

## **LAS APREHENSIONES EN EL REGISTRO GRÁFICO PARA LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN.**

Alfredo Demetrio Moreno Llacza – Katia Vigo Ingar

amoreno@lamolina.edu.pe – kvigo@pucp.pe

Universidad Nacional Agraria La Molina (UNALM) - Pontificia Universidad Católica del  
Perú (PUCP)

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación de profesores del nivel secundario

Palabras clave: Variación estadística, aprehensiones, registro gráfico estadístico, Geogebra.

### **Resumen**

*La variación es uno de los tipos fundamentales del Pensamiento Estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) de ahí la importancia de la comprensión de la variación por parte de los profesores de matemática. Este trabajo es parte de una tesis de maestría, que tiene como objetivo analizar las aprehensiones que los profesores movilizan al percibir y describir la variación de los datos en el registro gráfico (gráfico de puntos y diagrama de cajas). En esta investigación utilizamos como base teórica la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995) adaptada para el aprendizaje de la estadística por Vieira (2008). La metodología utilizada para lograr el objetivo es el estudio de caso. Para la experimentación, hemos seleccionado dos parejas de profesores quienes participaron en las dos actividades desarrolladas con lápiz, papel y con el apoyo del geogebra. En este trabajo, presentamos una de las actividades enfocadas a que los profesores construyan el diagrama de cajas a partir del gráfico de puntos, y luego perciban y describan la variación de los datos por medio de las aprehensiones del registro gráfico. Los resultados muestran que los profesores lograron movilizar las aprehensiones perceptiva y discursiva lo que les permitió comprender la noción de variación.*

### **Introducción**

La variación es el corazón de la estadística y de acuerdo a la afirmación “la variación es la razón por lo que la gente ha tenido que desarrollar métodos estadísticos sofisticados para filtrar los mensajes de datos del ruido ambiental” (Wild y Pfannkuch, 1999, p. 235-236). Por ese motivo, los profesores de matemática deben adoptar un enfoque no determinístico en la enseñanza de la estadística.

Vieira (2008) y Canossa (2009), encontraron dificultades tanto en estudiantes y profesores respectivamente, en utilizar los algoritmos para la obtención de la mediana y los cuartiles, y si lo hallaban tenían dificultades para la interpretación de los resultados. Además, Canossa (2009),

percibió en el desarrollo de la formación de una profesora, que a pesar de poseer cierto conocimiento básico de estadística no conocía los gráficos Dot-plot y Box-plot, esto evidencia el poco uso que le dan los profesores a estos gráficos.

Por otro lado, en el Diseño Curricular Nacional (2016) no se encuentra el concepto de variación como objeto de estudio, ni los gráficos de caja (Box-plot) y puntos (Dot-plot), ya que por medio de las aprehensiones de estos gráficos, realizaremos el estudio de la variación de los datos.

Finalmente, en este trabajo usaremos como marco teórico La Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval adaptada para la estadística por Vieira (2008), específicamente las aprehensiones del registro gráfico.

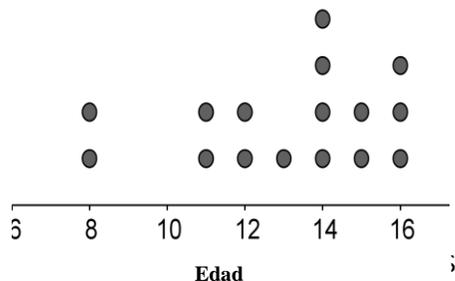
### Marco teórico

Duval (2004) afirma que existen cuatro tipos diferentes de aprehensiones de una figura: la perceptiva, la discursiva, la secuencial y operatoria. Respecto a la perceptiva, el investigador afirma que la aprehensión perceptiva de una figura permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático (en geometría), por ejemplo, tenemos el siguiente objeto matemático representado en el plano (figura 1). La aprehensión perceptiva de la figura permite identificar que ella representa un paralelogramo. En ese sentido Vieira (2008) afirma que en la estadística la aprehensión perceptiva de un gráfico estadístico permite hacer una lectura directa de los datos en el gráfico.



