Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría

Patricio Herbst

University of Michigan (EE.UU.)

Recibido el 30 de agosto de 2011; aceptado el 2 de septiembre de 2011

Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría

Resumen

Este trabajo demuestra cómo el uso de problemas en clase de geometría puede ser utilizado para traer a la superficie fenómenos en la gestión de la instrucción. Se describen y ejemplifican dos clases de fenómenos, en particular: la adaptación de los problemas para que su trabajo inicial por parte de los alumnos se beneficie de las normas de situaciones de instrucción existentes en la clase, y la transición a otra situación de instrucción que permita al maestro adjudicarle valor a la tarea realizada. El trabajo discute estos fenómenos en el contexto de un análisis a priori del problema de las bisectrices de un cuadrilátero.

Palabras clave. Tarea, problema, instrucción, contrato, situación.

As tarefas matemáticas como instrumentos na investigação dos fenómenos de gestão do ensino: um exemplo em geometria.

Resumo

Este trabalho mostra como o uso de problemas nas aulas de geometria pode ser utilizado para trazer à superfície fenómenos na gestão da actividade lectiva. Descrevem-se e exemplificam-se duas classes de fenómenos em particular: a adaptação dos problemas de forma que o trabalho inicial sobre eles, por parte dos alunos, beneficie das normas de ensino existentes na aula e, também, a transição a outra situação de ensino que permita ao professor valorizar a tarefa realizada. O trabalho examina estes fenómenos num contexto de uma análise a priori do problema das bissectrizes de um quadrilátero.

Palavras chave. Tarefa, problema, ensino, contrato, situação.

Para citar: Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 5 – 22.

Mathematical tasks as tools for research on the management of mathematics instruction: an example from Geometry[1]

Abstract

This paper shows how the use of problems in geometry can be a research tool to bring to the surface some phenomena in the management of instruction. It describes and exemplifies two classes of phenomena: the adaptation of problems so that students' initial work on them takes advantage of norms of existent instructional situations, and the transition to a different instructional situation that permits the teacher sanction the work done as valuable. The paper discusses these phenomena in the context of an analysis a priori of the problem of the angle bisectors of a quadrilateral.

Key words. Task, problem, instruction, contract, situation.

Devoirs de mathématiques comme outils dans l'étude des phénomènes de gestion de la formation: un exemple en géométrie.

Résumé

Ce travail démontre comment l'utilisation de problèmes en classe de géométrie peut faire surgir certains phénomènes de la gestion de l'instruction. On décrit avec des exemples deux genres de phénomènes, en particulier: l'adaptation des problèmes pour que le travail initial des élèves se bénéficie des normes des situations d'instruction qui existent dans la classe et la transition à une nouvelle situation d'instruction qui permet au professeur d'assigner une valeur a la tâche réalisée. Dans ce travail on discute ces phénomènes dans le contexte d'une analyse a priori du problème des bissectrices d'un quadrilatère.

Paroles clés. Tâche, problème, instruction, contrat, situation.

Las propuestas curriculares estimuladas en Estados Unidos por los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 2000) incluyeron importantes desarrollos en lo que podría describirse como currículo centrado en tareas matemáticas problemas o consignas cuya ejecución por parte de los estudiantes daría lugar al uso de conocimientos previos en nuevas situaciones, al aprendizaje de conocimientos nuevos, o al ejercicio de prácticas matemáticas importantes (como simbolizar, demostrar, conjeturar, etc.). La escuela media, en particular, que en Estados Unidos incluye a niños entre las edades de 11 a 13 años (grados 6-8), ha sido terreno fértil para la implementación de tales materiales de estudio, a juzgar por la popularidad de algunos de éstos, como Connected Mathematics (Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Philips, 1998). A nivel internacional ha habido un interés notable en describir de qué manera tales tareas matemáticas dan lugar a comportamientos y aprendizajes matemáticos por parte de los estudiantes (por ej., Smith & Stein, 1998; Stein, Grover, & Henningsen, 1996; Tzur, Zaslavsky, & Sullivan, 2008; Watson & Mason, 2006; Zaslavsky & Sullivan, 2011). En tal contexto, autores de materiales de estudio e investigadores han hecho notar cómo los maestros alteran las tareas matemáticas, algunas veces reduciendo la demanda cognitiva de tales tareas (Henningsen, & Stein, 1997; Remillard, 1999).

[1] Este escrito es una revisión y traducción al castellano, hecha por el autor, del manuscrito ingles inédito "Tasks that embody knowledge, tasks that probe teaching" disponible en http://hdl.handle.net/2027.42/62486. Las ideas presentadas en este escrito fueron desarrolladas con recursos provistos por la U.S. National Science Foundation a través de subsidios REC 0133619 y ESI 0353285. Las opiniones expresadas son solamente del autor y no representan necesariamente la posición de la National Science Foundation. El autor agradece comentarios de Gloriana González y Takeshi Miyakawa a una versión anterior.

El argumento principal de este ensayo es que las alteraciones que el maestro inflige a las tareas obedecen a necesidades en la gestión de los procesos de instrucción; en particular a la necesidad de encontrar un entorno de trabajo viable y a la necesidad de darle un valor al trabajo hecho. Una tarea matemática puede representar el quehacer matemático, además de hacer uso de objetos y procedimientos matemáticos. En ese sentido, una tarea es una representación de la actividad matemática, encarnada en las interacciones entre personas e instrumentos culturales. Tareas que involucran a los estudiantes en calcular, definir, conjeturar, representar, y demostrar son importantes, porque proveen a los estudiantes acceso a experiencias personales en el quehacer matemático. Pero precisamente porque la realización de las tareas depende de las acciones de los estudiantes, la medida en que ellas vayan a proporcionar experiencias personales en el quehacer matemático depende de si el trabajo conjunto ha representado legítimamente aquel quehacer. Así, las tareas matemáticas no sólo ofrecen oportunidades individuales de crecimiento (cognitivo o emocional), también (y por lo menos con aquél propósito) crean reproducciones públicas de las prácticas matemáticas. De ahí que la tarea del maestro, como responsable de la gestión de la instrucción, y a propósito de las tareas, incluye no solamente involucrar a los estudiantes en el trabajo sino también darle un valor a ese trabajo, como mínimo en términos de sus cualidades matemáticas.

Por otra parte, cuando se emprende una tarea en un aula, aquélla puede ajustarse a las costumbres de trabajo conjunto o en caso contrario generar perturbaciones. Sin duda la tarea puede perturbar la cognición de los estudiantes (como cuando se crea un conflicto cognitivo). Pero lo que es de especial interés para mí es la magnitud en la que una tarea puede perturbar la instrucción (el sistema de transacciones habituales entre maestro y alumnos a propósito del contenido). Una tarea puede crear una oportunidad para que los estudiantes hagan un trabajo matemático que no es habitual y, de esa manera, (además de crear oportunidades matemáticas y de aprendizaje) perturbar la instrucción. Una tarea puede ser así un instrumento para la investigación en instrucción: Puede ocasionar respuestas y reacciones de parte del sistema de instrucción que informen sobre la capacidad del sistema para dar cabida a tal tipo de trabajo matemático. Una tarea puede, en particular, perturbar la labor de un maestro, trayendo a la superficie tensiones en la gestión de la instrucción, tensiones que suelen estar ocultas en condiciones normales de trabajo.

