

**TEORIA DOS MODELOS ORGANIZADORES DO PENSAMENTO:
UMA PERSPECTIVA METODOLÓGICA PARA INTERPRETAÇÃO
DAS INVARIANTES OPERATÓRIAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM
DE MATEMÁTICA**

Luzia Maya Kikuchi
luzia.kikuchi@usp.br

Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo (FEUSP) – Brasil

Núcleo temático: VII. Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nível educativo: Medio o Secundario

Palabras clave: cognição, campos conceituais, invariantes operatórias, modelos organizadores do pensamento

Resumo

Este trabalho consiste em apresentar a concepção da Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento de Moreno et al. como opção metodológica para analisar as invariantes operatórias de um sujeito levando em conta, ao mesmo tempo, a perspectiva individual e coletiva. Para tal efeito, inicio com uma breve reflexão sobre a origem da concepção de inteligência do ponto de vista histórico e filosófico, apresentando algumas pesquisas e teorias que apontaram a diversidade de inteligências em um sujeito e também da dificuldade para compreendê-las. As invariantes operatórias tratadas neste texto referem-se à Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que estão diretamente relacionadas aos esquemas e teoremas associados à aprendizagem de matemática. Para apresentar a aplicação dessas duas teorias, apresento uma interpretação dos dados coletados de alunos do 8º ano do ensino fundamental, de uma escola pública do estado de São Paulo, no Brasil, com atividades envolvendo habilidades relacionados à álgebra. Essa análise de dados permite elucidar uma forma de utilização dos Modelos Organizadores do Pensamento para compreender as invariantes operatórias associadas aos Campos Conceituais. Tal interpretação poderá ajudar no direcionamento assertivo de atividades para os alunos, de acordo com a habilidade que se apresentou como de maior dificuldade para a maioria.

Introdução

A matemática sempre foi vista como uma área desenvolvida de forma muito linear e voltada para sujeitos com inteligência “acima da média”. No senso comum, acredita-se que somente as pessoas que nasceram com “dom” para a disciplina são capazes de aprendê-la, criando

uma baixa autoestima e sentimento de “incompetência” naqueles que não conseguem aprender matemática.

Analisando do ponto de vista histórico da cultura ocidental, constatamos que esse pensamento pode ser justificado pela constante valorização da razão em detrimento da emoção, desde a Grécia Antiga. Kant (1786 apud ARANTES, 2013, p. 52) também parece ter estabelecido uma certa hierarquia entre a razão e a emoção justificando que a primeira tem prevalência em relação à segunda. Tais pensamentos justificam os motivos pelos quais os testes gerais de inteligência privilegiam as habilidades lógico-matemáticas, tais como a capacidade de generalização, como uma característica marcante da inteligência geral em suas análises. Porém, pesquisas posteriores mostraram resultados que contestam esses testes. Por exemplo, Symonds (1923 apud KRUTETSKII, 1976) e Duncan (1961 apud KRUTETSKII, 1976) demonstraram que os testes de inteligência possuem maior correlação com as áreas de história e de linguística do que, de fato, com a matemática. Getzel e Jackson (1959 apud KRUTETSKII, 1976) também apresentaram em suas pesquisas que os alunos considerados como portadores de “Q.I.³ alto” são mais propensos a pensarem “de forma mais estereotipada e a realizarem operações padronizadas” e menos criativas.⁴ (KRUTETSKII, 1976, p. 354). Para reforçar os resultados apresentados por Getzel e Jackson, a Teoria de Inteligências Múltiplas de Gardner (1993) nos mostrou que a inteligência de um sujeito não é definida apenas por um único tipo de habilidade. Graças a essa teoria, hoje é amplamente aceito o fato da existência de outras habilidades, além da lógico-matemática, comparada à década de 30 ou 60, quando foram apresentadas as suas primeiras evidências. Se não fosse por essas pesquisas, como poderíamos justificar, eventualmente, a existência de sujeitos que se destacam em artes, esporte e literatura sem estarem relacionadas à área de matemática? Poderíamos dizer, por exemplo, que Mozart, Muhammad Ali e Shakespeare não podem ser considerados como sujeitos com inteligência acima da média em suas respectivas áreas? Ou ainda, será que para um sujeito ser considerado inteligente deve dominar todas as áreas de conhecimento?⁵ Assim, concluímos que tais pesquisas ajudam a evidenciar que a inteligência

³ Quociente de Inteligência.

