DIDÁTICA DA MATEMÁTICA – UMA INVESTIGAÇÃO GEOMÉTRICA COM MESTRANDOS

José Carlos Pinto Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. Brasil
leivasjc@unifra.br

Resumo

Esta comunicação científica, de cunho qualitativo, teve por objetivo investigar como estudantes de um mestrado profissional de ensino de Matemática no Brasil resolviam um problema concreto usando princípios de Polya; construíam o material didático geoplano ocotododecágono e aplicavam este artefato com o uso de bandas elásticas para resolver outras atividades de geometria plana. Com base nos fundamentos dos Registros de Representação Semiótica de Duval, o investigador verificou que os participantes alcançaram o objetivo de fazer os dois registros: língua natural e figural e a respectiva conversão, fundamentais em Geometria. Além disso, também utilizaram o GeoGebra em representações figurais.

Introdução

Para alguns estudiosos a Geometria não tem recebido estímulos suficientes para despertar nos alunos o gosto por estudar essa área do conhecimento e atribuem o seu abandono, no âmbito educacional, à falta de metodologias alternativas, muito embora é sabido existirem teorias e pesquisas atuais nessa área. Recentemente, Kuzniak (2011) definiu os chamados Espaços de Trabalho Geométrico – ETG, como sendo um ambiente organizado para permitir o trabalho de pessoas resolvendo problemas geométricos. Este conceito foi ampliado para Espaços de Trabalho Matemático – ETM, englobando outras áreas da Matemática, além de Geometria.

Duval (2004) criou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e entende que a atividade geométrica ocorre com base em dois tipos específicos de registros: o da língua natural ou materna e o das figuras. Para ele há grande necessidade de que o estudante realize a conversão de um para outro a fim de que possa, de fato, compreender um conceito.

Polya (2006) afirma que a Resolução de Problemas é uma habilidade prática como é a natação. Diz o autor que, ao tentar resolver um problema, se deve observar e imitar o que outros fazem para, então, resolver por si só os seus próprios, apreendendo esta didática. O autor indica quatro fases importantes: compreender o problema, estabelecer um plano, executá-lo e fazer um restrospecto da resolução.

Piaget e Inhelder (2003) apontam a necessidade de compreender a psicologia da criança no seu desenvolvimento para poder se ter a compreensão de seu crescimento que vai muito além do nascimento: crescimento orgânico e mental até o estado de equilíbrio relativo. Para os autores, ao final do período sensório-motor (entre 1 ano e meio e 2 anos) surge a necessidade de representação: linguagem, imagem mental, gesto simbólico, etc., ou seja, a função semiótica. Denota-se, assim, já no início da formação, a necessidade de representação dos construtos mentais de determinado conceito, ou seja, o que entendemos como visualização, que se faz primordial em Geometria no desenrolar do ensino em todos os níveis.

A partir disso, nossas pesquisas têm se dirigido no sentido de desenvolver habilidades visuais para o ensino de Geometria em diversos níveis de escolaridade e, para tal, utilizar recursos diversos como os materiais manipuláveis: os concretos como o geoplano, na presente pesquisa, ou os de Geometria Dinâmica, com uso de computadores, dentre outros. Assim, nesta busca didática que proporcione melhor ensino para uma melhor aprendizagem em Geometria temos investigado como professores que estão em ação continuada, frequentando um mestrado, podem usufruir dos resultados dessas investigações

D'Amore (2007, p. 97) define: *Didática da Matemática é a disciplina científica e o campo de pesquisa cujo objetivo é o de identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e os processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática*. Por outro lado, ele também define Educação Matemática: *é o sistema social complexo e heterogêneo que inclui teoria, desenvolvimento e prática relativos ao ensino e aprendizagem da Matemática. Inclui a Didática da Matemática como subsistema*.