La prosecución de una tarea puede requerirle al maestro que gestione esas tensiones, dándole al observador la oportunidad de ver cómo la *racionalidad práctica de la enseñanza* (Herbst & Chazan, 2003) funciona para recuperar o preservar el orden. En este trabajo, muestro como hacer un análisis a priori de la tarea desde el punto de vista del maestro, apuntando lo que se puede aprender acerca de la enseñanza y su racionalidad práctica.

1. Problema, tarea y situación

En Herbst (2006) he propuesto algunas distinciones de vocabulario que permiten examinar los fenómenos que ocurren en la instrucción a propósito de las tareas. Uso *problema* para referirme a la pregunta matemática cuya respuesta requiere el desarrollo o la utilización de una idea matemática. Este uso se basa en Brousseau (1997), que define un *problema* como es una pregunta cuya respuesta depende de una teoría matemática la cual justifica un concepto, fórmula o método con los cuales se puede responder a la pregunta. Así un problema es, fundamentalmente, una representación de un conocimiento: el problema apunta al conocimiento que ayuda a resolverlo tal como el significante apunta al referente en una representación.

En este trabajo uso el problema de las bisectrices (de un cuadrilátero): ¿Qué se puede decir acerca de las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero? Este problema refiere a un conjunto de proposiciones sobre cuadriláteros.[2] Cuando una pregunta como aquélla se le plantea a una persona educada matemáticamente, la pregunta apunta tácitamente a un tipo de productos, recursos y operaciones involucrados en contestarla. Un matemático no se contentaría diciendo que "hay cuatro bisectrices", no se limitaría a hacer un diagrama y a tomar algunas mediciones, y daría por sentado que cualquier cosa que él o ella se atreviera a afirmar sobre las bisectrices debería al menos aspirar a ser demostrada. Tales comportamientos matemáticos no se pueden esperar naturalmente por parte de artistas, carpinteros, o niños pequeños. Del mismo modo, si una clase de geometría de secundaria se ocupara de ese problema, si el problema se convirtiera en una parte de la práctica de una clase, lo haría de una manera particular: los alumnos se inclinarían a hacer algunas operaciones en particular, a usar recursos particulares y a orientarse a objetivos particulares. El desarrollo potencial o real del trabajo en un problema en el tiempo y por un agente en particular es lo que yo llamo una *tarea*. Un mismo problema puede dar lugar a muchas tareas.

Basado en el trabajo de Doyle (1988), he utilizado *tarea* para referirme a las *unidades de significado* que se pueden determinar en la observación del trabajo matemático en la clase. Una tarea consiste en las acciones e interacciones orientadas a un objetivo particular; una tarea constituye así un contexto práctico en el que los estudiantes pueden llegar a pensar acerca de las ideas matemáticas en juego en un problema. Una tarea es el desarrollo temporal de un sistema de interacciones entre un agente cognoscente y un problema. La tarea puede ser modelada al identificar su *producto* o *meta* (cuyo logro marca el final de la tarea), sus *recursos* (las representaciones simbólicas y materiales y las herramientas disponibles, como por ejemplo el registro utilizado para plantear el problema) y sus *operaciones* (las maneras de hacer que están disponibles). Así, una tarea le da una vida posible a un problema.

La tercera idea fundamental es la de *situación de instrucción*. Encuentros en el aula no son eventos únicos en su tipo, de la misma manera que las conversaciones en las que participamos en la vida diaria no son únicas. Los actos de habla con los que participamos en una conversación no son completamente originales, sino que se aprovechan de la organización social de la experiencia que le provee contexto (y a veces hasta un guión): Nuestra respuesta a la pregunta "¿cómo te va?", en un intercambio casual con un compañero de trabajo en el pasillo de la oficina, es probablemente muy distinta de la respuesta a la misma pregunta cuando vamos a su casa de visita (Goffman, 1997; véase también Berne, 1996). Un fenómeno similar existe en instrucción: Los comportamientos de estudiantes y maestros se ajustan no solamente a las demandas de la tarea sino también a las expectativas de la situación de instrucción que da marco a la tarea. Uso la expresión situación de instrucción para

---

[2] Este conjunto de resultados incluye dos teoremas centrales. El primero es que las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero forman un nuevo cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios; (este cuadrilátero está bien definido si se consideran sus vértices como determinados por las intersecciones de bisectrices de ángulos consecutivos). El segundo teorema es que las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero son concurrentes sí y solo sí la suma de las longitudes de los dos pares de lados opuestos del cuadrilátero dado es constante.

referirme a cada uno de los conjuntos de acuerdos tácitos que permiten el desarrollo de una tarea, por ejemplo autorizando algunas operaciones pero no necesariamente otras.

Una tarea no ocurre en el vacío, sino que se beneficia del contexto en el que se la presenta, incluyendo en particular los acuerdos tácitos asociados a la selección de palabras en su enunciado (Mason, 1999). Estos elementos de contexto, aunque profundamente relacionados con las matemáticas, no se refieren tanto al universo de acciones epistémicas posibles que una persona puede tomar al resolver un problema particular, sino más bien al papel que *ese tipo de trabajo* habitualmente juega en el cumplimiento de las obligaciones curriculares incluidas en el contrato didáctico de una clase. En la clase de geometría de la escuela secundaria estadounidense,[3] por ejemplo, algunos problemas pueden asignarse en una situación de “exploración” (donde los estudiantes miden y manipulan diagramas dados con la meta de ofrecer observaciones y conjeturas), otros problemas se asignan en una situación de “construcción” (donde los estudiantes utilizan instrumentos para crear un diagrama), otros problemas se asignan en una situación de “cálculo” (donde los estudiantes utilizan datos sobre algunas dimensiones y propiedades conocidas de una figura dada para proponer y resolver cálculos con los cuales obtener otras dimensiones de una figura), y otros problemas se asignan en una situación de “demostración” (donde los estudiantes conectan un enunciado asumido con otro a probar, ambos dados por el maestro, mediante una cadena de enunciados intermedios conectados deductivamente).[4] Cada una de esas situaciones permite el desarrollo de ciertas tareas canónicas al estimular ciertos comportamientos por parte de los estudiantes y desaconsejar otros al crear expectativas acerca de lo que el maestro debe de proveer o garantizar. Cada una de esas situaciones permite al maestro atestiguar el aprendizaje de distinto tipo de conocimientos en juego. La posibilidad de que un mismo problema pueda provocar diferentes tipos de comportamientos por parte de los estudiantes (es decir, pueda dar lugar a diferentes tareas) depende de la situación de instrucción en la cual se plantea el problema. Este uso de la palabra *situación* procede de la sociología de E. Goffman (pero no es incompatible con el uso que G. Brousseau da a *situaciones didácticas*) para referirse a las *unidades de trabajo* habitual o a los marcos de trabajo que permiten a los problemas convertirse en tareas.

