ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA A TRAVÉS DE LOS BLOQUES DE DIENES

Thais Arreaza – Edilmo Carvajal
tarreaza@gmail.com – qedcarvajal@gmail.com
Instituto Pedagógico de Caracas – Venezuela

Tema: materiales y recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje en matemática
Modalidad: MC
Nivel educativo: Medio
Palabras Claves: Bloques de Dienes, recurso didáctico, aritmética, álgebra

Resumen

Los bloques de Dienes son un recurso didáctico que permiten abordar diferentes contenidos matemáticos y que consisten de varios cuadrados y rectángulos con ciertas dimensiones. Son fáciles de elaborar y manipular utilizando diversos materiales. Es un recurso de bajo costo. Entre los contenidos que podemos trabajar con este material tenemos: Los conjuntos numéricos: ***N, Z y Q*** *y sus operaciones; expresiones algebraicas; suma, resta y multiplicación de polinomios; productos notable; factorización de polinomios; división de polinomios; ecuaciones de primer grado; cálculo de la raíz cuadrada con ecuaciones de primer grado y ecuaciones de segundo grado; áreas de figuras geométricas y algunas nociones de teoría de números.*

Este mini curso constará de dos partes: en la primera, los facilitadores mostrarán la utilización de los bloques para la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos numéricos, polinomios y sus operaciones. En la segunda, los participantes realizarán actividades que les permitan visualizar e ir conformando nociones contempladas en la teoría de números.

Desarrollo

La matemática se encuentra presente en todas las culturas, la mayoría de las profesiones, trabajos técnicos y científicos necesitan del conocimiento matemático, pero a pesar de ello distintas investigaciones han demostrado que nuestros estudiantes, en todos los niveles del sistema educativo presentan bajo rendimiento en la asignatura y poco dominio de conceptos y procedimientos asociados al aprendizaje de la matemática. Uno de los temas que preocupan en la didáctica de la matemática es el de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Pasar del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico tiene su grado de dificultad ya que implica que el estudiante cambie su modo de pensar. Según Vernaud, Cortes y Favre, citado por Escorche y Pernalette (2012):

> El Álgebra representa una doble ruptura epistemológica: por una parte, la introducción de un desarrollo formal en el tratamiento de problemas habitualmente tratados intuitivamente, por otra parte la introducción de objetos matemáticos nuevos como ecuación e incógnita, función y variable, monomio y polinomio. (p.42)

Esta ruptura señalada, hace que los estudiantes cometan errores cuando quieren pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico, al interpretar expresiones algebraicas y al plantear soluciones utilizando dichas expresiones. Pero además de este problema de tipo epistemológico existe un problema de tipo didáctico, y se genera cuando la enseñanza se basa en la mera transmisión de conocimientos por parte del docente, en la memorización excesiva de reglas y procedimientos y, la mecanización del trabajo algebraico. Debemos fomentar una enseñanza donde el estudiante descubra y construya su aprendizaje, reflexione y analice cualquier situación problemática, partiendo si es posible de elementos concretos que permitan visualizar propiedades y conceptos, para luego pasar a su representación formal o abstracta.

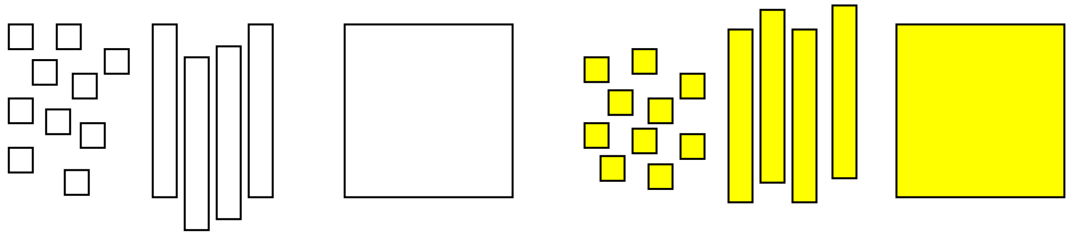
Por otra parte, podemos utilizar la geometría como un intermediario entre el lenguaje natural y el formalismo matemático, ya que las representaciones geométricas nos ayudan a visualizar con mayor facilidad cualquier propiedad, representación simbólica y conceptos que nos ofrezca el álgebra. Según Goñi (1996):

> Parece que existe un cierto consenso a la idea de que el conocimiento es producto de una continua, paulatina y progresiva construcción. De donde suele deducirse otra idea que se postula por medio del siguiente enunciado: la actividad del alumno es la parte sustancial del proceso constructivo o, dicho de otra manera, el constructor es el alumno y la actividad es el medio que permite la construcción. Mantener pues al estudiante en continua «actividad» resulta uno de los retos didácticos más acuciantes.

