

DIFICULTADES EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA ASOCIADAS A LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN EN CURSOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Raúl Prada Núñez – Pastor Ramírez Leal
raulprada@ufps.edu.co – pastorramirez@ufps.edu.co
Universidad Francisco de Paula Santander - Colombia

Núcleo temático: II. Resolución de Problemas Matemáticos

Modalidad: Comunicación Breve (CB)

Nivel educativo: Educación Superior

Palabras clave: Modelización, Problemas de Optimización.

Resumen

Muchos académicos han argumentado que la enseñanza tradicional de problemas en la Matemática Escolar no propicia en los estudiantes una auténtica disposición hacia la modelización matemática ni la resolución de problemas, sino que por el contrario se convierte en un obstáculo. Con éste proyecto se pretende realizar una revisión de las investigaciones que han sido ejecutadas alrededor de las dificultades presentes en los estudiantes al momento de resolver problemas de optimización como aplicación de la Derivada. Se realizará una investigación mixta en dos etapas con estudiantes de primer semestre de universidad. En la primera etapa se aplicará una prueba de conocimiento con cuatro situaciones de optimización, con el fin de clasificar los estudiantes. En la segunda etapa se realizará entrevista semi-estructurada con dos estudiantes de cada grupo seleccionados de forma intencional con el fin de ahondar en sus argumentos alrededor de los procesos realizados entorno a solución de problemas de optimización del Cálculo Diferencial. Se aplicó prueba piloto con un grupo de seis estudiantes voluntarios en los que se evidenciaron diversas dificultades a nivel de comprensión de lectura, de dominio matemático pero principalmente de carencia de un método o proceso cómo abordar éste tipo de situaciones en contexto.

Introducción

Los conocimientos matemáticos son estudiados en todos los países del mundo y son abordados desde el pre-escolar hasta la educación superior, luego supone ser un pilar fundamental en la formación del ser humano. Pero desafortunadamente diferentes informes internacionales sobre evaluación en Matemáticas, como los informes PISA del 2003, 2006, 2009 y 2012 o el informe en pruebas TIMSS del 2011, evidencian bajos resultados en ésta área del saber y, más específicamente, en la resolución de problemas. Los trabajos de Castro,

(2008), Puig, (2008) y Santos, (2007) sugieren que la resolución de problemas debería ser uno de los ejes principales de la actividad matemática por ser el medio adecuado dónde se demuestre el aprendizaje matemático; ellos resaltan el aumento en los currículos de la resolución de problemas; pero los resultados en estas pruebas internacionales confirman que los intentos realizados por enseñar a los estudiantes estrategias generales de resolución de problemas no han tenido éxito.

Uno de los aspectos que se ha estudiado desde la educación matemática es la influencia de la afectividad en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y particularmente en la resolución de problemas. En 1982, Charles & Lester en su investigación reconocían que los factores cognitivos y afectivos influyen en el proceso de resolución de problemas matemáticos, destacando dentro de los factores afectivos el interés, la motivación, la presión, la ansiedad, el stress y la perseverancia. Las investigaciones de Mcleod, (1989), Blanco, (2012), Gil, Guerrero, & Blanco, (2006) y Gómez-Chacón, (2000, 2010) evidenciaron que los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas de matemáticas son susceptibles a la influencia del dominio afectivo en tres áreas: creencias, actitudes y emociones.

Ante la gran variedad de definiciones encontradas en las diversas investigaciones sobre ¿qué implica la resolución de problemas?, se resalta la necesidad manifiesta de Schoenfeld, (1992) de explicar el significado del término “*resolución de problemas*” en los programas de investigación o propuestas curriculares.