Mi hipótesis es que la interacción en las aulas se organiza en torno a la realización de una serie de situaciones de instrucción que son unidades o contextos de trabajo habitual. Tareas originales pueden ocurrir contra el trasfondo de situaciones conocidas; cuando esas tareas originales se presentan, requieren la negociación del contrato didáctico y algunas de esas negociaciones dan lugar a nuevas situaciones de instrucción. A lo largo de un año de instrucción algunas situaciones de instrucción de cursos anteriores pueden reactivarse y adaptarse y otras desarrollarse desde cero para gestionar la enseñanza de distintos conocimientos. Estas situaciones son útiles en la enseñanza, ya que facilitan al maestro la gestión de intercambios o transacciones entre, por un lado, el trabajo que hacen los estudiantes, y por otro lado, la atestación que el maestro debe hacer acerca de los conocimientos que han estado en juego. Cada una de estas situaciones de instrucción es como un tipo de inversión en la economía

---

[3] Por lo general esta clase se ofrece a estudiantes avanzados en el noveno grado (entre 14 y 15 años) y a otros estudiantes en el décimo grado (15 y 16 años).

[4] Véanse: Herbst y Brach (2006); Herbst, Chen, Weiss, y González, Nachlieli, Hamlin, y Brach (2009); Herbst, con González, Hsu, y Chen, Weiss, y Hamlin, (2010)

de intercambios simbólicos de la clase: cada una de esas situaciones crea un espacio para la participación de los estudiantes en ciertos tipos de tareas matemáticas y a la vez permite la enseñanza y el aprendizaje de un conjunto de conocimientos. Una situación es, pues, un espacio para el comercio entre el trabajo matemático en el aula por un lado y los créditos asociados a obligaciones curriculares que el maestro debe de otorgar por el otro.

Como Herbst y Brach (2006) argumentan para el caso de las situaciones de "demostración" en geometría, las situaciones de instrucción dan lugar a algunas tareas que son canónicas o normales, en las que todo lo que se hace se sobreentiende. Por ejemplo, en una situación de "demostración" va de suyo que se espere que los estudiantes justifiquen cada uno de los enunciados con una razón, pero no es habitual que se espere de los alumnos la construcción de una recta auxiliar. Un experimento de instrucción en el cual se utilizará el problema de las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero, podría describirse al decir que se perturba el sistema de instrucción pues genera la participación de la clase en una tarea que no es habitual en ninguna de las situaciones de enseñanza existentes. Tal intervención tendría el fin de observar cómo reacciona el sistema de instrucción a las perturbaciones inducidas por dicha tarea. Se observaría cómo el maestro y sus estudiantes participan en dos tipos posibles de negociación, cada uno de los cuales incluye un tipo particular de "reparo" de la presunción de que hay un ajuste entre la tarea y la situación. Una de esas negociaciones es la *negociación de la tarea* y consiste en asumir que la tarea debería de pertenecer a una situación conocida y por consiguiente denunciar la tarea dada como inviable en tal situación y negociar la transformación de la tarea en otra que cumpla con las características esperadas en la situación asumida. La otra negociación es una *negociación de la situación*: en esta negociación se acepta la tarea y se negocian las normas de interacción que dan marco a la tarea, posiblemente creando una nueva situación o efectuando una transición ad hoc. Llamamos "negociación" a las maniobras de gestión realizadas por maestro y alumnos, tendentes a restablecer la normalidad en su relación de trabajo. Llamamos "reparo" a los comportamientos mediante los cuales maestro o alumnos denuncian que algo no está de acuerdo con la norma. Y llamamos "ruptura" a las características particulares de una tarea que contravienen una norma de la situación. Muy a menudo, los reparos son los pasos iniciales de una negociación. Los dos tipos de negociaciones descriptos son ejemplos de lo que G. Brousseau llamaría negociaciones del contrato didáctico: el contrato correspondiente a una tarea o el contrato correspondiente a una situación. Nos reservamos el término "contrato" para referirnos al conjunto de normas más generales que vinculan a los estudiantes, el maestro, y los conocimientos en juego, como por ejemplo la norma de que el maestro tiene el derecho de asignar problemas a los estudiantes.

2. Investigando como el sistema de instrucción reacciona a las tareas

En mi trabajo, el interés en una tarea tiene que ver con cómo un maestro gestiona la tarea, buscando explicar los cambios observados en la tarea en términos de las hipótesis formuladas anteriormente: que el maestro debe no solamente hacer trabajar a los alumnos, sino también operar una transacción entre el trabajo de la clase y los conocimientos en juego. En el caso específico de un maestro que acepta asignar a los estudiantes el problema de las bisectrices de un cuadrilátero, nos preguntamos primero cuál es la situación de instrucción que puede proporcionar el contexto inicial para que los estudiantes trabajen en ese problema. En particular, en esa situación de instrucción:

1. ¿Qué tipo de trabajo realiza una clase normalmente? ¿qué aspecto tienen las tareas canónicas?

2. ¿Qué obligación curricular está por lo general en juego en ese trabajo?

Puede haber más de una situación de instrucción que permita al maestro asimilar el problema de las bisectrices. Dada cualquiera de ellas, la predicción es que el problema se dará en la forma de una tarea que se asemeje a las tareas canónicas de tal situación. El trabajo de análisis a priori incluye identificar las variables de tareas y los valores de esas variables que sirvan para describir las adaptaciones del problema que efectuará el maestro.

La asimilación de un problema a una situación de instrucción puede convertirlo en algo totalmente canónico. Sin embargo, es posible asimismo que el problema perturbe esa situación, mediante una tarea que no cumpla con las normas de la situación o mediante una tarea que no produzca plusvalía en términos de conocimientos en juego. Surgen las siguientes preguntas, a propósito del problema de las bisectrices:

3. ¿Cómo pueden, las tareas que podrían desarrollarse a partir del problema de las bisectrices en una situación dada, perturbar la gestión del maestro?

4. ¿Cómo podría la ejecución de esas tareas desafiar la capacidad del maestro para dar por cumplida alguna obligación curricular?

