ANÁLISIS PREVIO DE UNA PROPUESTA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Cintia Ailén Hurani, María Susana Dal Maso
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.
huraniailen@gmail.com, mariasusanadalmaso@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis previo de una propuesta de problemas de lugares geométricos a implementar con alumnos de tercer año de la carrera de Profesorado de Matemática de la facultad de Humanidades y ciencias de la UNL. En la búsqueda de ambientes de aprendizaje que propicien el desarrollo de competencia demostrativa, se analizan procedimientos esperados de los problemas seleccionados. El uso del software GeoGebra permite realizar constantes exploraciones, probar ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. La propuesta consta de tres problemas ordenados, según nuestro análisis, en grado de dificultad creciente.

Introducción

La motivación inicial para comenzar con esta investigación es la necesidad de reconocer las dificultades y errores que manifiestan los estudiantes del profesorado en matemática de la facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral en la resolución de problemas de lugares geométricos. Una de las autoras de este trabajo es alumna avanzada de la carrera de profesorado en matemática y adjudicataria de una beca en investigación. Durante su cursado de la cátedra Taller de Geometría vivencia dificultades tanto a la hora de hallar lugares geométricos como así también al momento de formular conjeturas y validarlas.

El Taller de Geometría es una materia síntesis ubicada en el segundo cuatrimestre del tercer año del profesorado de matemática. Los alumnos que están en condiciones de cursarla son aquellos que han aprobado Geometría Euclídea Plana en el segundo año de la carrera y han cursado Geometría Euclídea Espacial en el primer cuatrimestre del tercer año por lo que se considera que los estudiantes tienen algunas competencias propias del pensamiento geométrico. Para aprobar este taller además de las condiciones exigidas por la cátedra, deberán aprobar la Geometría Euclídea Espacial.

Durante el cursado del Taller de Geometría se tiene acceso a GeoGebra, software libre de geometría dinámica, recurso que se utiliza en el desarrollo de la clase. Este recurso es potente para la obtención del lugar geométrico en la resolución de problemas, pero requiere no solo de conocimientos del software y conocimientos geométricos, sino también de saber combinar dichos conocimientos y aplicarlos de manera conjunta para poder producir los resultados deseados.

A partir de lo expuesto se comenzó a considerar la idea de investigar y analizar el porqué surgen dificultades al trabajar con problemas de lugares geométricos, y de qué manera se pueden mejorar las propuestas de enseñanza a fin de superar errores que surgen desde la actividad demostrativa, la visualización y del uso del software.

Se comienza a pensar en los recursos y estrategias que pueden favorecer las propuestas de enseñanza de modo que promuevan a los estudiantes a analizar y evaluar diferentes alternativas, y que les permitan crear sus propias estrategias de resolución de problemas de lugar geométrico, intentando generar en ellos una verdadera necesidad de validar sus conjeturas no solo como un requerimiento externo para convencer, sino también para convencerse.

Los objetivos planteados en el plan de investigación son: analizar argumentos que se utilizan en la clase para convencer y convencerse; identificar las dificultades y los errores de los estudiantes en la resolución de problemas de lugares geométricos; observar el rol del software en la obtención del lugar geométrico en la resolución de problemas; identificar y analizar argumentos matemáticos en procesos de validación; identificar interacciones, intervenciones, recursos y estrategias que favorecen u obstaculizan los procesos de formulación y validación de conjeturas; analizar demostraciones de lugares geométrico.

Atendiendo a los objetivos planteados y a una de las actividades a desarrollar durante la investigación que es la elaboración de tareas que permitan observar, analizar e identificar errores, dificultades y argumentos utilizados por los estudiantes al momento de formular y validar conjeturas; es que se considera valioso el análisis de una lista de problemas.

Marco teórico

La formulación de conjeturas es una dificultad que puede observarse en alumnos de nivel superior resultando, en ocasiones, compleja la demostración de las mismas.

