ANALISIS PRELIMINAR PARA UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CONDICIONAL

Lacués Apud, Eduardo Mario
elacues@ucu.edu.uy;
Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT); Universidad Católica del Uruguay (UCU)
Comunicación breve

Tema: I.7 - Los procesos de Comunicación en el aula de Matemática y su impacto sobre el Aprendizaje del Alumnado.
Modalidad: Comunicación Breve
Nivel educativo: 4. Terciario
Palabras clave: Ingeniería Didáctica, Condicional, Ingreso a la universidad.

Resumen
Las sentencias condicionales juegan un rol central en la argumentación matemática y, por lo tanto, en su enseñanza y su aprendizaje.
En este trabajo se presenta un análisis preliminar para la construcción de una Ingeniería Didáctica, destinada a alumnos ingresantes a la universidad, con la finalidad de enseñar los elementos de Cálculo Proposicional necesarios para la comprensión y el uso competente del conectivo condicional en el marco de actividades matemáticas tales como aplicación de definiciones o teoremas, construcción o análisis de pruebas o refutaciones y resolución de problemas.
El trabajo se organiza en cuatro partes, como se describe a continuación:
1) Introducción, en la que se plantean los antecedentes que marcan la relevancia del tema, por un lado, y por otro, una breve caracterización de la noción de Ingeniería Didáctica
2) Presentación de los resultados registrados en una prueba diagnóstica al ingreso a la universidad en ítems relacionados con este tema, como información para situar el punto de partida de la enseñanza.
3) Análisis epistemológico de la noción de condicional.
4) Conclusiones y perspectivas de continuación de esta Ingeniería Didáctica.

1.1 Introducción

1.1.1 Antecedentes

En los cursos de Matemática, las sentencias condicionales forman parte del discurso cotidiano. Con frecuencia aparecen expresiones como “esto es condición necesaria (suficiente) para aquello”, “la condición tal implica el resultado cual”, “esto ocurre porque aquello pasa”, “esto tiene que ocurrir para que aquello pase”, que son corrientes en el habla del aula de Matemática.

Sin embargo, existen evidencias para pensar que no todos entienden lo mismo cuando se usan esas expresiones. En particular ¿cuál es el valor de verdad que damos profesores y alumnos a las sentencias condicionales?

Lejos de ser retórica, esta pregunta tiene respuestas sorprendentes. Viviane Durand-Guerrier relata una experiencia de clase que la lleva a concluir que "…estudiantes que son buenos en matemáticas pueden razonar basados en nociones incorrectas de la implicación, y algunos profesores, en situaciones no habituales, pueden comportarse como no matemáticos." (Durand-Guerrier, 2003, pág. 7, traducción del autor)

Otro elemento que aporta a esta discusión lo provee Cecilia Crespo, (Crespo, Farfán, Lezama, 2010) al destacar que las formas de argumentación basadas en la Lógica aristotélica no sólo no son las únicas, sino que en el aula aparecen naturalmente otras, que conviven con la primera, y en ocasiones interfieren con las usadas en Matemática.
Situaciones como éstas son las que ponen de manifiesto la necesidad de hacer objeto de enseñanza a la noción de implicación, y en particular, al valor de verdad del condicional.

1.1.2 Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica surgió a mediados de los años ochenta del siglo pasado, como una forma de buscar respuesta a dos cuestiones cruciales: la relación entre la investigación y las intervenciones didácticas realizadas en el marco de las actividades de enseñanza, por una lado, y por otro el rol que juegan estas realizaciones didácticas en las metodologías de investigación, como forma de poner a prueba las construcciones teóricas a partir de las cuales son diseñadas (Artigue, 1995).