Por último, en el caso de que tales perturbaciones estén presentes, estaríamos interesados en anticipar cómo un maestro y su clase podrían neutralizar la perturbación que las tareas emergentes impongan a la situación de instrucción, es decir,

5. ¿Cómo podría un maestro gestionar la perturbación en el trabajo de la clase creada por las tareas asociadas con el problema de las bisectrices? En particular, ¿se observa al maestro haciendo reparos que den evidencia de que la instrucción ha sido perturbada? ¿Se observa al maestro promover (a) una negociación de la tarea o (b) una negociación de la situación? ¿Cómo ocurre eso?

6. ¿Cómo podría el maestro dar cuenta del tiempo dedicado al problema de las bisectrices? ¿Genera este problema la necesidad de “crear” objetos de aprendizaje para darle algún valor a la experiencia? ¿Es el tiempo pasado en la experiencia dado por perdido?

Nuestro punto de vista teórico predice que tales cambios sucederán. Anticipamos que la decisión de involucrar a los estudiantes en el problema de las bisectrices puede ser viable en virtud de la existencia de una o más situaciones de instrucción dentro de las cuales el problema puede ser presentado. Pero podemos predecir también que esa decisión será seguida por una serie de reparos cuyo objetivo es restablecer el orden. Algunos de los reparos intentarán convertir la tarea en una que se parezca más a las tareas canónicas de la situación que se está reproduciendo, mientras que otros reparos intentarán convertirla en una situación diferente. Finalmente, podemos predecir que el maestro tendrá que dar cuenta del tiempo dedicado, ya sea inventando un objetivo de aprendizaje supuestamente logrado, participando en la tarea, descartando deliberadamente el trabajo como una pérdida de tiempo, o identificando elementos específicos de la labor realizada que puedan ser evaluados como cumplimiento de obligaciones curriculares genuinas. Este es el alcance de la discusión que hacemos a continuación, mostrar que la teoría de las transacciones en instrucción permite identificar a priori algunos fenómenos de la enseñanza.

2.1. El problema de las bisectrices de un cuadrilátero

Para ilustrar cómo funcionan estas ideas en un análisis a priori consideramos el problema

"Sabemos que las bisectrices de un triángulo se encuentran en un punto. ¿Qué pasa con los cuadriláteros?" El problema se ha propuesto como parte de una unidad sobre cuadriláteros, luego de que los estudiantes hubieran estudiado las definiciones y algunos teoremas sobre cuadriláteros especiales. También hemos organizado sesiones con grupos de maestros en los que se les pidió que consideraran cómo usar este problema para enseñar cuadriláteros (véase González y Herbst, 2008) o donde se les ha mostrado representaciones del trabajo de una clase (hechas con dibujos animados) en variaciones de este problema para estimular discusiones sobre el valor que le dan al trabajo en la tarea (véase Aaron, 2011). En lo que sigue, describo en líneas generales el análisis a priori del problema con el que hemos estado analizando los registros de esas experiencias.

2.1.1. ¿Qué situación de instrucción puede dar lugar al problema?

Sostengo que la ambigüedad del problema propuesto hace posible que aquél pueda caber en dos de las situaciones de instrucción que hemos encontrado en las clases de geometría en secundaria (Herbst et al, 2010): el problema puede ser planteado dentro de una *situación de construcción,* así como también dentro de una *situación de exploración.* Describo estas situaciones y sus diferencias a continuación. El maestro tiene la oportunidad de elegir la situación en el momento de decidir cómo presentará el problema a los estudiantes. Este momento implica tomar decisiones sobre la posibilidad de ofrecer otros recursos (representaciones y herramientas) a los alumnos junto con el enunciado del problema. Estas decisiones darán forma al trabajo que los estudiantes puedan hacer en el problema (la tarea): dependiendo de esas decisiones la tarea podrá ser parecida a aquellas que se hacen normalmente en situaciones de construcción o a las tareas que normalmente se hacen en situaciones de exploración.

Las variables de recursos siguientes ayudan a analizar el trabajo del maestro en el momento de la presentación del problema a la clase:

¿Se provee un diagrama? (Variable D: 5 valores)

i. No se provee un diagrama (ND)
ii. Se provee un diagrama de un cuadrilátero, realizando una de cuatro combinaciones posibles que surgen de la consideración de las dos variables independientes que siguen, a saber
    1. El diagrama incluye o no incluye las bisectrices (WAB o WOAB)
    2. Las bisectrices del cuadrilátero provisto mediante el diagrama tienen o no tienen una intersección única (WUI o WOUI, ver Figura 1)

¿Se provee alguna herramienta? (Variable T: 4 valores)

i. Ninguna herramienta provista (NT)

ii. Herramientas de construcción solamente (por ej., compás, regla sin marcas) (CT)
iii. Herramientas de construcción y medición (por ej., regla graduada, transportador) (MT)
iv. Software de Geometría Dinámica (DGS, por ej., GeoGebra)

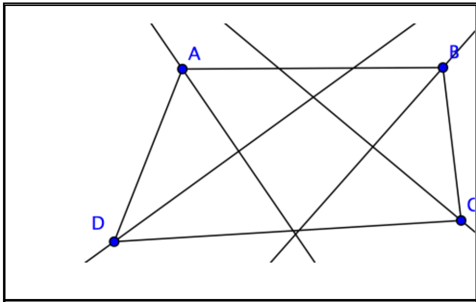

Figura 1a. WAB+WOUI

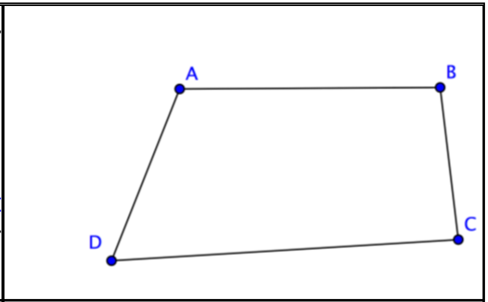

Figura 1b. WOAB+WOUI

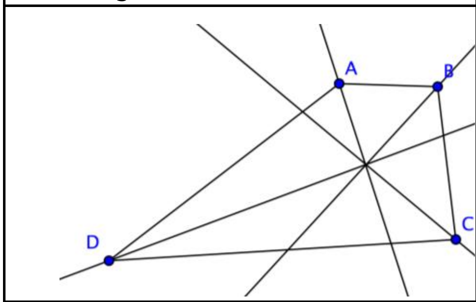

Figura 1c. WAB+WUI

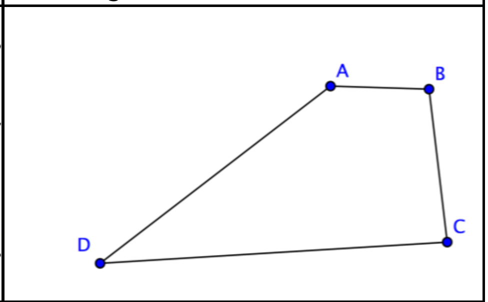

Figura 1d. WOAB+WUI

Figura 1. Ejemplos de cruces de bisectrices

Como señalamos anteriormente, al tomar esas decisiones al presentar el problema, el maestro establece algunos caminos posibles para que el problema se desarrolle a través del tiempo: Estas decisiones dan forma a la tarea. La Tabla 1 muestra cómo cada combinación de estas variables convierte el problema en una tarea cercana a las tareas canónicas de una situación de exploración o de una situación de construcción.[5]

La Tabla 1 muestra la relación entre las decisiones que anticipamos el maestro tomará al momento de presentar el problema a los alumnos y las situaciones de instrucción que pueden ser evocadas para dar marco al trabajo en el problema de las bisectrices. El problema toma así una existencia posible en la forma de una tarea que se asemeja a una de las tareas canónicas de la situación que le da marco.