Com esta compreensão do que é Didática da Matemática e Educação Matemática, esta comunicação tem por objetivo divulgar resultados de uma pesquisa didática realizada com quatorze alunos de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, em uma disciplina de Geometria, ocorrida no ano de 2015, no sul do Brasil, ministrada pelo autor.

A pesquisa e sua natureza

A pesquisa, de cunho qualitativo, teve como objetivo verificar como os participantes construíram um geoplano a partir da resolução de um problema e o utilizaram na resolução de atividades de geometria euclidiana plana. Entendemos a pesquisa qualitativa como um conjunto de práticas interpretativas, que não privilegia nenhuma metodologia única sobre qualquer outra, de acordo com Denzin e Lincoln (1994).

A coleta de dados foi feita por meio dos registros dos participantes que os encaminharem por escrito ou por e-mail ao investigador. Também, foram utilizados os registros do próprio investigador.

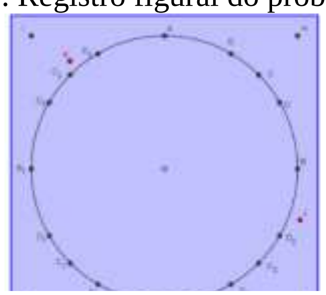
A análise dos dados ocorreu a partir desses dois procedimentos coletados. Levamos em conta que *Semiótica, ou a ciência dos signos, fornece um conjunto de premissas e conceitos que permitam uma análise sistemática dos sistemas simbólicos*. (Manning e Cullum-Swan,1994, p. 463).

Foi fornecido aos estudantes o seguinte problema por meio de um registro natural, em linguagem materna.

Numa região quadriculada 30 x 30 inserir 22 pontos ou pregos. Com o centro no centro do tabuleiro, construir uma circunferência de diâmetro 26 cm. Considere um diâmetro vertical (como se fosse o eixo dos yy) e, na extremidade superior, demarque um ponto A e na inferior A_1; um diâmetro horizontal (como se fosse o eixo dos xx) e, na extremidade a direita, demarque um ponto B e na esquerda B_1. O ponto C corresponde ao ponto médio do arco AB e C_1 seu simétrico em relação ao centro da circunferência. Os pontos E e D correspondem aos terços do arco AB, enquanto E_1 e D_1 os respectivos simétricos em relação à origem. Os pontos F, G, H e I são exteriores à circunferência e correspondem aos vértices de um quadrado circunscrito à mesma e permitem a construção de tangentes cujos pontos de tangencia são A, A_1, B e B_1. Os pontos C_2, D_2, E_2 são os simétricos dos pontos C, D, E em relação ao diâmetro horizontal BB_1 enquanto que os ponto C_3, D_3, E_3 são os simétricos dos pontos C, D, E em relação ao diâmetro vertical AA_1. Os pontos J e K também são exteriores à circunferência e estão situados de tal maneira que permitem a construção de uma secante que não passe pelo centro da circunferência. O ponto J dista 8 cm do ponto G e 2,5 cm de D_2. O ponto K dista 4,5 cm do I e 4,5 cm do D_3.

Eles deveriam apresentar a solução ao professor investigador em uma folha de papel em tamanho real, utilizando o registro figural correspondente (figura 1) juntamente com um registro natural, explicando o procedimento realizado, seguinte os passos da resolução de problemas de Polya (2006) citados antes no artigo.

Figura 1. Registro figural do problema.



Fonte: própria do investigador.

Foi escolhido para a presente comunicação, dentre as nossas análise, o registro natural feito pelo estudante denominado *Hi* (nomeado assim para preservar sua identidade), ou seja, a execução do plano sugerido por Polya (2006).

1. Construí duas retas perpendiculares que se encontram em O (ponto central denominado por ele), sendo a vertical denominada eixo y e a horizontal o eixo x;
2. Tracei uma circunferência C de centro O e raio 13 cm;
3. Marquei os pontos A e B, na intersecção dos eixos y e x com a circunferência C respectivamente;

4. A partir da intersecção de duas circunferências, uma de centro A e outra em B, construí o ponto H e, da intersecção do segmento OH com a circunferência C, construí o ponto C pertencente à circunferência, que é o ponto médio do arco AB;

Professor: observamos nesta etapa da execução do plano determinado pelo aluno *Hi* que o mesmo não definiu o raio com o qual traçou as duas circunferências. Este raio deveria ser, visualmente, maior do que a metade da distância de A até B.