En la búsqueda de opciones para mejorar la enseñanza de la matemática, usamos materiales manipulativos y algunos recursos didácticos que permitan al estudiante, mediante actividades, construir su propio aprendizaje. Uno de estos materiales son los Bloques de Dienes, con ellos podemos abordar diferentes contenidos matemáticos y son fáciles de elaborar, obtener y manipular.

Entre los contenidos que podemos trabajar con este material podemos señalar: el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros y el conjunto de las fracciones; expresiones algebraicas; suma, resta y multiplicación de polinomios; productos notables; factorización de polinomios; división de polinomios; ecuaciones de primer grado; cálculo de la raíz cuadrada con ecuaciones de primer grado y ecuaciones de segundo grado; áreas de figuras geométricas y algunas nociones de la teoría de números.

Los Bloques de Dienes consisten de varios cuadrados grandes y pequeños y de rectángulos de ciertas dimensiones:



Para la elaboración de estos bloques debemos tomar en cuenta que el lado del cuadrado pequeño es uno de los lados del rectángulo y el otro lado de éste es el lado del cuadrado más grande. Cuando trabajamos con los sistemas numéricos los cuadraditos representan las unidades, los rectángulos las decenas y los cuadrados grandes las centenas. En el trabajo con números enteros los bloques se elaboran en dos colores, uno representa las cantidades positivas y el otro las cantidades negativas. En la parte algebraica un cuadradito representa la unidad, el rectángulo la x, y el cuadrado grande x^2.

Los docentes lo pueden elaborar de láminas de acrílico si es para utilizarlo en un retroproyector, con cartón, cartulina, foami y trozos de tiras imantadas si se va a utilizar en una pizarra magnética o, lijas para usar con cartelera de fieltro o franela. Los estudiantes pueden elaborarlo con cartulina, cartón, foami, madera, plástico u otro tipo de materiales reciclables, como cajas.

Para los estudiantes una clase donde el docente haga uso de materiales manipulativos es mas atractiva que una clase donde el alumno toma una actitud pasiva, porque el docente es el que habla y explica. Como sucede con la mayoría de los materiales didácticos, estos no tienen vida propia, fuera de la utilidad que el docente le pueda dar. Los Bloques de Dienes son un recurso que facilita la creación de un ambiente agradable y permite que el estudiante se sienta motivado hacia la actividad de aprender y conocer, además desarrollan la parte instuitiva y sirven de apoyo para la formalización de un concepto, sin necesidad de contar en su totalidad con la memoria.

Al trabajar con los Bloques de Dienes se deben considerar algunas sugerencias como:

- La planificación de las actividades con un fin educativo es necesaria. Es decir, se debe concretar los objetivos didácticos, los contenidos y, las actividades de enseñanza y aprendizaje que se van a plantear en el aula, para no caer en improvisaciones.
- El docente debe actuar como mediador en el proceso educativo y promover a los estudiantes a que construyan su propio aprendizaje.
- El estudiante debe construir los conocimientos o significados de los objetos matemáticos, partiendo de la naturalidad que les brindan los materiales concretos, para luego pasar al formalismo matemático. Es necesario, la utilización del lenguaje y la simbología matemática.
- Incentivar el trabajo en grupo, donde los estudiantes puedan aprender de sus compañeros y corregir entre ellos sus errores. (Mancera,1998).