Por supuesto, la tarea específica que resulte puede variar dependiendo de las decisiones tomadas: distintas combinaciones de diagrama y herramientas pueden evocar la misma situación (por ejemplo, tanto la elección de D3 y T1 como la de D2 y T3 pueden evocar una situación de exploración), pero aún desde el principio se puede anticipar que las tareas serán diferentes. La decisión de proveer un cuadrilátero cuyas bisectrices no sean concurrentes y para el cual sus bisectrices ya hayan sido

[5] El valor "ninguna" en algunas de las casillas de la tabla significa que no existe ninguna situación de instrucción que pudiera contener una tarea basada en el problema de las bisectrices de un cuadrilátero con las asignaciones de Diagrama y Herramientas correspondientes a tal casilla en la tabla.

construidas, y no proveer ninguna herramienta, puede permitir una exploración trivial donde los alumnos miran el diagrama y responden cuántas intersecciones creen que puede haber. Por el contrario, la decisión de proveer un cuadrilátero cuyas bisectrices sean concurrentes y estén construidas y herramientas de medición es más probable que permita una exploración de las propiedades métricas de este tipo de cuadrilátero. La Tabla 1 muestra que, dependiendo de las opciones que el maestro elige al comienzo, la tarea puede parecerse más a *hacer* algo (un diagrama) o a *decir* algo (una declaración sobre una figura).

Tabla 1. *Situaciones de instrucción que pueden contener al problema de las bisectrices.*

Diagrama / Herramienta	*T1: NT*	*T2: CT*	*T3: MT*	*T4: DGS*
D1: ND	Ninguna	Construcción	Construcción	Construcción
D2: WAB + WUI	Ninguna	Ninguna	Exploración	Exploración
D3: WAB + WOUI	Exploración	Ninguna	Exploración	Exploración
D4: WOAB + WUI	Exploración	Construcción	Construcción	Construcción
D5: WOAB + WOUI	Exploración	Construcción	Exploración	Exploración

Obviamente, ninguna de las situaciones que se evocan a partir de las decisiones tomadas a propósito de las variables D y T *obliga* al estudiante a hacer las cosas de una única manera. Esas decisiones no separan totalmente la construcción de diagramas de la construcción de enunciados. Algunas de esas decisiones, por ejemplo D5 y T3, permitirían un poco de construcción como parte de la exploración. Y los estudiantes siempre pueden hacer otras cosas que las que están habilitadas por las elecciones del maestro. Por ejemplo, los estudiantes podrían dejar de lado todos los recursos provistos, dibujar otro cuadrilátero a mano alzada, esbozar sus bisectrices, agregarles valores variables, y deducir que algunos pares de ángulos son suplementarios. No estoy diciendo que estos desarrollos son imposibles o siquiera que el maestro vaya a desalentarlos; estoy diciendo que las decisiones del maestro fomentan que el alumno vea el problema como uno de los problemas de construcción o exploración canónicos en los que o bien los estudiantes tienen que hacer un diagrama con exactitud (construcción), o bien tienen que describir un diagrama verbalmente (exploración). Tal estímulo tiene un costo, es decir, que si bien es posible que los estudiantes hagan otra cosa que lo canónico en esas situaciones, ello es también inesperado (en el sentido de que no le es posible al maestro hacer a los estudiantes responsables de otras operaciones).

De este análisis a priori podemos anticipar que si bien el maestro puede tener expectativas personales sobre la matemática que podría hacerse en respuesta al problema, las demandas del proceso de instrucción pueden llevarlo a presentar el problema junto con recursos (diagramas y herramientas) que den forma inicial a una tarea basada en el problema y perteneciente a una situación de instrucción familiar. Las normas de esta situación pueden hacer aquellas expectativas menos probables.

Las diferencias fundamentales entre la situación de construcción (hacer un diagrama) y la de exploración (decir algo acerca de una figura) pueden describirse en términos del registro de los productos requeridos por las tareas canónicas en cada situación. En una situación de construcción, el trabajo a realizar incluye como característica principal la producción de un diagrama. En una situación de exploración, el trabajo a realizar incluye como característica principal la producción de una declaración acerca de una figura. Se incluyen dentro de las situaciones de exploración lo que a veces se llama “conjeturar”: en estas situaciones de exploración se involucra la inspección visual y se espera que los estudiantes produzcan un enunciado general acerca del concepto abstracto representado mediante el diagrama dado. Las exploraciones también pueden utilizar instrumentos de medición, plegado de papel, etc.

2.1.2. ¿Cómo podría una tarea basada en el problema de las bisectrices perturbar la situación?

Examinemos ahora cómo una tarea basada en el problema de las bisectrices y presentada en una determinada situación podría perturbar las características normales de la situación. Existe la posibilidad de que el problema se presente con el diagrama de un cuadrilátero con sus bisectrices, y con unas herramientas de medición: En tal caso, nuestro análisis predice que el trabajo se enmarcará en una “exploración” que probablemente genere respuestas triviales como “no son concurrentes”. Es probable, sin embargo, que el maestro enmarque el problema en una situación de construcción dándoles a los estudiantes el diagrama de un cuadrilátero cuyas bisectrices no concurrirían pero sin incluirlas en el diagrama e incluyendo herramientas de construcción o medición. En este caso la pregunta “¿qué se puede decir …?” generaría la tarea de construir las bisectrices primero y luego mostrar en el diagrama si las bisectrices se encuentran en un punto o no. Se podría esperar que el maestro asigne esa tarea para involucrar individualmente a los estudiantes y repasar sus conocimientos previos sobre bisectriz, creando como subproducto de esa tarea las cuatro bisectrices que son recursos para una nueva tarea. Se podría esperar que luego de que los estudiantes construyeran las bisectrices, el maestro pasaría el problema a una nueva situación (por ejemplo una situación de exploración) en la que se les pida a los estudiantes que conjeturen propiedades de la figura que acaban de construir. Si éste fuera el plan, se presenta un doble desafío. Por una parte, la necesidad de exactitud en la construcción de la primera tarea (construir las bisectrices), lo que recomendaría que el maestro dedique tiempo a ese trabajo y, por otra parte, la necesidad de que la primera tarea tome un tiempo relativamente corto (pues su valor agregado es solamente en tanto que recurso para la segunda tarea, que el maestro puede valorar en términos de cuáles o cuántos enunciados han sido conjeturados o del ejercicio de la práctica matemática de formular conjeturas). Esto ilustra una manera en que un problema como éste puede perturbar la situación: Para convertirlo en una ocasión de trabajo para los estudiantes, puede requerir la generación de tareas intermedias que incrementen el trabajo de gestión del maestro generando en particular tareas que compiten entre sí por los mismos recursos de tiempo y que presentan tanto oportunidades como dificultades.