Este instrumento vino a proporcionar a los investigadores de una metodología específica sustentada en la concepción de secuencias de enseñanza, su puesta en práctica, su observación, y el análisis del desarrollo y de los resultados de su implementación.
Pueden distinguirse cuatro fases en una Ingeniería Didáctica:
a) Análisis preliminar.
b) Concepción y análisis a priori.
c) Experimentación.
d) Análisis a posteriori y evaluación.
En este sentido puede clasificarse a la Ingeniería Didáctica dentro del estudio de casos, y su validación es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En el análisis preliminar pueden abordarse algunas de las siguientes cuestiones: estudio epistemológico de los contenidos a enseñar, caracterización de las formas tradicionales de enseñanza de esos contenidos y determinación de sus efectos sobre los aprendizajes, observación de las concepciones de los estudiantes a los que se dirige la Ingeniería Didáctica, construcción de un conjunto de condiciones del contexto que se consideren relevantes para el diseño en la medida que significan restricciones u oportunidades a aprovechar.

En la fase de concepción y análisis a priori el investigador toma decisiones acerca de las variables que utilizará en su diseño, a partir de las cuales se describe la secuencia de actividades que constituirán la realización didáctica, y se anticipan los resultados que se esperan.

La experimentación consiste en la puesta en práctica de la intervención didáctica diseñada, y en el registro de los resultados a partir de los instrumentos seleccionados para este fin (producciones de los estudiantes, observaciones de las secuencias de trabajo, entrevistas o encuestas a los participantes, entre otras)

La parte predictiva del análisis a priori es esencial en el proceso de validación de la Ingeniería Didáctica, porque es en contrate con estas previsiones que se realiza el análisis a posteriori, que está basado en los resultados recogidos en la fase de experimentación. El grado de acuerdo entre las previsiones hechas y los resultados constatados marca el grado de éxito del diseño.

Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica al ingreso

Las preguntas que figuran en el Anexo 1 se plantearon en la prueba diagnóstica al ingreso en la Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT) de la Universidad Católica del Uruguay (UCU) en 2013.

La siguiente tabla presenta los porcentajes de respuestas correctas registrados en cada una de ellas.

Ítem	1	2	3	4	5	6
Porcentaje	0,20	0,03	0,59	0,31	0,58	0,28

Tabla 1: Porcentaje de respuestas correctas registrados en los ítems del Anexo I que

integraron la prueba de diagnóstico 2013 en la FIT

Una primera conclusión es que, en general, estos ítems resultaron muy difíciles, dado que ninguno de ellos fue respondido correctamente por más del 60% de los participantes.

En segundo lugar, estos ítems pueden clasificarse claramente en dos grupos, utilizando como criterio el resultado registrado: el que integran las preguntas 1, 2, 4 y 6, por un lado, y por otro, el formado por las preguntas 3 y 5.

Esta observación es relevante por los dos motivos que se van a exponer a continuación. El primer motivo es que en los ítems del primer grupo la opción correcta se obtiene a partir del hecho de que una sentencia condicional es cierta si su antecedente es falso.

En particular, el ítem 2, que es notable por ser el más difícil, está planteado de la siguiente manera:

Se hace la siguiente afirmación sobre los números enteros mayores que 0 y menores que 10:

"Si n es un número impar, entonces n+1 es múltiplo de 3"

Esta afirmación es cierta:

a) Sólo para n=2, n=4, n=5, n=6 y n=8.

b) Sólo para n=5.

c) Sólo para n=2, n=5 y n=8.

d) Sólo para n=1 y n=5.

En este ítem, la opción correcta es la a) y para señalarlo así es necesario reconocer que para 2, 4 ,6 y 8 el antecedente ("n es impar") resulta falso, por lo que la sentencia es cierta en estos casos, además de que para n=5, tanto antecedente como consecuente ("n+1 es múltiplo de 3") son ciertos. La respuesta que registró mayor porcentaje de respuestas fue la c), lo que indica que los valores 2, 4, 6 y 8 no se consideran relevantes en el argumento, porque para ellos es falso el antecedente.

El segundo motivo es que en los ítems donde se registró el mejor resultado, la respuesta correcta puede obtenerse por argumentos que son más próximos a los que se usan en la clase.

En particular, el ítem 5 está formulado como se expone a continuación:

Se dan las siguientes afirmaciones:

Llueve o está frío.

No llueve.

Si no llueve y está frío, nieva.

