

## FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UNA EXPERIENCIA PARA APRENDER A ENSEÑAR CON APLICACIONES WEB DE CÁLCULO SIMBÓLICO

Nuria Joglar – Miguel Á. Abánades – José M. Sordo – Francisco Botana  
njoglar@ucm.es – miguelangel.abanades@urjc.es – jmsordo@ucm.es – fbotana@uvigo.es  
Universidad Complutense de Madrid, España, Universidad Rey Juan Carlos, España,  
Universidad Complutense de Madrid, España, Universidad de Vigo, España

Núcleo temático: IV. Formación del profesorado en Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: 5. Formación y actualización docente

Palabras clave: Formación de profesores, Sistema de cálculo simbólico, Enseñanza de matemáticas en Secundaria

### Resumen

*Motivados por la relevancia en el ámbito profesional de matemáticos e ingenieros de las aplicaciones de cálculo simbólico, en esta comunicación se presenta un estudio inicial sobre las posibilidades didácticas en educación secundaria de estas herramientas. Se describe una experiencia piloto desarrollada en el contexto de formación inicial de profesorado (Máster de Formación de Profesorado de Secundaria, especialidad Matemáticas), en la cual se plantea a los futuros profesores una serie de tareas (matemáticas y didácticas) a realizar con las aplicaciones web de cálculo simbólico de acceso libre Wolfram Alpha y SageMathCell en paralelo. Se describen y discuten los primeros resultados de esta intervención observándose diferentes comportamientos/respuestas de los futuros profesores en función de sus conocimientos matemáticos, didácticos y tecnológicos, y de las características de cada aplicación. Aunque estudios más amplios son necesarios, las primeras conclusiones apuntan a la falta de flexibilidad matemática por parte de los futuros profesores para incorporar adecuadamente este tipo de herramientas al trabajar la resolución de problemas, y a la conveniencia de complementar la formación matemática específica para enseñar matemáticas con tecnologías con conocimientos básicos de programación informática.*

### 1. Introducción y marco teórico

En España, el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato establece que: “El uso de herramientas tecnológicas tendrá un papel esencial ...” [Real Decreto 1105/2014, Sección I, p. 308].

Investigadores en el área de la educación matemática propugnan la necesidad de elaborar marcos teóricos específicos y de desarrollar estudios empíricos que ayuden a definir el papel

del profesor en entornos tecnológicos generales, de modo que la formación en tecnología del profesorado no se convierta en la formación en una aplicación concreta (Hoyles et al., 2004). Para tratar de definir el papel del profesor en entornos tecnológicos se ha llevado a cabo una intervención en el contexto de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en la que a los futuros profesores se les plantearon tareas matemáticas y didáctico-matemáticas para que las resolviesen individualmente y en paralelo con dos aplicaciones web de cálculo simbólico. Además, a los participantes se les pidió que incluyeran una valoración de las dificultades encontradas con cada aplicación. El objetivo principal de este estudio es analizar cómo los futuros profesores de matemáticas integran ese tipo de aplicaciones en su doble actividad, como matemáticos y como profesores de matemáticas.

El modelo que se propone en este artículo, tiene como punto de partida la observación del trabajo del matemático profesional donde las herramientas de cálculo simbólico (CAS de *Computer Algebra Systems*) juegan un papel fundamental.

El uso didáctico de los CAS ha sido considerado de manera habitual por profesores universitarios en titulaciones de grado y postgrado de Matemáticas e Ingenierías en los últimos años (Allen et al., 1999; Kendal et al., 2004; Botana et al., 2014), pero su complejidad de manejo, para el profesor y para el alumno, ha hecho que su uso en la enseñanza secundaria haya sido testimonial (Abánades et al., 2009). Las recientes versiones web simplificadas de algunos CAS hacen que su integración en el aula sea más factible (Dimiceli et al., 2010; Necesal & Pospisil, 2012; Botana et al., 2014). Para nuestra intervención hemos seleccionado las aplicaciones web de libre acceso Wolfram Alpha (WA), basada en el CAS comercial Mathematica, y SageMathCell (SMC), basada en el CAS de software libre SageMath, herramientas que han despertado recientemente el interés en la enseñanza de las matemáticas, especialmente a nivel universitario (Dimiceli et al., 2010).

Las actividades se han diseñado, planteado y analizado dentro del marco teórico del Instrumentalismo o Teoría de la Instrumentación (Rabardel, 2001; Drijvers, 2013; Trouche, 2004), y nuestra reflexión se centra, a partir de un contexto práctico, en detectar cómo se apropian los futuros profesores del instrumento concreto en cada caso; es decir, de cómo se produce la génesis instrumental (Artigue, 2002).