⁴ Krutetskii faz uma ressalva, em nota de rodapé, que os resultados desta última pesquisa podem variar de acordo com o que Getzel e Jackson consideraram como inteligências gerais e criatividade, mas não deixa de ser relevante os seus resultados.

⁵ Machado (2000) cita dois exemplos conhecidos na história: uma delas é a de Einstein que tinha muitas dificuldades com a leitura e escrita, por conta da dislexia, mas tinha muita facilidade com matemática, enquanto o outro exemplo refere-se a Jung que, por outro lado, relata sua angústia com a disciplina de matemática na escola.

pode ser representada por diferentes tipos de habilidades, inclusive fora da área de exatas. Ter dificuldades em matemática não é razão para baixa autoestima, mas sabemos que ainda há, principalmente no ambiente escolar, um bloqueio emocional dos alunos para aprender matemática. Não raramente, sentem-se inferiores ou incapazes que outros estudantes mesmo possuindo habilidades acima da média em outras áreas do conhecimento. Logo, o desafio do professor de matemática seria descobrir como evidenciar as habilidades individuais de alunos com dificuldade de aprendizagem em matemática.

Para tentar responder a essa pergunta, apoiei-me em referências de teorias psicocognitivas relacionados à aprendizagem de matemática como a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) e, para a análise dos dados coletados, a Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento de Moreno *et al.* (1999). As duas teorias foram escolhidas por levarem em conta a complexidade para analisar a psicogênese do sujeito.

A Teoria dos Campos Conceituais

Os Campos Conceituais de Vergnaud envolve o estudo do desenvolvimento do conhecimento e da inteligência ao longo do tempo que, a priori, assemelha-se muito aos trabalhos de Piaget. No entanto, há uma diferença quanto a sua especificidade, por envolver o processo de aquisição de habilidades e conceitos em relação às situações e problemas específicos, mais ligadas à situação de sala de aula. Portanto, a estrutura dos Campos Conceituais, em sua concepção, permite organizar as ideias interconectadas, conceptualizações e representações ao longo de um período de tempo, longo o suficiente para que a abordagem psicogenética torne-se significativa (VERGNAUD, 1983) para um indivíduo. Segundo o autor, um conceito só adquire sentido para a criança quando existem situações e problemas para resolver. Ou seja, um conceito não deve ser reduzido a sua definição. Deve existir uma classe de situações na qual um sujeito pode aplicar tais conceitos que podem ser de dois tipos:

- Uma classe de situações na qual o sujeito consegue aplicar competências de forma imediata;
- Uma classe de situações na qual o sujeito ainda precisa desenvolver competências.

Para aplicar os conceitos dentro de cada situação, é necessário possuir esquemas para a resolução dos problemas. Conforme Vergnaud, esquema é uma organização invariante de

conduta para uma dada classe de situações e pode estar presente nas duas categorias citadas anteriormente, mas podem se manifestar em diferentes níveis (*conhecimentos-em-ação* e *teoremas-em-ação*), como os diferenciarei a seguir.

Os *conhecimentos-em-ação* são ações que um sujeito é capaz de executar, mas não consegue explicitar o seu processo, pois ainda não tem domínio suficiente. Normalmente, os *conhecimentos-em-ação* estão ligados às tarefas operacionais aprendidas no cotidiano, sem um aprofundamento teórico ligado a este conhecimento. No caso dos *teoremas-em-ação*, são ações executadas com o apoio de uma perícia ou conhecimento erudito sobre o assunto. Ou seja, o sujeito é capaz de replicar ou executar a ação para que outra pessoa consiga entendê-la. Quando esses dois níveis de esquema trabalham juntos e o sujeito é capaz de desenvolvê-la e aplica-la em variadas situações, elas passam a ser chamadas de invariantes operatórias. Esta última se refere a ações suficientemente automatizadas e implícitas que fazem parte da habilidade cognitiva do sujeito para resolução de uma determinada situação.

