralelogramos (cuadrado y rombo) se cumple la propiedad de que cada diagonal biseca a los ángulos cuyos vértices une, pero no se cumple en el caso de un rectángulo cualquiera.

Tres alumnos (sujetos 6, 9 y 10) afirman que el triángulo es la mitad del rectángulo, pero no demuestran que los triángulos obtenidos al trazar la diagonal son congruentes (o que sus ángulos son iguales). Estas explicaciones añaden una hipótesis que no ha sido dada: el hecho de que la suma de los ángulos es la misma para todos los triángulos. Este error es mencionado por Dubnov (1994) quien afirma que "en el momento de la demostración del teorema que nos interesa no se sabe nada sobre la suma de los ángulos del triángulo y no hay ninguna base para suponer que ella es la misma para todos los triángulos" (p.32). Uno de estos alumnos (sujeto 9) reconoce que debería probar la congruencia de los triángulos, pero que no ha logrado hacerlo.

Finalmente, un alumno (sujeto 8) prueba la igualdad de ángulos determinados por la diagonal (considera ángulos alternos internos entre paralelas) y obtiene una justificación satisfactoria para el caso particular de los triángulos rectángulos.

Categoría 3: Determinación de un ángulo llano utilizando los ángulos interiores del triángulo

Dos estudiantes (sujetos 14 y 15) afirman que los tres ángulos interiores forman un ángulo llano.

El sujeto 14 afirma "si por ejemplo trasladamos los ángulos A y B hasta el ángulo C se forma un ángulo llano", sin entrar en mayor detalle. No queda claro en este caso el

significado atribuido al término “trasladar”, aunque no parece usado en un sentido geométrico estricto.
El sujeto 15 parte de un triángulo obtusángulo y afirma que al sumar sus ángulos interiores “en forma adyacente” resulta un ángulo llano. Para justificar esa afirmación se basa en un bosquejo que consiste en la representación de tres ángulos consecutivos que suman un llano, que identifica con las mismas denominaciones usadas para los ángulos del triángulo obtusángulo de partida. Se observa aquí una justificación de tipo perceptual (Sowder y Harel, 1998). El bosquejo realizado para mostrar el ángulo llano determinado está emparentado con la práctica (propia de tercer ciclo de EGB) que consiste en recortar los ángulos de un triángulo y pegarlos de modo consecutivo para comprobar la obtención del ángulo llano. Esta justificación se relaciona también con el primer obstáculo mencionado por Balacheff (2000) respecto de que el alumno se convence de la propiedad al comprobarla en su representación gráfica. En la entrevista realizada posteriormente, el sujeto confirma que ha realizado ‘a ojo’ la representación de los tres ángulos consecutivos y afirma que debería haberla hecho utilizando elementos de geometría para asegurarse de que los ángulos se trasladan correctamente. No es consciente que al trasladar los ángulos (aunque sea mediante el uso de regla sin graduar y compás) estaría “comprobando” el resultado para un triángulo particular, por lo que no resulta una demostración válida para todos los casos.

Categoría 4: Utilización de propiedad de los ángulos exteriores del triángulo

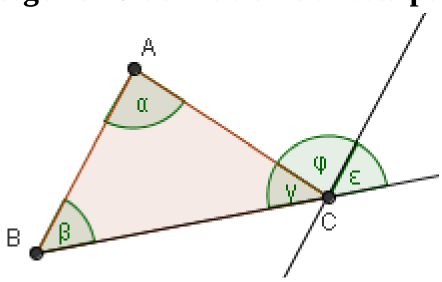
Dos sujetos razonan sobre los ángulos exteriores del triángulo. El sujeto 4 marca en su bosquejo los ángulos interiores y exteriores y afirma (textualmente): “A travez de la figura podemos ver q` los ángulos internos más su adyacente forman un ángulo llano”, sin añadir más a esta afirmación.
El sujeto 7 considera un triángulo cualquiera, prolonga la semirrecta que contiene a un lado y utiliza la propiedad de que cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes con él, apoyándose en un bosquejo. El esquema de prueba de este sujeto corresponde al tipo axiomático, dado que se supone que utiliza un resultado previo para justificar la propiedad pedida. El año de ingreso de este alumno es 2005.

Categoría 5: Sin explicación

Los **tres** sujetos restantes (1, 2, 16 respectivamente) no incluyen explicación alguna y sólo presentan un bosquejo del triángulo donde destacan sus ángulos. Uno de los alumnos (el sujeto 1) incluye las medidas de los ángulos del triángulo dibujado.