Con respecto a la formulación de conjeturas y a la validación de las mismas, Samper (2010) destaca que Hoyles y Küchemann (2002), en un estudio longitudinal que involucró a más de dos mil estudiantes de alto rendimiento de escuelas de secundaria en Inglaterra, encontraron que una proporción considerable de estudiantes creía que la condicional dada y su recíproca daban el mismo mensaje.

El concepto de lugar geométrico involucra a la doble implicación dado que todos los puntos que verifican una determinada propiedad describen un determinado lugar geométrico y que, todos los puntos de dicho lugar geométrico verifican esa propiedad.

Según Novembre (2015) las computadoras ayudan a la comprensión ya que la tecnología aporta múltiples representaciones de objetos matemáticos brindando la posibilidad de relacionarlos dinámicamente influyendo en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, y en especial de la geometría, a partir de la posibilidad de visualizar. También destaca que ofrecen la posibilidad de explorar, actividad necesaria para fomentar la actividad demostrativa.

> …en general, resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto, una línea o cualquier otro objeto geométrico cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triángulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración y como consecuencia ofrece la oportunidad al estudiante de analizar y describir tal lugar geométrico en término de propiedades. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. (Santos Trigo, 2011).

La demostración se hace presente cuando las conjeturas o propiedades deben ser demostradas por ser, la demostración en sí misma, un objetivo a lograr con los estudiantes del profesorado en matemática; o cuando surge la necesidad de demostrar para superar contradicciones o incertidumbres. Así la demostración es utilizada no sólo para convencer sino también para convencerse.

Según Lara Quintero- Samper (2015), a la actividad demostrativa se la entiende como la realización de dos procesos no necesariamente independientes. En el primer proceso se establecen conjeturas a partir de las evidencias que provee la exploración de la situación con geométrica dinámica, hecho que favorece al convencimiento de su validez. En el segundo proceso se justifica, se valida la conjetura dentro de un sistema teórico.

Estas, entre otras, son las dificultades que generan un desafío en el docente universitario, con la tarea de diseñar ambientes de aprendizajes para el desarrollo de competencia demostrativa y utilizar un software de geometría dinámica que propicie el proceso de reflexión, “Lo relevante en esta visión es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias y herramientas que le permitan recuperarse de dificultades iniciales y robustecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la resolución de problemas.” (Santos Trigo, 2008).

Desarrollo

Una vez seleccionado el tema de trabajo y luego de determinar qué se desea analizar, se comienza a buscar y examinar problemas que permitan recolectar la información deseada.

Se indagan problemas que se consideran interesantes para trabajar en el taller. Se muestran a continuación una primera lista de problemas probables de lugar geométrico (L.G.) para su utilización.

1) Determinar el L.G. de todos los puntos de un plano que están a una distancia dada a de una circunferencia de centro P y radio r, siendo a < r.
2) Determinar los puntos que equidistan de dos puntos dados A y B, y de los lados de un ángulo dado, perteneciendo todo a un mismo plano.
3) Determinar el L.G. del centro de todas las circunferencias que son tangentes a dos rectas l_1 y l_2 que se cortan.
4) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas.
5) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que pasan por dos puntos dados A y B.
6) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que tienen una cuerda común.
7) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias de radio dado a que cortan ortogonalmente a una circunferencia dada de radio r.
8) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que cortan a una circunferencia dada O, según una cuerda paralela a una dirección dada L.
9) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas de radios r_1 y r_2.
10) Determinar el L.G. de los puntos medios de todas las cuerdas que pasan por un punto P, situado fuera del círculo.
11) En un triángulo ABC antihorario, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud 60°. Al variar el vértice A:

a) determinar el L.G. de los pies de la altura trazada desde B.
b) determinar el L.G. del ortocentro del triángulo ABC.