5. Da mesma forma, com circunferências de centro A e em C, construí o ponto E; e com circunferências de centro C e B, construí o ponto D;
Professor: novamente, o aluno *Hi* não define o raio com o qual traçou a circunferência.
6. Para construir os lados do quadrado circunscrito à circunferência C: passando por A e H, por H e B, tracei as duas tangentes à circunferência C em A e em B, respectivamente. Pela perpendicular a y, oposto a A, marquei A_1, pertencente à circunferência C, e construí a tangente em A_1 passando por G. Analogamente, por B_1, passando por I e F tracei a quarta e última tangente, para construir o quadrado FGHI, circunscrito à circunferência C.
7. A partir da perpendicular ao eixo x, passando por D, tracei o ponto D_2, simétrico de D;
8. A partir da perpendicular ao eixo y, passando por D, tracei o ponto D_1, simétrico a D;

Professor: nesse momento da execução do plano observamos a importância do conteúdo matemático empregado num ETG, pois nem sempre os alunos compreendem conceitos de simetria e o empregaram corretamente.

9. Da intersecção de duas circunferências, uma de centro em G e raio 8cm e outra de centro em D_2 e raio 2,5cm, construí o ponto J;
10. Para construir o ponto K, tracei duas circunferências de raio 4,5cm, sendo uma de centro em D_3 e outra de centro em I.

Professor: *Hi* não descreve, em nenhum momento, o abandono de um dos pontos quando realiza a intersecção de duas circunferências. Acreditamos que, visualmente, ele percebeu a impossibilidade de uso do segundo ponto em cada caso. Neste último o ponto se encontra na linha divisória da madeira o que impediria de cravar o prego naquele lugar. No caso de J, ele revisou o retrospecto de sua construção e verificou que o ponto não pode ser interno à C, por interpretação do enunciado do problema, o que corrobora o quarto ponto indicado por Polya.

11. Passando por J e K, tracei uma secante à circunferência C e percebi que esta não passava pelo centro, como exigia o problema.

Nestes onze passos executados o estudante descreveu o procedimento realizado, entretanto não o fez para os demais pontos, apenas utilizou o registro figural. Entendemos que ele percebeu certo procedimento repetitivo e, por isso, já foi direto ao segundo tipo de registro, pois já elaborou seu construto mental da resolução do problema.

A partir da resolução do problema, por parte dos alunos, foi feita a correção pelo professor investigador e foram orientados a construírem o modelo figural em madeira, no tamanho original e a nomeação uniformizada como na figura 1 a fim de orientar a formulação de atividades. Foram fornecidos, pregos, borrachas coloridas e uma folha com modelos para os registros figurais das atividades. Tais registros poderiam também serem feitos utilizando um software de Geometria Dinâmica. A figura 2 ilustra o artefato com pregos, obtido pelo aluno denotado por *Le*.

Figura 2. Geoplano de madeira com pregos.

Fonte: aluno *Le*

No que segue, descreveremos algumas atividades realizadas no artefato geoplano octododecágono.

Atividade 1

a) Construir no seu geoplano uma corda passando pelo centro da circunferência.
b) Definir corda de uma circunferência.
c) No que a corda construída no item a) tem a ver com sua definição?
d) Defina diâmetro de uma circunferência a partir da definição de corda.