4.2. Demostraciones correctas a partir de las ideas esbozadas por los alumnos

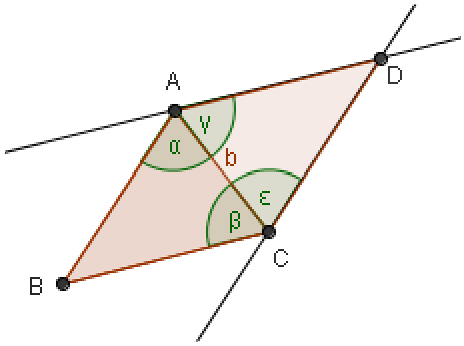
Categoría 1: Utilización de recta paralela a un lado por vértice opuesto



Demostración: Se traza por C una recta *l* paralela al lado AB. Sean *r, s* y *t* las rectas determinadas por A y B, A y C, y B y C respectivamente.
Comparando ángulos resulta:
α = φ por ser alternos internos entre *l* // *r* cortadas por *s*.
β = ε por ser correspondientes entre *l* // *r* cortadas por *t*. Se tiene que 2R = γ + φ + ε = γ + α + β, que es la propiedad pedida.
Esta demostración es adecuada también para la categoría 3 (Determinación de un ángulo llano utilizando los ángulos interiores del triángulo).

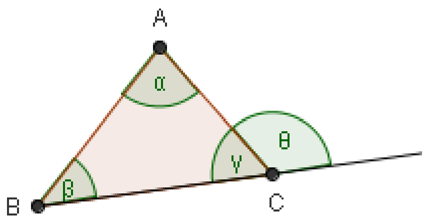
Categoría 2: Utilización de un rectángulo dividido por una diagonal

Hemos indicado que esta propuesta conduce a la demostración de la propiedad para triángulos rectángulos. Una demostración para el caso general podría obtenerse razonando a partir de un triángulo cualquiera, y trazando paralelas a dos de sus lados para obtener un paralelogramo.



Demostración: Partiendo del Δ ABC, se traza por C la recta *l* paralela al segmento AB, y por A la recta *s* paralela a BC. La intersección de estas paralelas es el punto D. El lado b resulta así la diagonal del cuadrilátero ABCD.
Comparando ángulos resulta:
$\alpha = \varepsilon$ y $\gamma = \beta$ por ser alternos internos entre paralelas cortadas por una transversal.
Por tanto, los triángulos ABC y ACD resultan congruentes por tener un lado común (b) y los ángulos adyacentes a él respectivamente iguales.
Como la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 4R, la suma de los ángulos interiores de cada uno de los triángulos congruentes obtenidos es 4R/2 = 2R.

Categoría 4: Utilización de propiedad de los ángulos exteriores del triángulo



Demostración: Si suponemos probado que cada ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes con él, resulta:
$2R = \gamma + \theta = \gamma + (\alpha + \beta) = \alpha + \beta + \gamma$

4.3. Errores observados

En la tabla 1 resumimos los errores observados según la clasificación de Franchi y Rincón (2003), incluyendo una descripción de los errores y los sujetos en los que se manifiesta.

TIPO DE ERROR	IDENTIFICACIÓN DEL ERROR	SUJETOS
ERROR DE RAZONAMIENTO (E.R.)	Hipótesis no dada: el triángulo posee un ángulo recto.	5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 18
	Hipótesis no dada: la suma de los ángulos interiores es la misma para todos los triángulos.	6, 9, 10
	No se prueba la propiedad sino que se comprueba. Por lo tanto se acepta como verdadera (la propiedad es una hipótesis dada).	14, 15
	Uso de una propiedad sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación: la diagonal es bisectriz en el cuadrado y en el rombo, pero no en un rectángulo cualquiera.	5, 11, 13, 18
ERROR DE TÉCNICA (E.T.)	Utilización defectuosa de un algoritmo correcto: comparación errónea de ángulos.	3, 12
	Utilización de un algoritmo adecuado para la demostración pero no se alcanza a demostrar la propiedad.	6, 19
	Enunciado de proposiciones ciertas sin justificación.	4