La intervención muestra cómo las distintas posibilidades y restricciones de las herramientas influyen en las estrategias de resolución de problemas de los futuros profesores

(*instrumentación*), y por otro lado cómo los distintos perfiles de los participantes influyen en los niveles de apropiación de las herramientas (*instrumentalización*).

Antes de describir detalles de la intervención y de discutir los resultados, incluimos breves descripciones de las aplicaciones web utilizadas.

**Wolfram Alpha** basa sus respuestas a las consultas matemáticas en cálculos remotos de la aplicación de cálculo simbólico Mathematica. Su característica más llamativa es su capacidad de interpretar consultas en lenguaje natural (solo en inglés). Esta cualidad facilita en gran manera la interacción con un usuario novel que puede realizar consultas matemáticas del tipo: “what is the area between the curves  $x$  squared minus 4 and  $3x$  plus 5 from 0 to 3?” (¿cuál es el área entre las curvas  $x$  cuadrado menos 4 y  $3x$  más 5 entre 0 y 3?), sin necesidad de usar una codificación especial.

La característica didáctica más reseñable de las respuestas dadas por esta aplicación es la presentación simultánea de diferentes “acepciones” o representaciones del objeto matemático en cuestión. Es ilustrativa la respuesta dada por Wolfram Alpha a la consulta “3+5” (véase la Figura 1, izquierda), que recoge distintas representaciones de la suma.



Figura 1: 3+5 según Wolfram Alpha y cálculo de integral en SageMathCell.

**SageMath** es una aplicación simbólica de cálculos matemáticos que reúne más de 100 paquetes de cálculo matemático avanzado de código abierto. SageMathCell es un servicio web de consulta directa basado en SageMath con una interfaz compuesta únicamente por un campo de texto en el que el usuario escribe su consulta (ver Figura 1, derecha).

A diferencia de Wolfram Alpha, la consulta debe de estar escrita en el lenguaje de programación Python, siguiendo las normas habituales de escritura científica. Esta dificultad inicial viene compensada por la numerosa documentación accesible online con ejemplos de uso de las distintas funciones de SageMath disponibles. La versatilidad de la herramienta hace que tenga usos en docencia, sobre todo en niveles superiores, donde juega el papel de “supercalculadora” (Botana et al., 2014; Botana et al., 2011).

## 2. Intervención y Metodología

La intervención se llevó a cabo con un grupo de 18 alumnos de la especialidad de Matemáticas del Máster de Formación de Profesorado de Secundaria de la Universidad Complutense de Madrid durante el curso académico 2013-14. Los participantes tenían distintos conocimientos matemáticos e informáticos debido a su formación previa (ver Tabla 1).

Licenciatura en Matemáticas	10
Grado en Matemáticas y Estadística	1
Grado en Matemáticas (Computación)	2
Ingeniería Superior Informática	1
Ingeniería Superior Industrial	1
Ingeniería Superior Telecomunicaciones	1
Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas	1

Tabla 1: Participantes según formación académica.

Se comenzó con una primera fase de 30 minutos de familiarización con las herramientas. En la segunda fase, de explotación matemática y de una hora de duración, los participantes tuvieron que realizar cálculos más complejos y representaciones gráficas con funciones de una y varias variables. En la Fase 3, de explotación didáctica y de 80 minutos de duración, se pedía a los futuros profesores que reflexionaran sobre cómo las aplicaciones consideradas podrían ayudarles a ellos como profesores, y a sus hipotéticos alumnos de secundaria, a resolver dos problemas planteados. En tercer lugar, se pedía que valoraran cómo se podría modificar la tarea para que fuera matemáticamente más rica y de forma que el uso de las aplicaciones web fuera imprescindible para su resolución. Sus respuestas a estas cuestiones nos ayudan a detectar conocimientos de características de aprendizaje de los alumnos de secundaria, y conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas al pedirles que controlen variables didácticas de los problemas planteados en relación con los recursos tecnológicos,

las características del problema y del aprendizaje de los alumnos. Al igual que en las fases 1 y 2, se pidió a los participantes que valoraran la dificultad que habían experimentado con cada una de las herramientas al resolver cada tarea. Además, el formulario de valoración recogía las observaciones que los participantes tuviesen sobre la resolución de cada tarea con cada aplicación. Finalmente, en la Fase 4, de 10 minutos, respondieron específicamente como futuros profesores a 11 cuestiones sobre aspectos matemáticos, didácticos y tecnológicos relacionados con las actividades realizadas en las fases anteriores.