Conjunto de los números naturales (N)

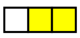
Cuando realizamos operaciones aritméticas en el conjunto de los números naturales, debemos tener presente el significado de cada una de ellas. En el caso de la adición, sumar significa agregar , añadir, unir, incremetar; en la sustracción, restar es sinónimo de quitar, disminuir, sustraer; la multiplicación representa sumas sucesivas de una misma cantidad y en términos geométricos se puede relacionar con el área de rectángulos, donde los factores representan la base y la altura de dichos rectángulos; y finalmente, la división significa repartir, distribuir una determinada cantidad en partes iguales, o formar grupos de un mismo tamaño.

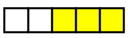
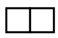
Las actividades correspondientes a este tema se encuentran en el anexo A

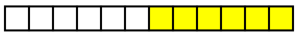
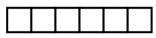
Conjunto de los números enteros (Z)

Para trabajar en este conjunto utilizaremos los cuadraditos de colores, los blancos van a representar los enteros negativos y los de otro color los enteros positivos. Para poder realizar algunas de las operaciones en este conjunto debemos tener bien claro lo que significa el cero (elemento neutro en la adición), ya que en algunos casos debemos utilizar una representación conveniente del elemento neutro para poder resolver algunos ejercicios. Entre las representaciones del cero podemos señalar:

Su mayor utilidad podemos obsevarla en la sustracción con números enteros, por ejemplo, si se quiere restar (+1)-(+3), tomamos la siguiente representación del +1:

 Esta representación no es adecuada ya que no es posible quitarle +3

 En esta representación si es posible extraer +3 y quedaría  , que es una representación del número -2.

En el caso de la multiplicación, si el primer factor es positivo se procede igual que en los números naturales. Si el primer factor es negativo, se utiliza una representación conveniente de el cero. Por ejemplo, al multiplicar (-2)×(+3), el -2 indica quitar dos veces (+3), para ello tomamos una representación del cero que permita extraer esa cantidad:  de aquí retiramos dos veces + 3 y resulta: 

Que corresponde a una representación de -6.

De manera análoga cuando se multiplica (-2)×(-3), se extrae dos veces (-3) y el resultado es +6.

La división de enteros con los Bloques de Dienes se trabaja teniendo en cuenta que la división es la operación inversa de la multiplicación. Es decir, podemos interpretarla como el número de veces (cociente) que se debe tomar un número (divisor) para obtener otro número (dividendo).

Las actividades correspondientes a este tema se encuentran en el anexo A

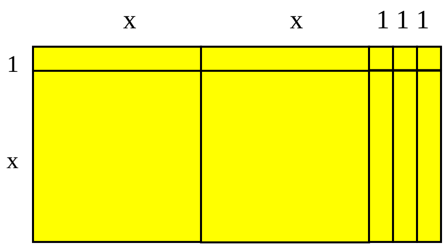
Polinomios

Con los Bloques de Dienes solo podemos trabajar polinomios hasta el grado 2. Para representar el polinomio $a\mathrm{x}^2+b\mathrm{x}+c$, recordemos que c representa c cuadrados pequeños: , bx representa b rectángulos de dimensiones 1 por x:  y $a\mathrm{x}^2$ representa a cuadrados grandes.

Las operaciones de adición y sustracción se trabajan de igual manera que en el caso de los números naturales y enteros teniendo en cuenta que debemos manipular objetos del mismo tipo, es decir, cuadrados pequeños con cuadrados pequeños, rectángulos con rectángulos y cuadrados grandes con cuadrados grandes.

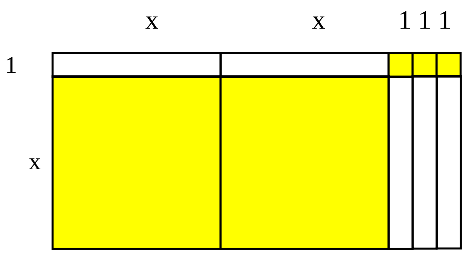
En la multiplicación de un número entero por un polinomio de grado 1, añadimos el polinomio tantas veces como lo indique el número entero. En el producto de dos polinomios de primer grado la operación se interpreta como el área de rectángulos cuyas dimensiones corresponden a los factores que intervienen en la multiplicación dada. Resolvamos un producto donde uno de los factores es un entero negativo, por ejemplo, (-2)×(2x–1), se añade dos veces 2x–1 y se obtiene 4x-2, pero como la constante es negativa se busca su simétrico y el resultado es -4x+2.