Las tareas de construcción en las que no se provee el diagrama son más complejas debido a que dejan a los estudiantes la elección de qué cuadrilátero dibujar para empezar. Hemos utilizado esta tarea en múltiples ocasiones y hemos observado que los estudiantes tienen una serie de comportamientos prototípicos. Estos incluyen (1) la elección de un cuadrilátero especial para el cual las bisectrices se encuentran en un punto (hemos observado a estudiantes hacer esto con casos correctos como cuadrados o rombos, y con casos incorrectos como romboides y paralelogramos, donde comenten el error de asumir que las diagonales son bisectrices). Esos comportamientos incluyen también (2) la elección de un cuadrilátero donde los estudiantes pueden demostrar que las bisectrices de los ángulos no concurren en un punto (hemos observado a estudiantes hacer esto con rectángulos y con trapecios no isósceles.

Considerando el trabajo de toda la clase en cada caso, uno puede esperar una diversidad de diagramas por parte de los estudiantes, produciendo diferentes casos de intersección de bisectrices tal como lo que describimos a continuación. Esta diversidad presenta posibilidades y desafíos al maestro. El desafío principal radica en cómo aumenta la complejidad de la gestión mientras más respuestas se soliciten de los estudiantes: si bien al no dar un diagrama de antemano el maestro puede devolver a los estudiantes la responsabilidad de trabajar en el problema, cuanto más de ese trabajo se haga público, menos claro puede llegar a ser qué es lo que se está produciendo. Esto puede presentar un desafío al maestro: cómo puede el maestro dar cuenta del trabajo realizado en términos de una obligación curricular, si el trabajo de los estudiantes se centra en las particularidades de distintos cuadriláteros especiales.

De acuerdo con lo anterior, enmarcar el problema de las bisectrices en una situación de construcción puede traer dificultades. Consideremos nuevamente el caso en que el problema se presente en una situación de exploración pero esta vez donde el diagrama es dinámico. Por ejemplo, supongamos que los estudiantes reciben un diagrama como el de la Figura 1a, en el que un cuadrilátero es representado junto con sus bisectrices, que no son concurrentes, en la pantalla de una calculadora gráfica. Para evitar la respuesta trivial mencionada más arriba, anticipamos que el maestro sustituirá la pregunta "¿qué puede decirse de las bisectrices de los ángulos ..." por una de las siguientes:

P1 - ¿Qué se puede decir sobre el cuadrilátero formado por las intersecciones de las bisectrices de ángulos consecutivos?

P2 - ¿Con qué cuadrilátero habría que empezar para que las intersecciones de sus bisectrices produzcan una figura interesante?

P3 - ¿Qué debería de ser cierto de un cuadrilátero para que sus bisectrices se encuentren en un punto?

Las tareas lanzadas por P1 y P3 se centrarán en la exploración de declaraciones generales sobre la figura. Idealmente P1 podría estimular el trabajo orientado a afirmar la propiedad de que los ángulos opuestos del cuadrilátero formado por las intersecciones son suplementarios. Alternativamente, P3 podría estimular el trabajo orientado a afirmar la propiedad de que, si los pares de lados opuestos del cuadrilátero dado suman la misma longitud, las bisectrices se encuentran en un punto. El objetivo de la tarea en P1 es describir el cuadrilátero resultante, mientras que el objetivo de la tarea en P3 es describir el cuadrilátero dado. Las operaciones disponibles son similares en las dos tareas: los estudiantes pueden elegir qué vértices arrastrar o qué lados o ángulos medir; pueden inspeccionar el diagrama, pueden dibujar rectas auxiliares, y pueden calcular con las cantidades disponibles. Algunas de esas operaciones son más probables que otras. En particular, debido a que el cuadrilátero dado y (excepto en los casos especiales de romboide, rombo y cuadrado en P3) aquél cuyas bisectrices son concurrentes resultan tan irregulares, anticipamos que no se les ocurrirá a los estudiantes tomar medidas de segmentos o ángulos para comprobar qué propiedades tiene la figura dada. El conocimiento previo de los cuadriláteros especiales (cuáles son y qué propiedades tienen) funcionará como un obstáculo, en el sentido de que los estudiantes reducirán el objeto de la tarea a buscar el *nombre* de una figura como la respuesta a la pregunta en lugar de pensar en definir el cuadrilátero buscado mediante sus *propiedades* (en este caso propiedades de las medidas de sus lados). El problema por lo tanto desafía la situación de exploración en el sentido de que las operaciones habituales que los estudiantes hacen cuando exploran una figura son poco probables de incluir las operaciones que ellos tendrían que hacer con el cuadrilátero dado con el fin de encontrar una afirmación general. Por el contrario, algunas de las operaciones que podrían hacer (arrastrar vértices o medir lados y ángulos) podrían conducirles a hacer afirmaciones demasiado particulares: P1 y P3 podrían convertirse en P2 y, por lo tanto, eludir la producción de las declaraciones generales en juego.