Además del nivel de dificultad encontrado con cada una de las dos herramientas en la resolución de cada una de las cuestiones propuestas, se recogieron y analizaron las respuestas por escrito de todos los participantes a todas las actividades en las distintas fases. También se analizaron breves entrevistas presenciales y a través de correo electrónico, con lo que se han incluido análisis cuantitativos y cualitativos.

### 3. Resultados y discusión

Respecto a la integración de WA y SMC en su actividad **como matemáticos**, la tabla 2 recoge la dificultad media experimentada al resolver las tareas matemáticas (Fases 1 y 2) con cada una de las aplicaciones, en una escala de 0 a 10.

Tareas	Herramienta	Dificultad
matemáticas	WA	0,68
matemáticas	SMC	<b>5,4</b>
didácticas	WA	1,22
didácticas	SMC	<b>8,15</b>

Tabla 2: Dificultad según herramienta.

El hecho de que la dificultad encontrada por los estudiantes sea significativamente mayor con SMC (5,4) que con WA (0,68), es una indicación clara de la diferencia entre los niveles de instrumentación alcanzados por los estudiantes para profesor en función de las características de cada recurso seleccionado. Parece razonable afirmar que con WA el proceso de instrumentación es más completo y rápido que con SMC. Esta afirmación, apoyada en datos cuantitativos, se ve claramente reforzada por los comentarios de los alumnos, quienes valoran mucho más positivamente la usabilidad y la interactividad de WA, en particular el hecho de que WA ofrezca en sus respuestas de manera automática acepciones

en diferentes registros (gráfico, analítico-algebraico, icónico, tabular ...), algo que no hace SMC automáticamente.

Para analizar el grado de instrumentalización alcanzado por los participantes en función de sus conocimientos previos, hemos distinguido dos perfiles de futuros profesores según su grado de formación en programación informática, a saber, participantes con formación solo matemática (grupo M) y participantes con formación matemático-informática (grupo MI), según la tabla 1. La tabla 3 muestra la dificultad experimentada por los participantes según su perfil en las cuestiones matemáticas (fases 1 y 2) con cada una de las herramientas digitales. No resulta sorprendente que los alumnos con mayor formación informática encuentren menos dificultad en el uso de SMC, dada la naturaleza más técnica de la codificación de las tareas en SMC. Si bien no es una diferencia muy relevante, nos parece digno de mención el hecho de que la dificultad media encontrada por estos mismos alumnos usando WA sea mayor que la dificultad encontrada por los estudiantes con formación estrictamente matemática (1,04 y 0,45 respectivamente).

<b>Formación</b>	<b>Tareas</b>	<b>Herramientas</b>	<b>Dificultad</b>
M	matemáticas	WA	0,45
MI	matemáticas	WA	<b>1,04</b>
M	matemáticas	SMC	<b>6,3</b>
MI	matemáticas	SMC	4,01
M	didácticas	WA	0,59
MI	didácticas	WA	<b>2,65</b>
M	didácticas	SMC	<b>10</b>
MI	didácticas	SMC	5,63

Tabla 3: Dificultad según herramienta y formación.

Respecto a la integración de WA y SMC en su actividad como profesores de matemáticas, en la Fase 3 de la intervención, los alumnos valoran de 0 a 10 la dificultad que tendrían al utilizar cada herramienta para ayudar a sus estudiantes a resolver los problemas planteados. Con estas valoraciones podemos conseguir una primera visión del nivel de desarrollo de la génesis instrumental específicamente dentro del contexto de la formación de profesores. En lo que se refiere a la génesis instrumental, en la fase didáctica se encuentran resultados similares a los discutidos en las fases matemáticas. Así, tanto los análisis cuantitativos como los comentarios realizados por los alumnos, refuerzan la idea de que los niveles de instrumentación son mucho más altos con WA que con SMC. De nuevo, en el caso de los alumnos con un perfil menos matemático puro y con más conocimientos de programación,

la dificultad con SMC baja (de 8,15 a 5,63) y con WA sube (de 1,22 a 2,65). En el caso de los alumnos con un perfil puramente matemático, la dificultad con SMC sube a 10 puntos (ninguno es capaz de plantear cómo utilizar esta herramienta), pero su dificultad con WA baja (de 1,22 a 0,59).