Se analizan con un software libre de geometría dinámica (GeoGebra) cada uno de los once problemas hallando los lugares geométricos, reflexionando sobre el potencial de cada uno de ellos y considerando procedimientos esperados que podrían surgir en la tarea desarrollada en clase por los estudiantes. Del análisis realizado se efectúa una nueva selección eligiendo el problema 3, el problema 9 y el problema 11.

La propuesta consta de tres problemas ordenados, según nuestro análisis, en grado de dificultad creciente, centrando la atención en la resolución de cada uno de ellos, en los conceptos implicados y en la posibilidad de utilizar el software para resolverlos. Se pretende con estas tareas fomentar también la actividad demostrativa.

Cada tarea se piensa para realizar en grupos de dos integrantes, ya que se considera que el trabajo en pareja es valioso para la formación del estudiante y además permite no perder de vista los argumentos que estos utilizan para convencer y convencerse al momento de validar conjeturas.

Los problemas pensados para trabajar entonces son:

1) Determinar el lugar geométrico del centro de todas las circunferencias que son tangentes a dos rectas l_1 y l_2 que se cortan.

2) En un triángulo ABC antihorario, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud 60°. Al variar el vértice A:

c) determinar el lugar geométrico de los pies de la altura trazada desde B.
d) determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo ABC.

3) Determinar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas.

Considerando que los alumnos ya tienen algunas competencias propias del pensamiento geométrico, la primera tarea se presenta con el fin de que recuerden ciertas propiedades, definiciones, relaciones geométricas y comandos básicos del software.

Se espera en primera instancia que los estudiantes, teniendo acceso a los libros de la cátedra, recuerden aquello que deben tener en cuenta a la hora de enunciar un lugar geométrico y demostrarlo, y en caso de requerirlo puedan revisar las propiedades y definiciones implicadas en cada actividad.

En la búsqueda de la solución del problema puede que surjan cuestionamientos sobre la perpendicularidad o no de las rectas secantes o sobre las condiciones que deben cumplir las circunferencias para ser tangentes a ambas rectas. Puede que se indague sobre la existencia de alguna herramienta del software que permita realizar de modo directo la construcción de las circunferencias tangentes a ambas rectas. El software cuenta con una herramienta que permite realizar rectas tangentes a una circunferencia dada, sin embargo, la misma no da la opción de realizar circunferencias tangentes a dos rectas secantes dadas.

Un procedimiento esperado es que se utilice los conceptos de circunferencia y de bisectriz, en ambos casos definidos como lugar geométrico, y la propiedad de los radios de una circunferencia respecto a las rectas tangentes a dicha circunferencia para establecer una relación que permita reconocer el lugar geométrico en cuestión.

La segunda tarea propuesta se presenta a la mitad de las parejas en su formato original y a las demás con una variante:

En un triángulo ABC, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud 60°. Al variar el vértice A:

a) determinar el lugar geométrico de los pies de la altura trazada desde B.
b) determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo ABC.

Esta idea surge ya que, al analizarlo como posible problema a trabajar con los estudiantes, las autoras se cuestionan acerca de la condición impuesta sobre la construcción antihoraria del triángulo ABC y sobre las consideraciones a tener en cuenta si dicha condición no es usada. Claramente se trata del triángulo ABC de lado fijo BC y su simétrico de eje de simetría la recta que contiene al lado BC donde el sentido antihorario no se verifica, modificando el resultado de la consigna original.

Al considerar el sentido antihorario del triángulo, el lugar geométrico obtenido es una semicircunferencia exceptuando los puntos B y C (¿por qué?). En el segundo caso el lugar geométrico descripto es una circunferencia excluyendo los vértices B y C del triángulo.

A partir del análisis se acuerda presentar a los estudiantes los dos casos a fin de comparar los resultados obtenidos y observar, si tienen en cuenta la condición requerida en el caso del triángulo antihorario y si se cuestionan acerca del sentido en el caso en que no se especifica. Se espera además que se analice que sucede con los vértices B y C del triángulo, ya que al variar el vértice A en tales puntos no hay triángulo.