Si estas afirmaciones son ciertas a la vez, es posible concluir que:

a) Alguien se moja.

b) Está frío.

c) Llueve.

d) Nieva

La respuesta correcta, que es la d), puede obtenerse deductivamente de las premisas mediante, por ejemplo, la siguiente secuencia:

i) Del par "*Llueve o está frío.*" y "*No llueve.*" se obtiene la conclusión parcial "*Está frío*".

ii) Se tiene por lo tanto que "*No llueve y está frío"*

iii) Del par "*No llueve y está frío"* y "*Si no llueve y está frío, nieva.*" se obtiene "*Nieva*"

Más allá de que las reglas de inferencia usadas no se expliciten, habitualmente aparecen en las argumentaciones que se realizan en demostraciones, por lo que son más próximas a la experiencia de los estudiantes que la noción, mucho más técnica, como se verá en la sección siguiente, de que un condicional sólo es falso cuando su antecedente es cierto y su consecuente falso.

Para finalizar esta sección, vale la pena señalar que el restante ítem de este grupo se refiere a una relación causal. El relativo buen desempeño en este ítem puede estar asociado a lo que Crespo señala: "*La concepción de los condicionales en los estudiantes suele ser causal… .*" (Crespo, Farfán, Lezama, 2010, pág. 267).

Análisis epistemológico de la noción de condicional

Las sentencias condicionales están presentes en todas las argumentaciones que se realizan en el aula de Matemáticas, sin que importe el nivel educativo en que éstas se desarrollen.

En Cálculo Proposicional, se define el valor de verdad de la fórmula bien formada (fbf) (A)→(B) poniendo que es falsa si y sólo si la fbf A es cierta y la fbf B es falsa. Los orígenes de la definición del valor de verdad de esta fórmula ((llamada implicación material a partir de Russel) pueden rastrearse a Filon de Megara (Durand-Guerrier, 2003).

Esta definición trae como consecuencia la generación de aparentes paradojas, como que a partir de una premisa falsa puede obtenerse cualquier conclusión, o la de que dadas dos fórmulas, siempre una es implicada por la otra.

Por otro lado, también en esta definición se basa las reglas de inferencia llamada modus ponens y modus tollens; siguiendo a Durand-Guerrier (2008), los filósofos estoicos establecieron estas reglas, respectivamente, de la siguiente manera:
"Si el primero, el segundo: el primero: por lo tanto, el segundo"
"Si el primero, el segundo: no el segundo; por lo tanto, no el primero" (traducción del autor)
Aristóteles, al introducir los silogismos reveló una temprana preocupación por un aspecto no considerado hasta ese momento, que es la necesidad de cuantificar proposiciones.

Sin embargo, no se encuentran avances importantes en ninguna de estas áreas hasta el trabajo de George Boole en el siglo XIX. Su trabajo permitió algebrizar el Cálculo Proposicional, reduciendo el problema de calcular el valor de verdad de una fórmula al de encontrar el valor de una expresión mediante reglas que modernamente se han convertido en los axiomas que definen un Álgebra de Boole (Glaymour, 1997).

Con ser importantísimo, el aporte de Boole no consiguió resolver el problema de manejar variables individuales y sus cuantificaciones. Recién en el siglo XX, con los trabajos de Frege, se pudo abordar este problema con éxito.

Frege no conocía los trabajos de Boole cuando comenzó con su programa consistente en reducir Matemática a Lógica. Por lo tanto, su trabajo fue bastante revolucionario, introduciendo las nociones de variable, de función de símbolos, de predicado de símbolos (o función proposicional) y, finalmente la de cuantificador, creando lo que finalmente se vino a conocer como Cálculo de Predicados.

La definición de implicación material se extiende al Cálculo de Predicados, en el que además aparece la necesidad de considerar fórmulas en las que figuran cuantificadores.
La fbf $(\forall x)((A)\rightarrow(B))$ es cierta en un dominio si y sólo si $(A)\rightarrow(B)$ es cierta para cualquier instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en cualquier dominio.

La fbf $(\exists x)((A)\rightarrow(B))$ es cierta en un dominio si y sólo si $(A)\rightarrow(B)$ es cierta para alguna instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en cualquier dominio.