La tarea P2 crea un tipo muy diferente de desafío. Aquí anticipamos que los estudiantes arrastrarán el cuadrilátero dado de tal suerte que se parezca a una figura conocida (en particular, una figura con nombre paralelogramo, trapecio, rectángulo, etc.) y observarán qué figura (qué cuadrilátero) forman las bisectrices. La apariencia que va tomando esta nueva figura a medida que el estudiante arrastra los vértices de la figura dada, provee el feedback que les lleva o bien a arrastrarla aún más o bien a detenerse. Esperamos que los estudiantes encontrarán una serie de correspondencias entre variaciones del cuadrilátero dado (obtenidas mediante arrastre) y las figuras resultantes formadas por las intersecciones de las bisectrices. El desafío de esta tarea es centrarse en las correspondencias que derivan de propiedades conceptualmente importantes. Por ejemplo, los estudiantes pueden arrastrar el cuadrilátero dado para que forme un rombo y observar que las bisectrices son concurrentes pues coinciden con sus diagonales; pero también puede arrastrar el cuadrilátero dado para que forme un "dardo" o "punta de flecha". El desafío de la tarea no es tanto si acaso los estudiantes podrán encontrar algo (que es probable que lo encuentren) sino más bien si lo que los alumnos encuentren dará lugar a la adquisición o el uso de un conocimiento matemático importante. Cabe acotar que la mayoría de los resultados posibles de las exploraciones de los estudiantes en P2 se podría utilizar como recurso para desarrollar una pieza valiosa de matemáticas, pero ello requeriría por parte del maestro una transición clave, pasando de una situación de exploración a una situación de demostración. Sin eso, el trabajo podría convertirse en uno de los que ofrece una multiplicidad de lugares de interés, donde mucho de lo que termina siendo explorado son curiosidades geométricas de poca importancia (por ejemplo, observar que las bisectrices de los ángulos de un trapecio isósceles forman un romboide) y donde esas curiosidades son tantas que el tiempo necesario para completar la exploración se puede extender bastante. Más aún, algunas de esas propiedades dan lugar a pruebas interesantes: Por ejemplo, la propiedad que afirma que el cuadrilátero formado por las bisectrices de un rectángulo es un cuadrado puede ser probada sencillamente por los alumnos usando adición o substracción de segmentos, y así puede dar lugar a una consideración de la práctica matemática de probar un caso que aplica a todos los casos sin pérdida de generalidad. El desafío del maestro es darle valor al tiempo dedicado a formular las conjeturas y cómo utilizar la tarea inicial P2 para obtener una cantidad de conjeturas suficientemente grande como para que incluya algunas cuyas demostraciones puedan ser educativas y, a la vez, dar por finalizada la tarea P2 para iniciar una situación de prueba lo antes posible.

2.1.3. Gestión y valorización a propósito del problema de las bisectrices

Ahora estamos en condiciones de esbozar una anticipación de lo que el maestro puede llegar a hacer para manejar los problemas de gestión y rendición de cuentas. Estos problemas se ven representados en las siguientes preguntas (que fueron formuladas anteriormente):

¿Cómo podría un maestro gestionar la perturbación en el trabajo de la clase creada por las tareas asociadas al problema de las bisectrices?

¿Cómo podría un maestro dar cuenta del tiempo dedicado por la clase al problema de las bisectrices?

Consideramos una vez más las tareas P1, P2 y P3 listadas más arriba. Esperamos que, si se las deja seguir su curso sin vigilancia, cada una de las tareas P1 y P3 puede resultar en que los alumnos den por terminada la tarea afirmando que el cuadrilátero no tiene nada de especial o de lo contrario convirtiéndose en la tarea P2. Anticipamos que para mantener el trabajo centrado en la elaboración de una declaración general, el maestro puede gestionar ese evento ya sea mediante la negociación de la tarea o la situación. En particular,

El maestro puede transformar la tarea en otra en la cual se le dice al estudiante:

P4 - Mida usted esto y aquello, haga tal y tal otra cosa con aquellas medidas. ¿Qué puede concluir?

El maestro puede cambiar la situación, dando lugar a una tarea que se enmarque en una situación de cálculo, por ejemplo:

P5a - Teniendo en cuenta que éstas son las medidas de los ángulos del cuadrilátero original, encuentre una expresión algebraica para la medida de cada uno los ángulos del cuadrilátero formado por las intersecciones (ver Figura 2a), o bien

P5b - Suponiendo que los ángulos del cuadrilátero dado miden lo que indica la figura, cuáles son las medidas de los ángulos del cuadrilátero formado por las bisectrices? (Figura 2b)

El maestro puede también cambiar la situación e introducir una situación de demostración. Por ejemplo, luego de que los alumnos se ocupen de P1, el maestro puede iniciar

P6 - Teniendo en cuenta que éstas son las bisectrices de los ángulos, demostrar que $\angle FEH$ y $\angle FGH$ son suplementarios (incluyendo la figura 2a, pero sin las variables asignadas a los ángulos). (Una tarea análoga podría ser concebida al transformar P3 en un ejercicio de demostración).

En el caso de P2, esperamos que el maestro podrá reparar la tarea y pedirle a los estudiantes que registren todos los resultados obtenidos en una tabla y exploren si pueden generalizar en qué condiciones las bisectrices se encuentran en un punto. Por otra parte, esperamos que el maestro pueda también reparar la situación, convirtiéndola en una situación de demostración, proponiendo, por ejemplo,

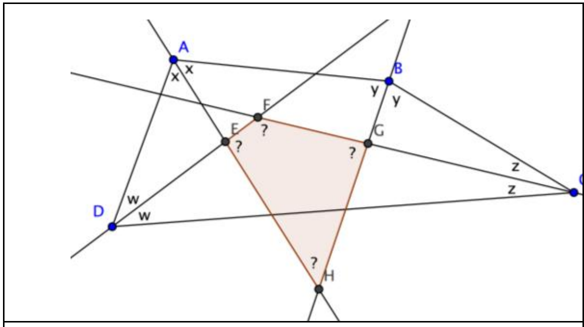

Figura 2a.

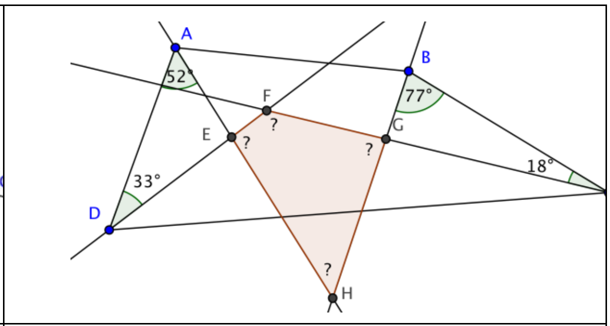

Figura 2b.

Figura 2. Diferentes presentaciones de la tarea

P7 - Dado un paralelogramo y sus bisectrices, demostrar que el cuadrilátero formado por sus bisectrices es un rectángulo.

O bien

P8 - Dado que *ABCD* es un romboide y que $\overrightarrow{BE}$ es la bisectriz de $\angle ABC$. Demostrar: $\overrightarrow{DE}$ es bisectriz de $\angle ADC$ (ver Figura 3).

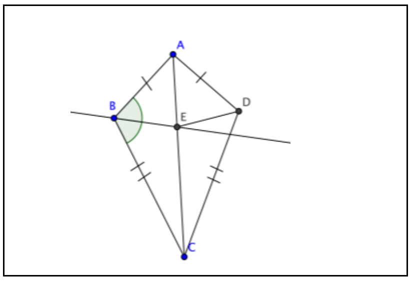

Figura 3. Representación de los datos de P8

Este esbozo del tipo de trabajo que necesita ser gestionado pone de manifiesto que el problema de las bisectrices tiene potencial como herramienta para explorar la enseñanza. Puede ser utilizado para observar cómo las normas de una situación imponen condiciones para la conversión de un problema en una tarea, y para observar cómo el devenir de una tarea provee feedback al maestro que le lleve a iniciar reparos de la tarea o aún de la situación. En particular, el caso del problema de las bisectrices ilustra que para mantener una versión del problema en la palestra es muy probable que el maestro tenga que negociar cambios en la situación. Cada uno de esos cambios le requiere al maestro dar cuenta del tiempo dedicado al trabajo en tareas anteriores. ¿Cómo puede el maestro dar valor al tiempo pasado en el problema de las bisectrices?