Se desea además que los estudiantes con ayuda del software construyan una representación de la situación planteada, la exploren y logren hallar el lugar geométrico. Para realizar la construcción los mismos pueden utilizar diferentes procedimientos, siendo uno de los procedimientos esperados la construcción del triángulo ABC utilizando arco capaz.

Si bien se analizan otros procedimientos, el arco capaz es un concepto trabajado en Geometría Euclídea Plana en problemas de construcción de triángulos, y relacionando dicho concepto con otros conceptos como ángulos inscriptos en una circunferencia y el lugar geométrico de Thales, razón por la cual se estima surgirá en la construcción del triángulo buscado.

Otro de los motivos por los cuales se cree interesante esta tarea es porque, una vez realizada la construcción, si bien se puede hallar el lugar geométrico de manera sencilla con la ayuda del software utilizando la opción animación y activar rastro favoreciendo su visualización, su determinación obliga a utilizar argumentos específicos que lo comprueben.

La tercera tarea propuesta, determinar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas, es seleccionada por las implicancias teóricas que se ponen en juego como así también la necesidad de reflexionar sobre diferentes alternativas en relación a las posiciones entre las circunferencias en búsqueda de la solución del problema. No basta solo con la utilización del software para hallar el lugar geométrico, sino que se requiere del conocimiento de argumentos teóricos que iluminarán el proceso de exploración. La herramienta *lugar geométrico* del software Geogebra permite encontrar una curva determinada por un punto que depende de otro punto que se mueve en una figura construida, objeto o deslizador. Es decir se necesita que un punto dependa del movimiento de otro para desplazarse. Si se utiliza rastro, al desplazarse el punto sobre el cual se activa rastro deja una traza que permite visualizar la solución del lugar buscado. También se puede hallar el lugar geométrico desde la barra de entrada de la ventana algebraica del software.

A continuación se relatan algunas consideraciones teóricas, que de ningún modo pretenden ser exhaustivas, que se espera, se tengan en cuenta a la hora de resolver el problema.

Caso 1:

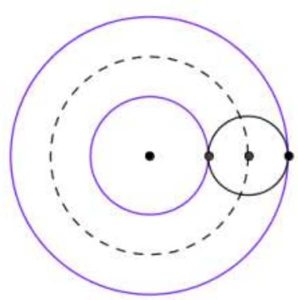
Dadas dos circunferencias de radios r y s concéntricas, con r > s, y una circunferencia tangente a ambas de radio t (con r>t), sea d a la distancia entre el centro de las circunferencias concéntricas y el centro de la circunferencia tangente, si la distancia d comparada con la suma y diferencia de los radios verifican:

- la condición d=s+t, las dos circunferencias de radio s y t son tangentes exteriores.
- la condición d=r-t la circunferencia de radio t es tangente interior a la de mayor radio.

Se espera que los estudiantes puedan utilizar las propiedades de la distancia entre los centros, establecer relaciones y condiciones para realizar una representación del problema, hallar el lugar geométrico y validarlo.

Es probable que con la ayuda del software surja, en este caso, en primera instancia la construcción mientras que las conjeturas y análisis de las propiedades entre los centros llegue después de la construcción con ayuda del software; el cual permite revisar construcciones a partir del protocolo de construcción y verificarlas a través de la acción de arrastre, entre otras.

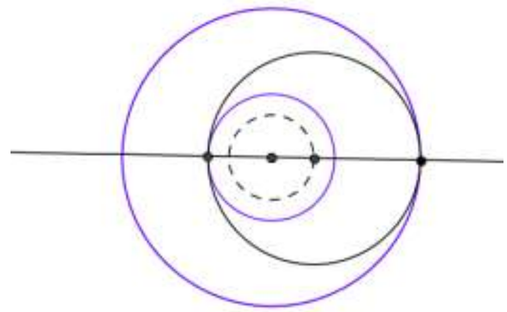
En la siguiente figura se muestra la representación del caso 1.