Multipliquemos dos polinomios de primer grado, por ejemplo, (2x+3).(x+1):



Se puede observar que el resultado es $2\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+3$.

Consideremos ahora (-2x+3).(x-1), como el coeficiente de una de las variables x es negativo se trabaja con el simétrico de ese factor, es decir, -(2x-3).(x-1). Se realiza la multiplicación sin tomar en cuenta el signo(-):



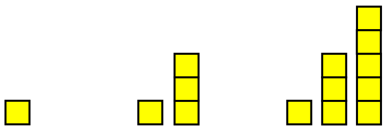
Se puede observar que la base inferior del rectángulo anterior es 2x-3 y la base superior es -2x+3 que es su simétrico; lo mismo sucede con la altura, por un lado leemos x-1 y por el otro su simétrico –x+1. De la figura anterior se obtuvo $2x^2-5x+3$ pero como hay que considerar el simétrico, el resultado es $-2x^2+5x-3$.

Las actividades correspondientes a este tema se encuentran en el anexo A

Teoría de números

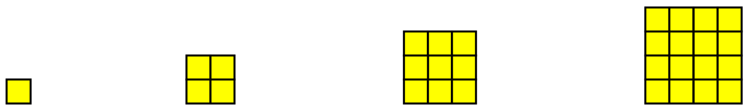
Algunas series numéricas de la teoría de números, pueden ser trabajadas de manera intuitiva mediante el uso de los Bloques de Dienes, manipulando las sumas parciales mediante casos particulares y así se va construyendo la expresión general.

A continuación veamos la representación de la suma de impares consecutivos:



1 1+3 1+3+5 ….

1. ¿Qué figura geométrica puedes formar en cada suma?
2. ¿Puede formarse el mismo tipo de figura geométrica (rectángulo, cuadrado, triángulo) en cada caso?
3. ¿Que pasa si tienes 1+3+5+7, 1+3+5+7+11?
4. Observa los siguientes cuadrados y completa el segundo miembro de cada igualdad:



$1^2=1$ $2^2=$ $3^2=$ $4^2=$

Indica cual es la expresión general.

Las actividades correspondientes a este tema se encuentran en el anexo B

Referencias bibliográficas

Campos L., R. y Giménez, J. (1996). Sentido aritmético y algebraico, ¿o algo más?*Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 23-31.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: DidácticasMagisterio.

Enzensberger, H. M. (1998). *El diablo de los números.* Barcelona, España: Círculo de Lectores.

Escorche, A y Pernalette, H. (2012). *El Puzzle Algebraico: Una propuesta didáctica para la enseñanza de Polinomios desde una perspectiva geométrica*. Trabajo de grado no publicado, Universidad Central de Venezuela, Venezuela.

García de Clemente, C. (2002). *Enseñando a enseñar aritmética.* Caracas, Venezuela: INED.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetosmatemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *14*(3), 325-355.

Goñi Z., Jesús M. (1996). Laboratorio de matemática. *Uno. Revista de Didáctica de lasMatemáticas*, 7, 5-6.

Hernández, N. y Cardozo, E. (1996). Desarrollo del pensamiento algebraico a travésdel uso de los Algeblocks. *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*,México.

Kieran, C. (1981). Concepts associates with the equality symbol. *Educacional Studies of Mathematics*, 12, 317-326.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*. *7*(3), 229-240

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. *Paper presented at the anual meeting of the American Educational Research association,* New York.

Mancera, E. (1998). *Matebloquemática.* México: Editorial Iberoamérica.

Mancera, E. (2004). *El papel de la Geometría como herramienta para la didáctica de la matemática.* Comité Interamericano de Educación Matemática. México.

Morales Ramírez, M. (2004). *Uso de manipulativos en la enseñanza del álgebra.* Trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, México.

Rada, S. (1992). *Temas de Matemáticas elementales. Aritmética.* Caracas: CENAMEC

[ANEXO A]

Actividades en el conjunto de los números naturales (N)

Resuelve los siguientes ejercicios utilizando los bloques de Dienes.