As invariantes operatórias, no entanto, não são ações observáveis ou explícitas, pois fazem parte do psicológico do sujeito. Podemos levantar algumas habilidades como supostos pré-requisitos para a resolução de uma tarefa, mas não podemos afirmar com precisão se as invariantes operatórias de um sujeito “A” trabalham da mesma forma que as de um sujeito “B”, embora os dois consigam chegar a uma mesma solução. Devido a esse nível de complexidade de análise das invariantes operatórias, seria necessário encontrar uma metodologia que permitisse organizar, a partir das respostas de um sujeito, possíveis modelos que ajudem a representar a sua psicogênese. Por essa razão, encontrei na Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento uma possibilidade de auxiliar no levantamento desses possíveis esquemas de organização que um sujeito mobiliza para a resolução de um problema matemático.

A Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento

A teoria desenvolvida por Moreno *et al.* (1998), intitulada como Modelos Organizadores do Pensamento, nasceu das ideias piagetianas e dos modelos mentais de Johnson-Laird⁶. Ela tem como principal objetivo encontrar padrões em fenômenos aparentemente distintos. As

⁶ Não entraremos em detalhes dos modelos mentais de Johnson-Laird, mas as ideias estão baseadas na obra “La theorie des modeles mentaux” (1993). Existe uma aproximação teórica entre os Campos Concetuais de Vergnaud com as dos Modelos Mentais de Johnson-Laird em termos cognitivos, mas o segundo enfatiza as operações mentais mais gerais do pensamento enquanto o primeiro ocupa-se em operações específicas de uma situação didática. Referências estão no final do texto.

autoras partem do princípio que nada na natureza é imutável, citando exemplos das teorias evolucionistas de Darwin e o conceito de movimento e repouso introduzido por Galileu. Nos dois exemplos, a mudança passa a ser aceita como parte de uma regularidade, tornando-se, assim, o próprio objeto de estudo. No caso da psicologia, que trata de estudos com seres humanos, o conceito torna-se ainda mais aplicável. Logo, a teoria surgiu da necessidade de criar um modelo que permitisse descrever e interpretar, de forma simultânea, o que permanece e o que muda, mesmo dentro de um cenário de mudança.

As autoras também descrevem a necessidade de uma teoria funcional do conhecimento que fosse capaz de contemplar a complexidade de incorporar elementos do mundo externo pelo sujeito, mesmo que ainda sejam pré-maturos, mas que tenham origem de um cenário estrutural comum à espécie. Essa teoria ainda precisaria ser capaz de envolver o estudo do funcionamento de sistemas complexos, abrangendo tanto o pensamento individual quanto o coletivo, permitindo também interpretar o que é denominado como “cognitivo” como “afetivo”, além dos pensamentos considerados como “científico” ou “cotidiano”. Conforme observamos anteriormente, as invariantes operatórias de Vergnaud não são conhecimentos necessariamente explicitáveis e podem variar de sujeito para sujeito, existindo uma dificuldade para elucidar tal funcionamento cognitivo. Assim, a proposta oferecida pela teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento parece ser o caminho para auxiliar na organização das invariantes operatórias por permitir a criação dos modelos *a posteriori*, ou seja, partindo dos procedimentos e representações do sujeito, criando evidências de uma organização em comum, comparado a um coletivo analisado, como veremos a seguir.