Se pone en evidencia en la representación que, las circunferencias tangentes, deben ser tangente exterior a una de las circunferencias concéntricas dadas y tangente interior a la otra. El lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio t, tangentes a dos circunferencias concéntricas C y C' de centro O y radios r y s respectivamente, es una circunferencia concéntrica a las anteriores de radio $\frac{r+s}{2}$.

Caso2:

Por otra parte, el otro caso que se espera puedan reconocer los estudiantes, se puede representar con la siguiente construcción:



Esta construcción y un análisis minucioso de las condiciones pedidas conducirá a los estudiantes al hallazgo del siguiente lugar geométrico: El lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias de radio t, tangentes a dos circunferencias concéntricas C y C' de centro O y radios r y s respectivamente, es una circunferencia concéntrica con las anteriores de radio $\frac{r-s}{2}$. Quizás esta solución no sea de inmediata representación mental para el estudiante como sí se cree que lo será el caso 1, y de ahí la relevancia del uso del software para propiciar la exploración y visualización Se debe tener en cuenta como en el caso anterior que no basta solo con la realización de la construcción. Se espera que el estudiante se involucre en la actividad demostrativa.

A modo de cierre

Coincidimos con Santos Trigo (2011) que un software de geometría dinámica puede resultar una herramienta valiosa para las representaciones dinámicas de problemas permitiendo identificar relaciones matemáticas. Los problemas de lugares geométricos son un campo propicio para el planteo de conjeturas. "…Visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas." (Santos trigo, 2011).

A partir de los objetivos planteados que se mencionan en la introducción se buscan problemas, se hallan los lugares geométricos, se reflexiona sobre el potencial de cada uno de ellos y se consideran procedimientos esperados que podrán surgir en la tarea desarrollada en clase por los estudiantes, con la intención de delimitar la propuesta con el fin de graduar las dificultades intentando que su implementación nos brinde la mayor información posible.

Cabe aclarar que durante la implementación de la propuesta se tomarán registros de los escritos de los alumnos realizados con lápiz y papel, de las comprobaciones empíricas y de las demostraciones durante el desarrollo de las actividades, como así también se grabarán las interacciones que se produzcan mediante audio. Las entrevistas individuales pueden ser un medio valioso para recabar información. “Una enseñanza de las matemáticas eficaz utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoyen y extiendan el aprendizaje”(NCTM, 2015, p.54)

También las actividades se desarrollarán con software de geometría dinámica solicitando a los alumnos que al realizarlas escriban un guión plasmando conjeturas, decisiones y los motivos por los cuales validan o descartan las conjeturas consideradas.

Nos propusimos en esta comunicación dar cuenta de una etapa importante en toda investigación que es el análisis previo de las tareas a desarrollar con los estudiantes, y demarcar las razones por las cuales fueron elegidas para tal fin.

Referencias bibliográficas

Lara, L. F. y Samper, C. (2015). Logros y desaciertos cuando se aprende a demostrar. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, 113-132.

Perry Carrasco, P., Camargo Uribe, L., Samper de Caicedo, C. y Rojas Morales, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemática.* Bogotá: Nomos.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* Reston. VA: NCTM.

Novembre, A. (2015). *Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza.* Ciudad autónoma de Bs As: ANSES.

Santos Trigo, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Educación Matemática XII.* España.

Santos Trigo, L. M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 6, 8*, 35-54. Costa Rica

Villar, D. (2006). Geometría 2°. Lugares geométricos-Repartido Práctico. Fecha de consulta: 26-03-2016. URL: http://www.x.edu.uy/LGpractico2006.pdf

LugaresGeométricos. Fecha de consulta: 26-03-2016 http://www.sectormatematica.cl/media/diferenciado/NM3_lugares_geometricos.doc