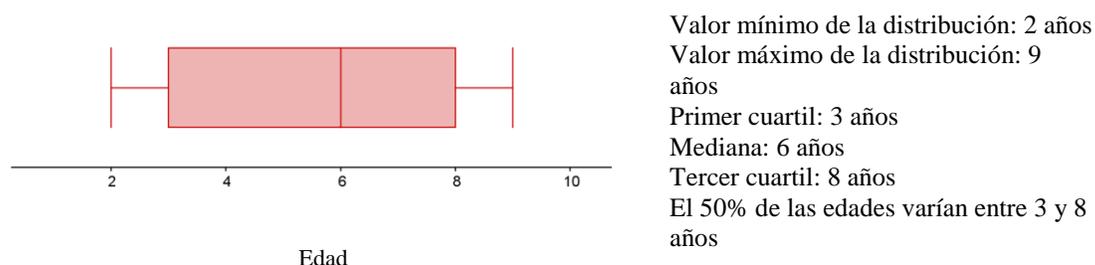
**Figura 1.** Paralelogramo

Por ejemplo, la aprehensión perceptiva del gráfico (ver figura 2) permite identificar que este gráfico representa un gráfico de puntos de la variable edad, y cada punto representa una observación para cada edad.



**Figura 2.** Gráfico de puntos de la variable edad

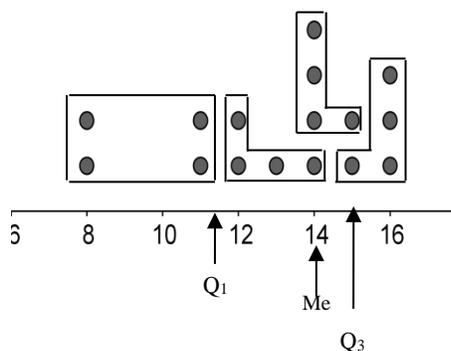
Asimismo, para Duval (2004), la aprehensión discursiva de una figura es la explicación de las propiedades de una figura y estas explicaciones son de naturaleza deductiva, y su función epistemológica es de demostración. Según Vieira (2008), la aprehensión discursiva se da cuando el individuo explica las propiedades de un gráfico estadístico, además interpreta e identifica relaciones entre ellas. Por ejemplo en el gráfico box-plot o diagrama de cajas podemos identificar los valores mínimo y máximo y los cuartiles que sirven para el estudio de la variación de los datos, como se muestra en la figura 3.

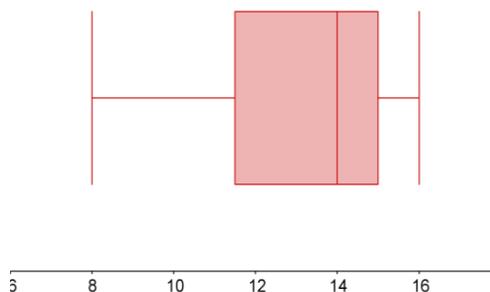


**Figura 3.** Aprehensión discursiva del Box-plot

Respecto a la aprehensión secuencial de una figura, Duval (2004), señala que es la secuencia que se sigue para la construcción de la figura. En estadística, de acuerdo a Vieira (2008), por ejemplo la aprehensión secuencial de un box-plot sería la secuencia de pasos que se sigue para la construcción del box-plot de la distribución (figura 4).

- Construir el gráfico de puntos.
- Dividir el conjunto de datos en el gráfico de puntos en cuatro grupos con un mismo número de elementos en base a la variable.
- Ubicar la posición de los cuartiles ( $Q_1$ , Me y  $Q_3$ ) en el gráfico de puntos.
- Hallar los valores de los cuartiles.
- Ubicar en un eje horizontal paralelo al eje horizontal del gráfico de puntos, los valores encontrados hasta el momento y el valor mínimo y máximo.
- Trazar un rectángulo que abarque el 50% de los datos que se encuentran en el centro, a continuación divide el rectángulo trazando una línea vertical que ubique la mediana, y luego trace dos segmentos horizontales, uno desde el valor mínimo a una de los lados del rectángulo y el otro desde el otro lado el valor máximo.