Aplicando a teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento

As análises a seguir partiram de uma pesquisa em andamento de minha tese de doutoramento, cujo objetivo é descobrir formas de representar e organizar as invariantes operatórias envolvidas na solução de problemas com conteúdos de Álgebra pelos alunos do ensino básico e, posteriormente, analisar as escolhas didáticas que o professor poderá realizar de acordo com os resultados encontrados em sua turma. Os dados foram coletados de 31 alunos de uma turma do oitavo ano do ensino fundamental de uma escola da rede estadual de São Paulo, cuja aplicação foi feita em dois momentos: no primeiro, com o levantamento dos primeiros modelos evidenciados pelos alunos e, em um segundo momento, que ainda será aplicado, para verificar se houve alteração nas invariantes operatórias mobilizadas após a apresentação

de uma pergunta/modelo que ajudasse a esclarecer a dúvida que o aluno teve na primeira aplicação. Neste texto, apresento apenas os resultados da primeira aplicação.

Para organizar as atividades e seus conteúdos, foi escolhido um conjunto de habilidades envolvendo o aprendizado de Álgebra referenciadas nas pesquisas feitas por Krutetskii (1976)⁷ e organizadas conforme o quadro a seguir.

Categorias	Nº.⁸	Grupo de habilidades
Coleta de informações	H1	Percepção (Interpretação de um problema)
Processamento de informações	H2	Generalização de conceitos matemáticos
	H3	Reversibilidade do processo mental
	H4	Compreensão; Raciocínio e Lógica

Tabela 1: Grupos de habilidades a serem analisadas.

Embora Vergnaud (1983) afirme que não seja adequado analisarmos de forma separada alguns conteúdos matemáticos, pois o autor acredita que eles trabalham de forma intrínseca, optamos por essa categorização para ser coerente com a forma na qual os conteúdos são didatizados no currículo escolar. Ou seja, há uma certa linearidade na transição da Aritmética para a Álgebra. Assim, as categorias criadas por Krutetskii reúnem conteúdos em alguns grupos de habilidades, permitindo uma análise abrangente em termos de desenvolvimento cognitivo, tornando-o consistente com a ideia de habilidades intrínsecas de Vergnaud. Além disso, para verificarmos a mobilização dos diferentes esquemas e invariantes operatórias, precisamos escolher conteúdos didáticos para analisar a organização do pensamento em conteúdos e situações específicos, pois essa seria a principal proposta da Teoria dos Campos Conceituais, diferenciando-a das teorias de Piaget.

A priori, havíamos escolhido alguns conteúdos que pudessem categorizar os alunos em três grupos distintos:

- 1) Os que resolvem utilizando recursos de Aritmética;
- 2) Os que resolvem utilizando recursos de Álgebra;
- 3) Os que utilizam recursos alternados ou lógico-verbais.

Porém, após a aplicação, os resultados apontaram para uma necessidade de analisar outras categorias por meio das respostas dos indivíduos, já que não era possível categorizá-los nesses grupos prévios. Foi, então, que os Modelos Organizadores do Pensamento permitiram

⁷ As perguntas aplicadas na pesquisa podem ser consultadas no anexo após as referências.

⁸ A numeração foi inserida por critério próprio para facilitar a identificação nas análises. Este quadro não reflete a pesquisa real de Krutetskii, sendo uma releitura adaptada para o contexto desta pesquisa.

sintetizar as dificuldades encontradas nesses grupos de alunos, inclusive, mostrando pontos em comum entre eles.

No quadro a seguir, resumimos os modelos encontrados, representando apenas o percentual das maiores dificuldades apresentadas por habilidade, já que nosso objeto de estudo é verificar as habilidades mobilizadas por aqueles alunos com dificuldades em matemática, sobretudo a álgebra. Existem outros modelos, mas não possuem quantidade significativa para serem citadas. A ideia de utilizar uma pergunta/modelo foi adotada para analisar os próximos passos dos estudantes após serem apresentados a essas perguntas, de acordo com o tipo de dificuldade encontrada em suas respostas. Além disso, verificar se são capazes de mobilizar as invariantes operatórias esperadas, ou outras, para alcançar a habilidade avaliada. Devido ao espaço limitado de páginas, procurei resumir as análises, representando em forma de quadro, apenas com as ideias principais, que podem ser conferidas na tabela a seguir.