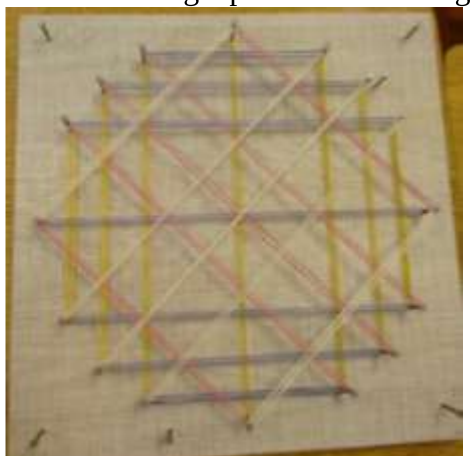
Objetivo. Verificar se os estudantes sabiam definir corda em linguagem natural e realizar a conversão para a figural. Relacionar o diâmetro como sendo a maior corda.

Escolhemos para expor aqui a conversão do registro natural para o figural realizado pelo aluno *Le*.

Le: A figura mostra todas as cordas possíveis no Geoplano que é um número limitado, o que não ocorre no papel, onde as possibilidades são infinitas.

Professor: o aluno distinguiu o discreto, empregado na representação com as bandas elásticas, da representação figural, realizada em desenho no papel, em que utilizaria o contínuo de pontos no plano.

Figura 3. Cordas no geoplano octododecágono.



Fonte: representação do aluno *Le* e no seu geoplano.

O estudante, embora não tenha definido em linguagem natural o que seja corda, respondeu:
Le: Ainda pode ser observada a relação da corda com o diâmetro, de onde se pode concluir que o diâmetro é a maior corda de uma circunferência e as demais cordas são paralelas ao diâmetro, o que não ocorre no papel.

Professor: observa-se os aspectos visuais detectados pelo estudante em sua representação concreta com os atilhos, em que apresenta as cordas paralelas em uma mesma cor, verificando que seus comprimentos são variados e que o valor máximo corresponde àquela corda que passa pelo centro da circunferência, ou seja, seu diâmetro.

Atividade 2

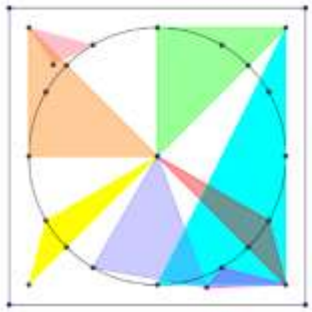
a) Construir no seu geoplano triângulos com um vértice na circunferência e os outros dois não.
b) Repetir para triângulos com dois vértices na circunferência e o terceiro não.
c) Agora, construir triângulos com os três vértices na circunferência.
d) Organize um quadro no seu caderno com as notações simbólicas de sua construção e classifique cada um dos triângulos construídos a partir das medidas de seus lados e de seus ângulos.

Apresentamos e analisamos aqui a construção da aluna que denominamos de *Li*. A escolha desta aluna ocorreu pelo fato de ela ter feito as suas construções no geoplano, utilizando os recursos concretos ali existentes e, posteriormente, ela passou ao registro figural utilizando o GeoGebra, em vez de o fazer nas representações em papel fornecidas.

a) Abaixo, algumas possibilidades de representação que os alunos poderão apresentar no geoplano (figura 4).

Professor: a aluno, ao fazer sua representação no GeoGebra, utilizou o que o *defaul* indica, sem utilizar modificações que poderiam ser feitas em 'propriedades', como 'transparência' e assim deixar representado apenas o polígono, como uma linha e não como região. Acreditamos que o fato de deixar a região colorida, em vez de apenas a linha, estimula a visualização dos estudantes.

Figura 4. Triângulos com um único vértice na circunferência.