**Figura 4.** Aprehensión secuencial

Para Duval (2004), la aprehensión operatoria corresponde a la modificación de una figura a otras figuras. Para Vieira (2008), la aprehensión operatoria se da cuando se modifica el histograma para un polígono de frecuencias acumuladas. Otro ejemplo se da cuando se modifica un gráfico de puntos para un diagrama de cajas (figura 4), con el objetivo de realizar el estudio de la variación de los datos.

### **Metodología de la investigación y sujetos de investigación**

La metodología cualitativa utilizada es el estudio de caso, Ponte (2006) afirma que un estudio de caso tiene como objetivo conocer una entidad bien definida como una persona, una institución, un curso, una disciplina, un sistema educativo, una política o cualquier otra unidad social cuyo propósito es comprender a profundidad el cómo y el por qué de esa entidad, evidenciando su identidad y características propias. Nuestro caso es el análisis de la variación de datos que realizan los profesores de matemática para comprender como movilizan las aprehensiones en el registro gráfico para percibir y describir la variación de los datos.

Por otro lado, para la validación del estudio de caso, Ponte (2006), afirma que existirá validación interna en un estudio de caso, si las conclusiones presentadas corresponden auténticamente a una realidad reconocida por los propios participantes. Luego la validación del estudio de caso se realizó de manera interna.

Participaron en la investigación 14 profesores de matemática del nivel secundario de las Instituciones Educativas Públicas de Lima Metropolitana- Perú y para desarrollar las actividades los profesores se agruparon en parejas. En esta investigación presentaremos la primera actividad realizada por el grupo 2.

## Análisis de la actividad 1

La Actividad 1 tiene por objetivo que los profesores construyan el diagrama de cajas o Box-plot a partir del gráfico de puntos, ya que en el Diseño Curricular Nacional no aparece este gráfico y por ese motivo fue necesario dar las secuencias de pasos para la construcción de este gráfico. Luego esperamos que a partir de las aprehensiones perceptiva y discursiva de los gráficos, gráfico de puntos y diagrama de cajas, los profesores perciban y describan la variación de los datos.

Basados en las edades de los estudiantes de un aula, que se encuentra en las tarjetas, realice lo siguiente:

- Construya un gráfico de puntos para las edades de los estudiantes en un papelógrafo. (Solo utilice la mitad del papelógrafo)
- ¿Qué puedes decir acerca de la variación de las edades de los estudiantes, a partir de la representación realizada?

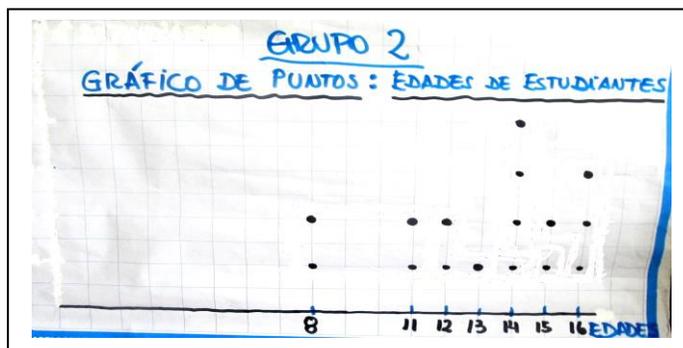


Figura 5. Gráfico de puntos realizado por el grupo 2

En la figura 6, observamos que los profesores describen la variación con respecto a la media, indicando que la edad 8 está más dispersa a la media, pero esta afirmación lo hicieron sin representar este valor de la media en el gráfico de puntos (figura 5), lo que significa que ubicaron mentalmente este valor en el gráfico.

b) En el gráfico de puntos, se observa que la edad 8 está más dispersa a la media.