#	Pergunta/modelo	Habilidade avaliada	Característica encontrada nesse modelo	Percentual ⁹	Invariantes operatórias envolvidas
1	O que o enunciado quer que você descubra?	Capacidade de interpretar problemas	Não perceber que o enunciado estava incompleto	45%	Lógicas de classes Estruturas aditivas
2	Como você calcula a área de um retângulo	Capacidade de generalizar conceitos matemáticos	Falta de um conteúdo prévio ou confusão entre cálculo de área, perímetro e volume.	45%	Estruturas multiplicativas Lógica de classes
3	Por que resolveu ambos?	Reversibilidade do processo mental	O aluno deveria optar por uma das atividades com diferentes complexidades, mas resolveu ambos.	58%	Estruturas multiplicativas Estruturas algébricas
4	O que acontece com o terreno no 1º, 2º dia e assim sucessivamente?	Compreensão; Raciocínio e Lógica	Dificuldade para compreender o conceito de progressão geométrica.	60%	Lógica de classes Estruturas multiplicativas

Tabela 2: Distribuição dos modelos com as respectivas habilidades e as invariantes operatórias envolvidas

Considerações finais

Tentar compreender o processo de aprendizagem de um aluno é algo complexo e envolve fatores emocionais, além dos cognitivos, e pesquisas da área da psicologia cognitiva têm contribuído enormemente para a compreensão desses processos de ensino-aprendizagem. O professor de matemática, além de dominar o conteúdo de sua especialidade, tem como desafio tentar compreender as diferentes habilidades que os alunos possuem e tentar adaptar o ensino levando em consideração essas individualidades. No entanto, sabemos o quanto é difícil, no modelo atual de escola que temos, levar em conta tais individualidades. Por isso, Teorias como a dos Modelos Organizadores do Pensamento ajudam a criar padrões dentro de um coletivo, levando ainda em conta as respostas individuais de cada um. Não obstante, ele permite formas de selecionar e rechaçar os dados como, simultaneamente, possui uma organização que conecta os dados considerados relevantes (MORENO *et al.*, 1998).

É verdade que a falta de conteúdos prévios, bem como a presença deles, também pode tornar-se um obstáculo, como Vergnaud (1990) já ressaltou anteriormente. Moreno (1998) também vai ao encontro dessa visão do autor levantando o fator de que um sujeito confere significado de forma individual e independente, mesmo que isso não seja a verdade universal,

⁹ Corresponde ao percentual de alunos participantes que se encaixaram neste modelo.

concordando com a ideia de esquemas e invariantes operatórias. Mas, sabemos que os conhecimentos prévios¹⁰ são fundamentais para o avanço e acomodação dos novos, com a ressalva de que elas não se realizam de forma linear. Devem passar por idas e vindas, acomodações e refutações, assim como ocorre na história da ciência¹¹ e assim deveria ser para o aluno que aprende matemática. O professor deve incentivar esse processo de aprendizado, aproveitando os próprios modelos dos alunos, que são informações apresentadas de forma acessível para aqueles sujeitos, já que foram criadas pelo processo mental deles próprios. Nesse sentido, a Teoria dos Modelos Organizadores do Pensamento torna-se uma ferramenta muito útil para evidenciar os modelos advindos desses sujeitos, pois não há uma definição a priori dos dados pelo viés de quem analisa.

No entanto, temos que ter consciência de que, quando a escola adota um currículo e um modelo didático, fatalmente, o pensamento do aluno será conduzido por aquele caminho lógico, mas que individualmente vai conferindo significados próprios, de acordo com seus interesses e conhecimentos afins, conforme alerta Moreno (1998). Porém, para aqueles que tentam compreender mais a fundo esse processo cognitivo percorrido pelos alunos, para pensar em uma escolha didática que ajude os professores a buscar alternativas de didatização dos conteúdos, passa a ser uma ótima ferramenta e um novo desafio para as pesquisas em educação matemática.