La tarea fundamental de la Fase 3 es un problema de programación lineal y el 80% de los alumnos describen una respuesta correcta a lápiz y papel, aunque solamente el 27% incluye todos los detalles en su respuesta. Cerca del 40% de los participantes (7/18) deja en blanco la valoración de la dificultad para incorporar las aplicaciones web en la enseñanza de los contenidos matemáticos relacionados con la resolución de la tarea, lo que indica falta de conocimientos matemáticos para enseñar y sobre las características del aprendizaje con las citadas herramientas (Carrillo et al., 2013). Al igual que lo indicado por otros investigadores en la literatura, el peso de la respuesta estereotipada en papel y lápiz hace que los futuros profesores sean poco flexibles a la hora de encontrar otro tipo de estrategias con los recursos disponibles (Iranzo y Fortuny, 2009; Star & Rittle-Johnson, 2008).

Cuestionados sobre las variables didácticas relacionadas con la tarea planteada, casi el 50% no contesta. Tres futuros profesores mencionan “poner números más difíciles” como un factor que puede hacer que los alumnos necesiten usar WA o SMC para resolver el problema, y dos se plantean utilizar expresiones no lineales en las restricciones o plantear una región factible no acotada. Por otra parte, solamente un participante considera como variable didáctica el número de variables de la función a maximizar y también solamente una persona menciona en ese momento el carácter lineal de la misma. Estas observaciones describen indicios de conocimientos sobre las características tanto de la enseñanza como del aprendizaje matemático con tecnologías digitales que los futuros profesores analizados ponen en juego en la Fase 3 (Carrillo et al., 2013).

#### **4. Conclusiones**

En general, los futuros profesores integran WA con mayor agilidad y eficacia que SMC, independientemente de su formación, pero es relevante que el nivel de integración de los alumnos con formación matemático-informática es mayor que el de los alumnos con formación matemática con SMC, pero menor con WA. Este aspecto se acentúa ligeramente en el caso de las tareas específicamente didácticas.

Los alumnos con una formación matemática más sólida parecen saber interpretar mejor las respuestas múltiples que ofrece WA. Siendo conscientes de las limitaciones del estudio, podríamos inferir de manera simplista que los estudiantes con formación matemático-informática saben codificar mejor las búsquedas, pero los estudiantes con formación matemática más avanzada saben mejor *qué* hay que buscar.

Respecto a la sensación de usabilidad percibida por los alumnos de cada una de las herramientas, podemos decir que el uso de SMC se ve muy limitado por la falta de conocimientos de programación. En consecuencia, todos los futuros profesores encuentran más apropiado WA que SMC para su uso en secundaria y bachillerato.

En resumen, las primeras conclusiones apuntan a la conveniencia de complementar la formación matemática específica de los profesores con conocimientos básicos de programación informática para enseñar eficazmente con este tipo de aplicaciones.

## Referencias bibliográficas

- Abánades, M. Á, Botana, F, Escribano, J, Tabera, L. F. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 12(2), 325-346.
- Allen, G. D, Herod, J, Holmes, M, Ervin, V, Lopez, R. J, Marlin, J, Meade, D, Sanches, D. (1999). Strategies and guidelines for using a computer algebra system in the classroom. *International Journal of Engineering Education*, 15(6), 411-416.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7(3), 245-274.
- Botana, F, Abánades, M. A, Escribano, J. (2014). Using a Free Open Source Software to Teach Mathematics. *Computer Applications in Engineering Education*, 22(4), 728-735.
- Botana, F, Escribano, J, Abánades, M. A. (2011). Sage: Una aplicación libre para matemáticas. *SUMA*, 67, 41-46.
- Carrillo, J, Climent, N, Contreras, L. C, Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics Teacher Specialized Knowledge. *Proceedings of the CERME 8*, Febrero, 2013, Antalya, Turquía.
- Dimiceli, V. E, Lang, A. S. I. D, Locke, L. (2010). Teaching Calculus with Wolfram Alpha. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(8), 1061-1071.
- Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA*, 8(1), 1-20.
- Hoyle, C, Noss, R, Kent, P. (2004). On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 309-326.
- Iranzo, N, Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.
- Kendal, M, Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation with technology. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15, 143-165.
- Necasal, P, Pospisil, J. (2012). Experience with Teaching Mathematics for Engineers with the Aid of Wolfram Alpha. *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, Vol I, WCECS2012, October 24-26, 2012, San Francisco, USA.
- Rabardel, P. (2001). Instrumented mediated activity in situations. *People and Computers XV – Interaction without frontiers*, 17-30.
- Star, J, Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 18, 565-579.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 9, 281-307.