Tabla 1. Clasificación de errores

Conclusiones

En general, a partir del estudio de las producciones de los alumnos se confirma la dificultad de los estudiantes para justificar satisfactoriamente una propiedad geométrica. En los resultados obtenidos observamos que sólo dos alumnos desarrollan un proceso de

validación que podría caracterizarse como demostración en el sentido de Balacheff (2000). Estos sujetos mostrarían un esquema de prueba matemático.
Los errores que predominan son los de razonamiento, y en menor medida errores de técnica. No se han observado otros tipos de error según la clasificación de Franchi y Rincón (2003).
Llama la atención el hecho de que ocho estudiantes trabajan a partir de un caso particular (triángulo rectángulo). Seis de estos sujetos arriban a la conclusión de la propiedad sin reconocer que no se han demostrado todos los casos. Sólo dos alumnos añaden un bosquejo que muestra la intención de salvar la particularidad de la explicación presentada, pero no logran elaborar una justificación satisfactoria.
El error de suponer como hipótesis que todos los triángulos tienen igual suma de ángulos interiores puede pasar fácilmente desapercibido, dado que como manifiesta Dubnov (1994; p 32) "nos hemos acostumbrado a que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a [2R] para todos los triángulos, independientemente de su forma y dimensiones, por lo cual la mayoría de nosotros no protesta cuando oye: designemos con x la suma de los ángulos de un triángulo (cualquiera)".
A pesar de que sólo dos explicaciones son satisfactorias, la mayoría de los sujetos (13 de 19) confía en que las explicaciones dadas son suficientes para justificar el resultado (como se manifiesta en la última columna de la tabla incluida en el Anexo). Esto pone de manifiesto la necesidad de profundizar el trabajo con las validaciones de resultados geométricos para que estos futuros profesores puedan desarrollar justificaciones satisfactorias.
El estudio comentado en esta comunicación es incipiente. Queda aún la tarea de completar el estudio de las producciones de los estudiantes en la tercera actividad propuesta, así como intentar compatibilizar las producciones de los sujetos con las clasificaciones de las argumentaciones de propiedades geométricas desarrolladas por diversos autores.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: una empresa docente y Universidad de los Andes.

Battista, T. y Clements, D. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher*, 88(1), 48-53.

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un lugar protagónico? *Educación Matemática*, 17(3), 53-76.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Dubnov, Ya. S. (1994). *Errores en las demostraciones geométricas.* Madrid: Rubiños-1860, S.A.

Franchi L. y Rincón A. (2003). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. Disponible en http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/educere/vol8num25/articulo8.pdf. Fecha de captura: 10/05/07.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. (2006). NAP (Núcleos de aprendizaje prioritarios).

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática.* Sevilla: S.A.E.M. Thales

Puig Adam, P. (1980) *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid: Euler, G. Puig Ediciones.
Rodríguez Díaz, F. (2006). Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemática. Trabajo de investigación. Universidad de Valencia. Disponible en http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Rodriguez06.pdf. Fecha de captura: 10/05/07.
Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.

ANEXO (en página siguiente)