Estas dos últimas definiciones, que aparentan ser muy sencillas, quedaron establecidas en esta forma recién en el siglo XX, lo que debería llamar la atención acerca de la dificultad que implica su comprensión.

Para cerrar esta sección, es importante destacar que en muchas definiciones o demostraciones matemáticas están presentes de manera, a veces de manera disimulada, instancias de cuantificación. Esto contribuye en gran manera a las dificultades para su aprendizaje. Éste es el centro de la argumentación que Durand-Guerrier (2005) hace en torno a la necesidad de prestar atención desde el punto de vista didáctico a la presentación, en términos de Cálculo de Predicados, de las demostraciones en matemática, y en particular, de los procesos de cuantificación presentes en ellas.

Conclusiones y desarrollos futuros

Este análisis preliminar ha tomado insumos de dos fuentes: los resultados de un diagnóstico inicial a estudiantes que ingresan a carreras de Ingeniería, y un breve análisis epistemológico centrado en la noción del condicional.

Ha quedado muy claro a partir de los resultados del diagnóstico, que la comprensión del valor de verdad del condicional no es el que técnicamente se define en Lógica. En particular, no parece reconocerse que una implicación es cierta cuando el antecedente es falso (lo que equivale a decir que alguna de sus premisas es falsa) Sin embargo, cuando el condicional se mira como representante de una relación causal o aparece disimulado en una secuencia deductiva, resulta más fácil a los estudiantes.

Por otro lado, el análisis epistemológico ha puesto en evidencia que la definición técnica del valor de verdad del condicional ha seguido un largo derrotero y su relación con la Matemática ha sido una de las fuentes en las que se inspiró. Este desarrollo histórico permite conjeturar que parte de las dificultades asociadas a su aprendizaje están asociadas precisamente a las cuestiones matemáticas implicadas.

Una cuestión abierta es la de si la instrucción específica en lógica, a través de cursos como los que integran, por ejemplo, el currículo de carreras en Matemática o en Informática alcanza para superar estas dificultades, o si los aprendizajes conseguidos se manifestarán solamente en el uso técnico de estos conceptos. Esta cuestión se aborda, por ejemplo, por Morou y Kalospyros (2011)

Por otro lado, una continuación natural de este trabajo es la elaboración de las siguientes fases de la Ingeniería Didáctica, sobre todo, en la selección del ámbito en el que se pretende aplicarla, lo que es crucial en el diseño de las actividades. Teniendo en cuenta el rol que juegan en la definición de límite los elementos que se han manejado aquí (presencia de una formulación condicional, que está afectada por cuantificadores que no se explicitan a veces) éste podría ser un ámbito propicio.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995) Ingeniería Didáctica, en Gómez, P. (editor) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, (35-59), Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Crespo, C., Farfán, R., Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (3), 283-306.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics* 53, 5–34.

Durand-Guerrier, V. (2005). Natural deduction in predicate calculus a tool for analysing proof in a didactic perspective, Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4). Recuperado el 28/03/13 de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG4.pdf

Durand-Guerrier, V. & Barrier, T. (2008). Interactions between philosophy and didactic of mathematics. The case of logic, language and reasoning. En Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education. Mexico.

Glymour, C. (1997) *Thinking things throuh: An introducction to philosophical issues and achievements*. Cambrigde, Massachusetts: The MIT Pres.

Morou, A., Kalospyros, N. (2011) The role of logic in teaching, learning and analyzing proof, ponencia presentada en CERME 7, recuperado el 28/03/13 de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Morou&Kalospyros.pdf

Anexo I: Ítems de prueba de diagnóstico usados en este estudio

1) Se afirma que:

"Si existen marcianos, entonces las ranas tienen dientes."

Esta afirmación
a) Es falsa porque las ranas no tienen dientes.
b) Es falsa porque no existen marcianos.
c) Es cierta porque las ranas no tienen dientes.
d) Es cierta porque no existen marcianos.