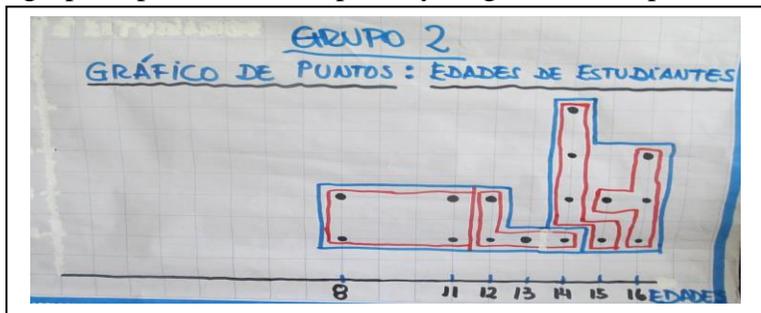
Figura 6. Respuesta del grupo 2 al ítem b

Sin embargo, movilizaron la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos cuando afirman: "...más dispersa...", esto significa que comparan como se encuentran los puntos en el

- En base a las edades de los estudiantes, se piensa dividir al aula en dos grupos con un mismo número de estudiantes en cada grupo, ¿Cómo haría usted esta división en el

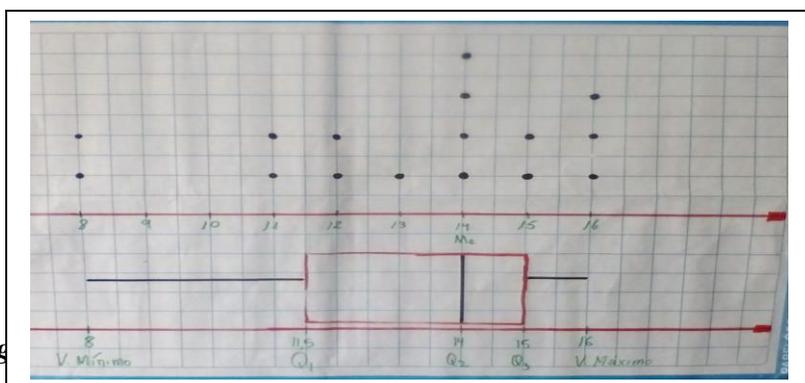
gráfico, que corresponden a los valores de la variable edad mayores o iguales a 11 y los que corresponden a la edad 8 con respecto a la media.

En la figura 7, presentamos la división del conjunto de datos en el gráfico de puntos que realizó el grupo 2, primero en dos partes y luego en cuatro partes.



**Figura 7.** División del gráfico de puntos realizado por el grupo 2

En la figura 8, presentamos la construcción del diagrama de cajas realizado por el grupo 2



**Fig**  
el grupo 2

tos realizado por

En la figura 8, observamos que los profesores desarrollaron la aprehensión secuencial del diagrama de cajas.

g) ¿considera que esta nueva representación de las edades nos brinda más información sobre la variación de las edades? Explique.

En la figura 9, presentamos la respuesta del grupo 2

g) El grafico de caja nos proporciona una información relacionados a los ~~graficos~~ cuartiles, Mediana y luego observar que cada bloque representa el 25% por otro lado analizar la dispersión o densidad de la información proporcionada, en este caso es relevante la interpretación que se hace sobre cada uno de ellos.

**Figura 9.** Respuesta al ítem g del grupo 2

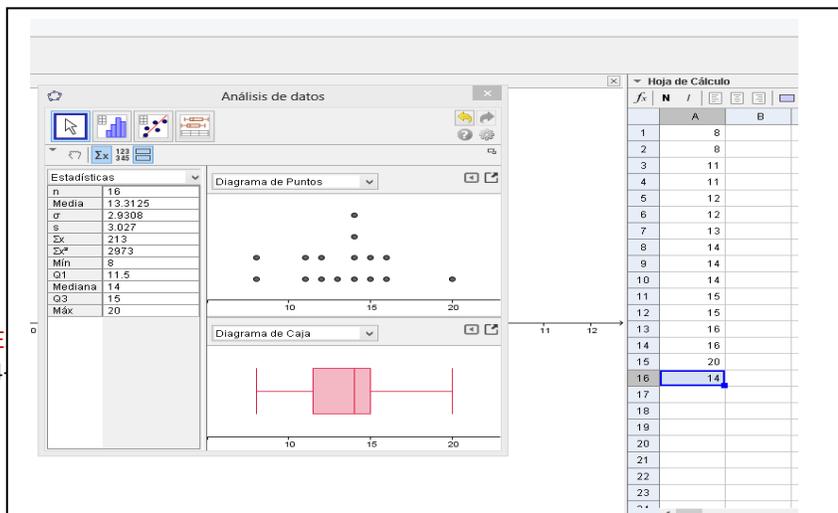
La respuesta de los profesores del grupo 2 indica que están describiendo la variación de las edades por medio de las aprehensiones discursiva del diagrama de caja porque indican que la nueva información que proporciona este nuevo gráfico son los cuartiles y la dispersión de los datos.