1. Sumar: a) 321+ 245 b) 156 + 278
2. Restar: a) 548 – 132 b) 422 – 235
3. Multiplicar: a) 4 × 15 b) 12 × 21
4. Dividir: a) 65 ÷ 5 b) 77 ÷ 4 c) 278 ÷ 12
5. Hallar los siguientes números:
   a) 4^2 b) 13^2 c) 23^2
6. Hallar la raíz cuadrada de los siguientes números:
   a) 9 b) 121 c) 364

Actividades en el conjunto de los números enteros (Z)

Resuelve los siguientes ejercicios utilizando los bloques de Dienes.

1. Sumar: a) (+2)+(+3) b) (+2)+(–3)
   c) (–2)+(+3) d) (–2)+(–3)
2. Restar: a) (+2)–(+3) b) (+2)–(–3)
   c) (–2)–(+3) d) (–2)–(–3)
3. Multiplicar: a) (+2)×(+3) b) (+2)×(–3)
   c) (–2)×(+3) d) (–2)×(–3)
4. Dividir: a) (+6)÷(+2) b) (+6)÷(–2)
   c) (–6)÷(+2) d) (–6)÷(–2)

Actividades con polinomios

Utilizando los bloques de Dienes.

1. Sumar: a) $(-2x - 2) + (3x - 1)$
   b) $(x^2 + x - 2) + (-2x^2 + 2x + 1)$
   c) $(-\frac{1}{2}x - 2) + (3/2x - \frac{1}{2})$
   d) $(3/2\,x^2 + 2x - \frac{1}{2}) + (-2x^2 + 3/2x + 2)$

2. Restar: a) $(-x + 3) - (4x - 2)$
   b) $(3x^2 - x + 2) - (-x^2 - 3x - 4)$
   c) $(2x^2 - x - 3) - (3x + 1)$
   d) $(-½ x - 4) - (3/2 x - ½)$
   e) $(1/2 x^2 + 2x - 3/2) - (-x^2 + ½ x + 1)$

3. Multiplicar:
   a) $3. (2x - 1)$
   b) $-2. (3x + 3)$
   c) $(2x + 1) (3x + 2)$
   d) $(x + 1).(2x - 3)$
   e) $(-2x + 3) (x + 1)$

4. Resuelve los siguientes productos notables:
   a) $(x-1).(x+1)$
   b) $(x-2)^2$
   c) $(x+1)^2$

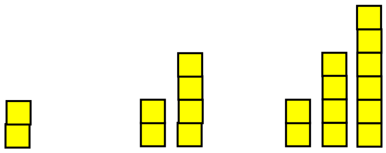
5. Factorizar:
   a) $6x^2 + 11x + 4$
   b) $x^2 + 6x + 9$
   c) $x^2 - 8x + 16$

6. Dividir:
   a) $(6x^2 + 11x + 7) \div (2x+1)$
   b) $(6x^2 - 11x - 7) \div (2x-1)$

[ANEXO B]

Teoría de números

1. A continuación veamos la representación de la suma de pares consecutivos:



2 2+4 2+4+6 ….

   a) ¿Qué figura geométrica puedes formar en cada suma?
   b) ¿Puede formarse el mismo tipo de figura geométrica (rectángulo, cuadrado, triángulo) en cada caso?
   c) ¿Que pasa si tienes 2+4+6+8 y si tienes 2+4+6+8+10?
   d) Indica cual es la expresión general.

2. Ahora sumemos 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5 y así sucesivamente.
   a) Con los Bloques de Dienes ¿Qué figura geométrica puedes formar en cada suma?
   b) ¿Puede formarse el mismo tipo de figura geométrica (rectángulo, cuadrado, triángulo) en cada caso?
   c) Indica cual es la expresión general.

3. Determina con los Bloques de Dienes ¿Cuál es la fórmula general de la siguiente suma 1+5+9+13+17+21+… ? ¿Cómo colocaste los bloques para llegar a esa conclusión?

4. Determina con los Bloques de Dienes ¿Cuál es la fórmula general de la siguiente suma 1+4+7+10+13+16+… ? ¿Cómo colocaste los bloques para llegar a esa conclusión?