	BOSQUEJOS			EXPLICACIONES	TIPO DE ERROR	Arr Con
	TIPO DE FIGURA	**CARACTERÍSTICAS**	**ACCIONES**			
1	Triángulo acutángulo Caso particular	Denom. de vértices y lados. Marca y med. de ángulos.	---------	Afirma que no sabe “como demostrar la veracidad de la pregunta”.	No justifica	No
2	Triángulo acutángulo	Denominación de vértices	--------	Sin explicación	No justifica	No
3	Triángulo acutángulo	Marca y denominación de ángulos	Prolonga un lado y traza su paralela por el vértice opuesto	Cadena de afirmaciones para comparar ángulos.	Error al comparar ángulos. ET.	No
4	Triángulo acutángulo	Marca de ángulos interiores y exteriores.	Prolonga los tres lados	“A travez de la figura podemos ver q` los ángulos internos más su adyacente forman un ángulo llano”.	Afirmación suelta. E.T.	No
5	Rectángulo Caso particular		Traza una diagonal	“luego tendremos 1 áng. de 90º y 2 de 45º”	Hip no dada y diagonal como bisectriz. E.R. (2)	Sí
	Triángulos acutángulo	Marca y denominación de ángulos	Prolonga los lados y traza paralela a uno de ellos por el vértice opuesto	Sin explicación.	No justifica	No
6	Rectángulo Caso particular		Traza una diagonal	“un triángulo es la mitad de un rectángulo”	Dos hipótesis no dadas E.R. (2)	Sí
	Paralelogramo	Marca y denominación de ángulos	Traza una diagonal, prolonga diagonal y un par de lados paralelos	Cadena de afirmaciones para comparar ángulos, utilizando ángulos entre paralelas cortadas por una transversal y ángulos adyacentes.	Cadena de afirmaciones sin conclusión. E.T.	No
7	Triángulo acutángulo	Marca y denominación de ángulos	Prolonga semirrecta que contiene a un lado	Cadena de afirmaciones para comparar ángulos, utilizando ángulos adyacentes y propiedad del ángulo exterior de un triángulo.	Demostración completa	Sí
8	Rectángulo Caso particular	Marca y denominación de ángulos	Traza una diagonal	Prueba igualdad de ángulos determinados por la diagonal “por paralelismo”. Usa suma de ángulos interiores de un cuadrilátero y el hecho de que el rectángulo posee ángulos rectos.	Hipótesis no dada. E.R.	Sí
9	Rectángulo Caso particular	Marca y denominación de ángulos, denom. de vértices.	Traza una diagonal	Utiliza suma de ángulos interiores de un rectángulo, “la suma de los ángulso interiores es 180º (360º/2) (de c/ triángulo”. Afirma también: “Debería probar la congruencia, pero he probado y no llego a justificar”.	Dos hipótesis no dadas. E.R. (2)	No
10	Rectángulo Caso particular	---------------	Traza una diagonal	Usa suma de ángulos interiores de un cuadrilátero “Como un triángulo se forma por la diagonal que divide aun rectángulo en 2, […] en consecuencia la suma resulta la mitad de 360º, 180º”	Dos hipótesis no dadas. E.R. (2)	Sí
11	Rectángulo Caso particular	Marca y denominación de ángulos	Traza una diagonal	“90º+45ª+45º = 180ª”	Hip. no dada y diagonal como bisectriz. E.R. (2)	Sí
12	Triángulo acutángulo	Denominación de vértices, ángulos y rectas, marca de ángulos	Prolonga los tres lados y traza una paralela a uno por el vértice opuesto.	Cadena de afirmaciones para comparar ángulos entre paralelas cortadas por una secante. Arma un ángulo llano con tres ángulos consecutivos.	Error al comparar ángulos. ET.	Sí
13	Rectángulo Caso particular	Denominación de vértices y ángulos, marca de ángulos	Traza una diagonal	“α+β+γ= 45ª + 90º + 45ª = 180º”	Hip. no dada y diagonal como bisectriz. E.R. (2)	Sí
14	Triángulo acutángulo	Denominación de vértices		Afirma que “si trasladamos los ángulos A y B hasta el ángulo C se forma un ángulo llano por lo tanto si sumamos A + B + C = 180º”	Falta completar cómo trasladar ángulos. E.T.	Sí
15	Triángulo obtus.	Denominación de lados y ángulos, marca de ángulos		Afirma: “Como se ve en la figura 2, si se suman en forma adyacente, los ángulos interiores nos da siempre un ángulos llano”.	Comprobación perceptual. E.T.	Sí
	Tres ángulos consec. que forman un llano					
16	Triángulo obtusán.	Marca y denominación de ángulos	Prolonga los tres lados	Sin explicación. Indica: “α+β+δ= 180º”	No justifica	No
17	Triángulo acutángulo	Denominación de vértices y rectas y marca de ángulos	Prolonga semirrecta que contiene a un lado y traza paralela por vértice opues.	Cadena de afirmaciones para comparar ángulos entre paralelas cortadas por una secante. Arma un ángulo llano con tres ángulos consecutivos.	Demostración completa	Sí
18	Rectángulo Caso part	Marcas de ángulos rectos	Traza una diagonal	Afirma: Quedaría un ángulo de 90º y dos de 45º. La suma es, por lo tanto, 180º”.	Hip. no dada y diagonal como bisectriz. E.R. (2)	Sí
	Rectángulo	Amplitudes de ángulos				
19	Triángulo obtusángulo	Denominación de vértices y marcas de ángulos	Prolonga los tres lados. Traza por B paralela a AC y por C paralela a AB. Denomina D pto. inters. paralelas.	Afirma: “Nos queda formado el paralelogramo ABCD (pues sus lados opuestos son paralelos). Los ángulos internos del paralelogramo suman 360º”.	No razona sobre el triángulo. E.T.	No