- h) Ahora grafique simultáneamente con el geogebra el diagrama de cajas y el gráfico de puntos para las edades de los estudiantes, ¿qué relación observas entre los gráficos con respecto a la variación de las edades?
- i) ¿Qué modificaciones realizarías en la distribución de las edades para hacer variar el diagrama de caja?

Ahora presentamos el diálogo entre los profesores del grupo 2.

Leandro: Cambia el 16 por el 20.

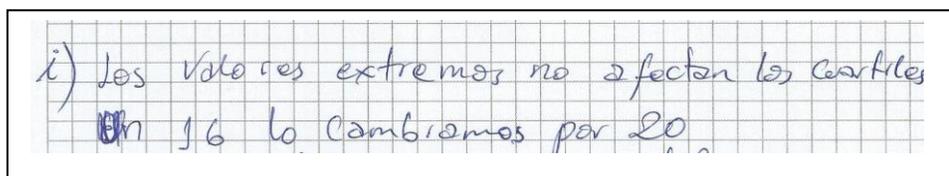
Juan: El bigote de la derecha cambia y la mediana no cambia.



**Figura 10.** Cambio de dato en el geogebra del grupo 2

En la figura 10 observamos el cambio realizado por los profesores, en este caso Juan realiza ese comentario por medio de la aprehensión discursiva del diagrama de cajas, al mencionar que la mediana no cambia, y la aprehensión perceptiva de este mismo gráfico cuando afirma que el bigote de la derecha cambia.

Finalmente, la respuesta del grupo 2 se muestra en la figura 11.



i) Los valores extremos no afectan los cuartiles.  
En 16 lo cambiamos por 20.

**Figura 11.** Respuesta al ítem i del grupo 2

El grupo 2 no responde a la pregunta a pesar de haber observado los cambios en el diagrama de cajas, pero llegan a la conclusión de que los valores extremos no afectan los cuartiles.

### **Consideraciones finales**

En el presente trabajo se realizó el análisis de variación con respecto a los cuartiles y las dificultades que presentaron los profesores en la construcción del diagrama de cajas fue, en primer lugar, en la cantidad de cuartiles que tiene un conjunto de datos, la cual ellos afirmaron que son 4 cuartiles, pero luego de una discusión grupal, ellos concluyeron que hay tres cuartiles; en segundo lugar, fue calcular el valor del primer cuartil y tercer cuartil, esta dificultad se presenta cuando el número de datos es par. Después de una discusión grupal, lograron calcular los cuartiles, ya que después de la división del gráfico de puntos en cuatro partes iguales, se percataron que el primer cuartil es la mediana de la mitad de datos y el tercer cuartil es la mediana de la otra mitad.

Durante el desarrollo de esta actividad los profesores lograron desarrollar la aprehensión secuencial del diagrama de cajas, ya que siguieron la secuencia dada para la construcción de este gráfico, y movilizaron la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y la aprehensión discursiva del diagrama de cajas para percibir y describir la variación de las edades.

En un segundo momento de la actividad, los profesores por medio del Geogebra, realizaron modificaciones en la distribución de las edades, visualizando simultáneamente los cambios en el gráfico de puntos y diagrama de cajas, y por medio de la aprehensión perceptiva del gráfico de puntos y las aprehensiones perceptiva y discursiva del diagrama de cajas percibieron la variación de las edades, de esta manera se les permitió a los profesores construir la noción de variación.

### **Referencias**

- Canossa, R.(2009). *O professor de matemática e o trabalho com medidas separatrizes*. Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia:Merlin I.D.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Boletim de Educação Matemática*, 25, 105-132.
- Vieira, M.(2008). *Análise Exploratoria de dados: Uma abordagem com alunos do Ensino Médio*. Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.