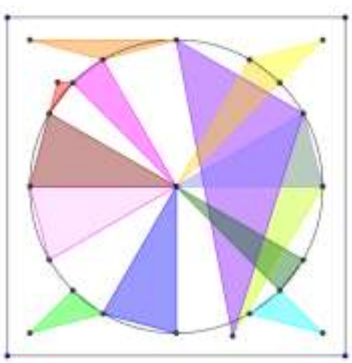


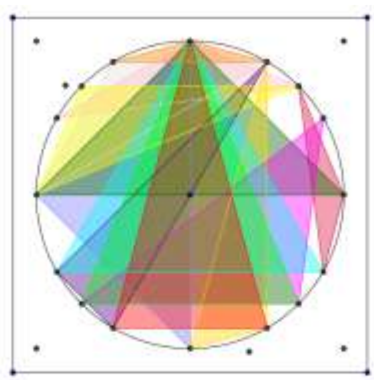
Fonte: aluna *Li*.

A estudante descreveu o procedimento realizado da seguinte forma: nessa atividade é possível construir todos os tipos de triângulos seguindo a orientação de deixar apenas um vértice do triângulo na circunferência. Se o aluno utilizar o geoplano manipulável, poderá utilizar uma régua e um transferidor para verificar as medidas dos lados e dos ângulos. Se ele preferir utilizar o geoplano no GeoGebra, basta clicar nas ferramentas que o software dispõe para verificar essas medidas.

b) Novamente, ela apresenta seu registro figural (figura 5) feito utilizando as ferramentas do GeoGebra, após tê-las feito utilizando os atilhos coloridos.

Figura 5. Triângulos com dois vértices na circunferência.
Figura 6. Triângulos com trêsvértices na circunferência.





Fonte: aluna *Li*.

c) Para o terceiro item da atividade, triângulos com os três vértices na circunferência, *Li* fez o registro figural constante da figura 6 e, assim, se expressou em linguagem natural a respeito desse registro.

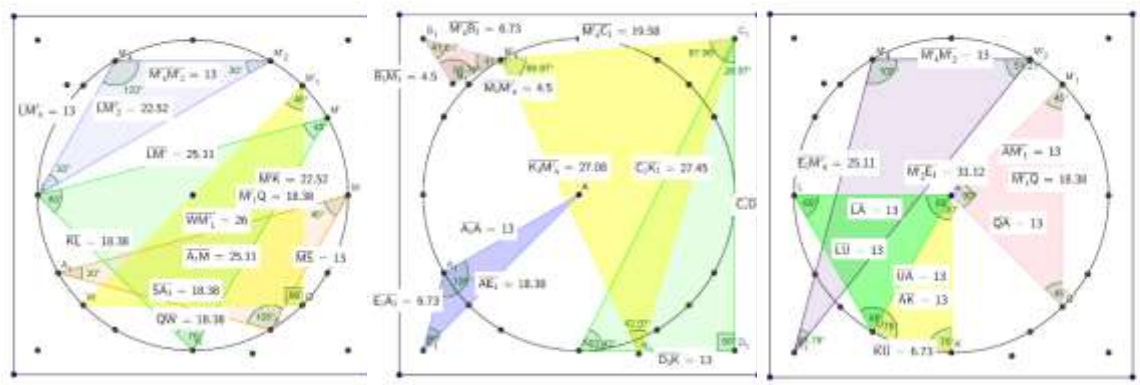
Li: De maneira análoga, nessa atividade os alunos poderão construir uma imensa quantidade de triângulos e verificarão todos os tipos representados no geoplano.

É muito importante que o professor solicite aos alunos que anotem suas descobertas e, também, as medidas dos lados e dos ângulos de cada triângulo antes de passar para cada novo item pois, devido à grande quantidade de construções, se os alunos não registrarem suas percepções, poderão, facilmente, se perder em meio à tanta informação.

d) Para finalizar esta atividade, a aluna apresenta três registros figurais (figura 7) a partir da movimentação inicial em sua construção. Indica que:

Li: se eles utilizarem o geoplano manipulável, será necessário que o professor distribua uma folha quadriculada para que representem na malha suas construções e meçam os lados e os ângulos (quadro 1).

Figura 7. Medição de ângulos e lados de triângulos



Fonte: aluna *Li*.

Fornecemos aos estudantes um quadro no qual fossem feitos os registros numéricos de cada construção e, posteriormente, a classificação dos triângulos (quadro 1).