Nuestro análisis anterior, si bien anclado en un ejemplo de situación de exploración usando geometría dinámica, podría ser reproducido para otras instrumentaciones posibles. La interpretación del problema de acuerdo con la tarea P2 y continuada con tareas como P7 o P8 se prevé como una forma en que el problema de las bisectrices podría encontrar una existencia estable en una clase de geometría. Este tipo de trabajo podría ser justificado como un repaso de los cuadriláteros especiales y sus propiedades. En la primera tarea, muchos cuadriláteros podrían ser investigados, permitiendo algunos cuadriláteros idiosincráticos como el “dardo” y tolerando la percepción visual como medio de control, pero también contribuyendo al repaso de nombres y propiedades. Esta amplia oportunidad para que los alumnos recuerden lo estudiado puede permitirle al maestro proponer ejercicios de demostración en los que los estudiantes tienen la oportunidad de repasar las definiciones y las propiedades de los cuadriláteros con precisión. Del mismo modo, la interpretación del problema de acuerdo con la tarea P1 y seguido por las tareas P5 o P6 puede ser justificada como una aplicación no trivial de las propiedades de la suma de los ángulos de un cuadrilátero y de un triángulo.

Mientras que el trabajo realizado en torno al problema de las bisectrices podría justificarse como “repaso” o “aplicación” de las propiedades de los cuadriláteros, es evidente que, dado que dicho repaso podría ser alcanzado a través de otras tareas (por ejemplo, una hoja de ejercicios en los que los alumnos completen espacios en blanco con las propiedades), el sostenimiento de una tarea basada en el problema de las bisectrices debería justificarse usando otros aspectos de la labor realizada. Es decir, a menos que la experiencia con el problema pueda considerarse valiosa en virtud de algo más que los contenidos específicos de geometría que los estudiantes deban de aprender, y no sólo como un repaso o aplicación de lo que ya han aprendido sobre cuadriláteros, se podría predecir que esta tarea tendrá pocas oportunidades de supervivencia.

3. Conclusión

Este documento, necesariamente breve, describe el tipo de análisis de tareas que me resulta útil hacer en mi investigación sobre la enseñanza. El análisis gira en torno a diferenciar tres constructos para hablar de cosas que normalmente se denominan “tareas” en la literatura – ellos son el *problema*, la *tarea* y la *situación*. Esa distinción permite asignar un conjunto de fenómenos en la enseñanza: la negociación de cambios en el trabajo matemático (las negociaciones de la tarea) y la negociación de los cambios en el entorno de trabajo que enmarca este trabajo matemático dándole valor (las negociaciones de la situación). La idea de este análisis es que la tarea y la situación son mecanismos complementarios de interacción en el aula. La existencia de una situación puede permitir la viabilidad inicial del problema, inicializar una tarea cercana a las tareas canónicas en esta situación utilizando las ideas de aquel problema. El desarrollo del trabajo en la tarea puede perturbar la enseñanza dando lugar a negociaciones que amplían la gama de acciones aceptables en la tarea y, a la larga, cambiando la situación. Esos dos mecanismos son elementos de un lenguaje de descripción de la interacción en el aula, un lenguaje que puede ayudar a analizar las matemáticas encarnadas en la acción, así como las matemáticas en juego. En la medida que un análisis como éste puede anticipar los acontecimientos del aula, éste puede ayudar a los creadores de materiales de estudio y proporcionar apoyo a los maestros para gestionar la implementación de tales materiales de estudio. Finalmente puede ayudar a los observadores en el aula a ver la enseñanza, particularmente las alteraciones que los maestros hacen de las tareas matemáticas en el aula, con empatía.

Referencias

Aaron, W. (2011). *The position of the student in geometry instruction: a study from three perspectives* (Tesis doctoral inédita). Ann Arbor, EE.UU.: University of Michigan. Disponible en http://hdl.handle.net/2027.42/84625

Berne, E. (1996). *Games people play: The basic handbook of transactional analysis*. Nueva York, NY, EE.UU.: Ballantine.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques 1970-1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Goffman, E. (1997). The neglected situation. En C. Lemert & A. Branaman (Eds.), *The Goffman reader* (pp. 229-233). Malden, MA, EE.UU.: Blackwell.

González, G., & Herbst, P. (2008, March). *Students' geometry toolbox: How do teachers manage students' prior knowledge when teaching with problems?* Documento presentado en el Annual Meeting of AERA, Nueva York, EE.UU.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support or inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 524-549.

Herbst, P. (2006). Teaching geometry with problems: negotiating instructional situations and mathematical tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37,* 313-347.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and 'doing proofs' in high school geometry classes: What is 'it' that is going on for students and how do they make sense of it? *Cognition and Instruction*, *24*, 73-122.

Herbst, P., & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: the case of engaging students in proving. *For the Learning of Mathematics*, *23*(1), 2-14.

Herbst, P., Chen, C., Weiss, M., & González, G., Nachlieli, T., Hamlin, M., & Brach, C. (2009). "Doing proofs" in geometry classrooms. En M. Blanton, D. Stylianou, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning of proof across the grades: a K-16 perspective* (pp. 250-268). Nueva York, NY, EE.UU.: Routledge.

Herbst, P., con González, G., Hsu, H. Y., Chen, C., Weiss, M., & Hamlin, M. (2010). *Instructional situations and students' opportunities to reason in the high school geometry class*. Manuscrito. Deep Blue at the University of Michigan. Disponible en http://hdl.handle.net/2027.42/78372

Lappan, G., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Friel, S. N., & Phillips, E. D. (1998). *Connected mathematics*. Menlo Park, CA, EE.UU.: Dale Seymour Publications.

Mason, J. (1999). The role of labels in promoting learning from experience in teachers and students. En L. Burton (Ed.), *Learning mathematics: from hierarchies to networks* (pp. 187-208). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation Standards for school mathematics*. Reston, VA, EE.UU.: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA, EE.UU.: Author.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: a framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry*, *29,* 315-342.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practise. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stein M. K., Grover B., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33,* 455-488.

Tzur, R., Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (2008). Examining teachers' use of (non-routine) mathematical tasks in classrooms from three complementary perspectives: teacher, teacher educator, researcher. *Proceedings of the 32nd PME and 30th PME-NA Annual Meeting 1*, 121-123.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-making. *Mathematics thinking and learning*, *8*(2), 91–111.

Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (2011). *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. Nueva York, NY, EE.UU.: Springer.

Referencia al autor

Patricio Herbst. School of Education #4119, University of Michigan (EE.UU.).

pgherbst@umich.edu