Referências

- ARANTES, V. A. (2013, Jul/Dez). O psiquismo humano e a teoria dos modelos organizadores do pensamento. *NUPEM*, 5, 51-66.
- AUSUBEL, D. P. (2000). *The acquisition and retention of knowledge: a cognitive view*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- GARDNER, H. (1993). *Multiple Intelligences*. New York: Basic Books.
- JOHNSON-LAIRD, P. (1993). La theorie des modeles mentaux. En: EHRLICH, M. F; TARDIEU, H; CAVAZZA, M. (Ed.) *Les modèles mentaux: approche cognitif des représentations*, Introducción, pp. 1-20. Paris: Masson.
- KRUTETSKII, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. (J. Teller, Trad.). Chicago: The University of Chicago Press. (Trabalho original publicado em 1968).
- KUHN, T. (1975). *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Editora Perspectiva.
- MACHADO, N. J. (2000). *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. 6ª ed. São Paulo: Cortez.
- MORENO, M.; SASTRE, G.; BOVET, M.; LEAL, A. (1999). *Conhecimento e mudança: os modelos organizadores na construção do conhecimento*. (A. V. Fuzzato, Trad.). Campinas: Unicamp; São Paulo: Moderna.

¹⁰ Ausubel (2000) também ressalta a importância dos conhecimentos prévios para a integração dos novos conhecimentos como um dos pré-requisitos para a teoria da aprendizagem significativa.

¹¹ Para Kuhn (1975) as revoluções científicas se dão por meio da crise e emergência de um novo paradigma.

VERGNAUD, G. (1983) Multiplicative Structures. En: LESH, R. A.; LANDAU, M. (Eds) The acquisition of mathematics concepts and processes, Capítulo 5, pp. 127-174, London: Academic Press. Developmental Psychology Series.

VERGNAUD, G. (1990, 2.3). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques (RDM)*. 10, 133-170.

Anexo do trabalho

TEORIA DOS MODELOS ORGANIZADORES DO PENSAMENTO: UMA PERSPECTIVA METODOLÓGICA PARA INTERPRETAÇÃO DAS INVARIANTES OPERATÓRIAS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Habilidade 1: Leia os problemas a seguir e formule a pergunta do enunciado. Depois, tente resolver o problema.

Eu tenho um valor total de 140 reais guardados em dois cofres. Se eu transferir 15 reais de um cofre para o outro, terei exatamente o mesmo valor em cada um destes cofres.

Habilidade 2: Os problemas a seguir são semelhantes, mas seus resultados são representados de formas diferentes. Apresente a resolução para cada um deles.

- a. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede 3 m. Qual o volume de 4 quartos iguais a esse?
- b. O comprimento de um quarto mede 6 m enquanto sua largura mede 3 m e sua altura mede x m. Qual o volume de n quartos iguais a esse?

Habilidade 3: Nas atividades a seguir, você deverá tentar resolver os problemas da forma como está apresentada no verso A. Se tiver dificuldade, você pode optar em resolver o verso B. No final, justifique qual foi a dificuldade que o(a) impossibilitou de resolver o verso A.

Verso A

- a. Um tanque com capacidade de 80 litros foi preenchido com $\frac{2}{5}$ de seu volume. Quantos litros foram preenchidos nesse tanque?
- b. Apresente a forma fatorada das seguintes expressões: $a^2 - 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2$.

Verso B

- a. Um tanque foi preenchido com dezesseis litros de água preenchendo $\frac{2}{5}$ da sua capacidade total. Qual é o volume total desse tanque?
- b. Desenvolva as seguintes expressões: $(a - b)^2$ e $(a + b)(a - b)$.

Habilidade 4: Resolva os problemas a seguir colocando o máximo de detalhes do raciocínio que usou para resolvê-lo.

- a. Em uma olimpíada de matemática, foram propostos 10 problemas. Cada participante receberá 5 pontos para cada problema resolvido corretamente e perde 3 pontos se for resolvido de forma incorreta. Quantos problemas foram resolvidos

corretamente para um aluno que recebeu 34 pontos no final? E para quem recebeu 10 pontos?

- b.** A vegetação está cobrindo um terreno baldio. A cada dia essa área coberta pela vegetação está dobrando. No oitavo dia, metade desse terreno já está coberto pela vegetação. Em que dia a vegetação cobrirá o terreno todo?