	Um vértice na circunferência e dois fora	**Dois vértices na circunferência e um fora**	**Três vértices na circunferência**
Retângulo	3	2	4
Equilátero	2	3	4
Isósceles	4	2	6
Escaleno	5	4	2
Acutângulo	2	5	3

Quadro 1. Registros feitos pela estudante *Li*.

Foram contados quantos triângulos de cada tipo constavam do registro figural, seguindo as orientações propostas em cada atividade. Uma das possibilidades de representação consta do quadro 1, em que diversos tipos de triângulos são indicados. Foram vivenciadas as descobertas, medição de cada lado e cada ângulo, pesquisado sobre os tipos de triângulos, discutido com os colegas, trocado experiências, confirmadas algumas hipóteses e verificado que outras não estavam corretas.

Afirma a aluna *Li* que acredita ser essa atividade muito rica, pois permite ao aluno uma aprendizagem participativa, ativa e dinâmica, o que pode tornar as aulas mais atraentes e interessantes.

Li: A proposta de atividade é ótima para que os alunos conheçam os tipos de triângulos e para que aprendam a utilizar régua, transferidor ou, ainda, um software de Geometria Dinâmica. Aprender construindo e discutindo com o grupo é muito mais enriquecedor do que copiar do quadro ou ler em um livro algo pronto e estático.

A limitação do texto não permite que apresentemos a análise de outros participantes da investigação de sala de aula.

Tecendo considerações finais

Apresentamos, no presente artigo, um recorte de uma pesquisa realizada com estudantes de um mestrado em que foi averiguado como eles construíram um ETG, resolvendo um problema concreto e confeccionando o artefato geoplano ocotododecágono. Nele foram investigadas quatorze atividades das quais analisamos apenas duas no presente trabalho. A partir disso foram explorados os registros realizados concretamente no próprio geoplano, os registros figurais em fotos, no papel com lápis, régua e compasso e nas ferramentas tecnológicas disponíveis no GeoGebra.

Concluímos, com a análise avaliativa das atividades, realizada pela aluna

Pa: sobre a proposta do problema, é interessante sua resolução utilizando mais de um tipo de material, como por exemplo, no caderno, com material concreto ou em um software.

Por sua vez, o professor investigador havia solicitado aos estudantes, todos professores, como poderiam conectar o aprendizado com sua prática profissional, ao que a mesma aluna elaborou uma proposta a ser desenvolvida no Ensino Médio, para o ensino de trigonometria. Nessa proposta a estudante sugeriu o envolvimento no geoplano octododecágono por uma circunferência e buscou a relação entre o comprimento da mesma e seu raio a partir da medição com uma fita métrica. Em seguida, definiu os eixos dos senos e dos cossenos e os ângulos correspondentes aos quatro quadrantes, sempre com representações icônicas por meio de elásticos coloridos e registros figurais em papel e lápis.

Entendemos que o objetivo da investigação foi alcançado uma vez que todos os estudantes conseguiram realizar convincentemente as atividades, fazer os registros no geoplano com as borrachas coloridas e, finalmente, os registros figurais em papel ou utilizando o GeoGebra.

Referências bibliográficas

D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria Editora da Física.

Denzin, N. K, Lincoln, Y.S. (1994). *Handbook of Qualitative Research*. London: SAGE Publications, Inc.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.Pi

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* v. 16, p. 9-24. IREM de STRASBOURG.

Manning, P.K.; Cullum-Swan, B. (1994). Narrative, Content, and Semiotic Analysis. In: Denzin, N. K, Lincoln, Y.S. (1994). *Handbook of Qualitative Research*. London: SAGE Publications, Inc., pp.463-478.

Piager, J., Inhelder, B. (2003). Trad. Octávio Mendes Cajado. *A psicología da criança.* Rio de Janeiro, 2003.

Polya, G. (2006). Trad. Heitor Lisboa de Araújo. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.