2) Se hace la siguiente afirmación sobre los números enteros mayores que 0 y menores que 10:

"Si n es un número impar, entonces n+1 es múltiplo de 3"

Esta afirmación es cierta:
a) Sólo para n=2, n=4, n=5, n=6 y n=8.
b) Sólo para n=5.
c) Sólo para n=2, n=5 y n=8.
d) Sólo para n=1 y n=5.

3) Se postula una relación causal entre llover y mojarse diciendo que:

"Si llueve entonces me mojo."

Algunos amigos suyos le hacen comentarios acerca de esta afirmación. Indique cuál de los siguientes comentarios es correcta:
a) La relación es falsa porque alguna vez me he mojado aunque no llueva.
b) La relación es falsa si no me mojo.
c) La relación es falsa si no llueve.
d) La relación es falsa porque alguna vez no me he mojado aunque llueva.

4) Las siguientes afirmaciones son ciertas:

"Nacional es el Campeón Uruguayo 2012"
"La Antártida es un continente helado"

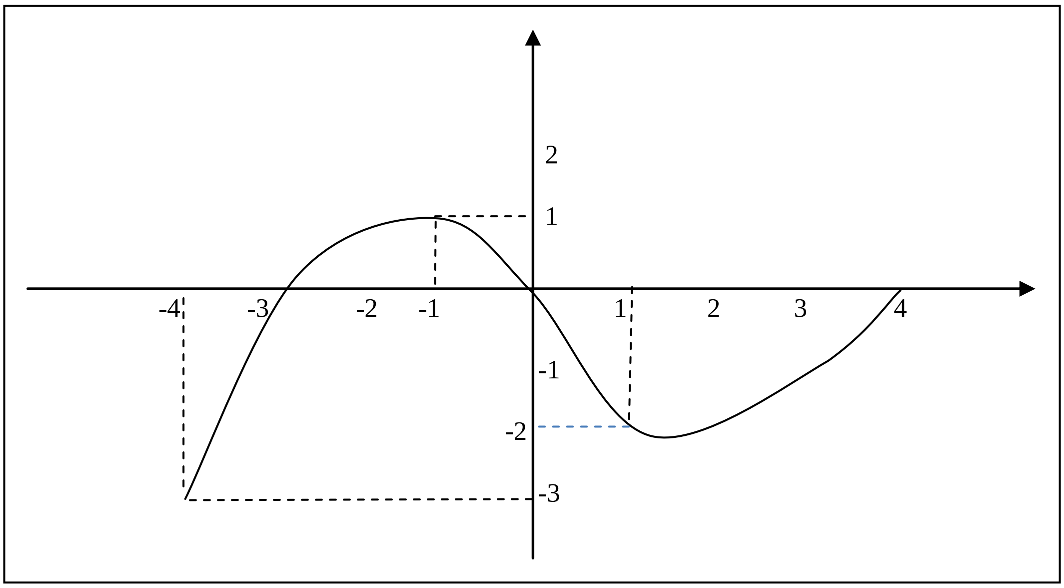
Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
a) Si Nacional no es el Campeón Uruguayo 2012, entonces la Antártida es un continente helado.
b) Si la Antártida es un continente helado, entonces Nacional es el Campeón Uruguayo 2012.
c) Si la Antártida no es un continente helado, entonces Nacional no es el Campeón Uruguayo 2012.
d) Si Nacional es el Campeón Uruguayo 2012, entonces la Antártida no es un continente helado.

5) Se dan las siguientes afirmaciones:

Llueve o está frío.
No llueve.
Si no llueve y está frío, nieva.

Si estas afirmaciones son ciertas a la vez, es posible concluir que:
a) Alguien se moja.
b) Está frío.
c) Llueve.
d) Nieva

6) La siguiente es la gráfica de una función f definida en el intervalo $\{x \,/\, -4 \leq x \leq 4\}$.



Indica cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función f es falsa:

a) Si $0 \leq f(x) \leq 1$, entonces $-4 \leq x \leq 0$.

b) Si $-3 \leq x \leq 0$, entonces $0 \leq f(x) \leq 2$.

c) Si $f(x) > 1$ entonces $x < 0$.

d) Si $1 < x \leq 4$ entonces $f(x) > -2$.