El término [resolución de problemas] ha servido como un paraguas bajo el cual se realiza radicalmente diferentes tipos de investigación. [Una exigencia] mínima debe ser requerimiento de hecho que cada estudio o discusión de la resolución de problemas se acompañe de una definición operacional del término y ejemplos de lo que significa para el autor...Gran confusión emerge cuando el mismo término se refiere a una multitud de algunas veces contradictorios comportamientos típicamente no especificados. (p. 363-364)

Puig, (1996) caracteriza el proceso de resolución como “la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándole un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (p. 31). Pero lo anterior da origen a los siguientes cuestionamientos ¿qué significa acabar la tarea o resolver un problema? ¿Cuándo el resolutor asume que tiene un problema que resolver?

¿Cómo se desarrollan caminos o acercamientos de resolución de problemas y cómo estos se refinan o robustecen en el tiempo? La búsqueda de respuestas a estos cuestionamientos requiere de los investigadores en educación matemática examinar diversos caminos potenciales que propendan por la consolidación de un proceso de construcción del pensamiento matemático en los estudiantes Camacho & Santos, (2004); Santos-Trigo, (2004a); Lesh & Zawojewski, (2007) por ello definen la resolución de problemas como:

...el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. (p. 782)

Un elemento a destacar en esta descripción es que la comprensión de las ideas matemáticas conlleva un proceso de reflexión donde el estudiante frecuentemente va transformando sus ideas y formas de pensar como efecto de la interacción activa en una comunidad de aprendizaje. Lo importante de esta postura es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias y herramientas que le permitan sobreponerse de las dificultades iniciales y fortalecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje; identificando en la resolución de problemas una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje conformada por estudiantes y docentes, buscan diversas maneras de resolver la situación propuesta y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. Otro elemento relevante asociado con los principios de la resolución de problemas se relaciona con la forma en que se conceptualiza la disciplina. Schoenfeld reconoce que un aspecto importante en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es *pensarla como la ciencia de los patrones*.

Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea...El proceso de “hacer” matemáticas es más que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados (NRC, 1989, p. 31) (citado en Schoenfeld, 1992, p. 343).

Estos patrones según Devlin, (1994) se pueden agrupar en seis categorías generales para caracterizar a las matemáticas: (i) *Patrones numéricos* que implican el reconocimiento de propiedades de colecciones de números; (ii) *Patrones de razonamiento y comunicación* que incluyen procesos de argumentación y prueba; (iii) *Patrones de movimiento y cambio* donde las matemáticas proveen los objetos para estudiar fenómenos en movimiento. (iv) *Patrones*

entre figuras o formas geométricas que permiten identificar y examinar propiedades de colecciones de esas figuras; (v) *Patrones de simetría y regularidad* que permiten capturar relaciones profundas o abstractas de las figuras u objetos; y (vi) *Patrones de posición* donde interesa analizar y describir patrones de acuerdo a su posición y no tanto bajo la consideración de sus propiedades geométricas. Finalmente, se podría afirmar que un aspecto primordial durante la interacción con los problemas matemáticos, es que los estudiantes busquen, representen y describan cambios o formas de variación entre los objetos o atributos asociados con el problema que los lleven a la identificación de patrones, conjeturas o relaciones.

Por otra parte, en Francia, Artigue & Houdement, (2007) documentan lo que consideran dos perspectivas diferentes, pero no independientes de la resolución de problemas: por una parte, la investigación didáctica y por otra, la selección curricular. La discusión del desarrollo de la investigación de la resolución de problemas la abordan a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) desarrollado por Brousseau junto con la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) en la educación matemática francesa. Un principio epistemológico en la teoría de las situaciones didácticas es que *el conocimiento emerge del proceso de resolver problemas matemáticos*. De acuerdo con la teoría:

El conocimiento matemático se atribuye a funciones diferentes que están ligadas a tres categorías de situaciones: Situaciones de acción, de comunicación, y de validación. Emerge primero como un medio para la acción a través de modelos que pueden permanecer implícitos, pero no pueden desarrollarse sin la construcción de un lenguaje apropiado y tiene entonces que llegar a ser parte de un cuerpo coherente de conocimiento. Estos pasos diferentes dependen de dialécticas distintas; dialécticas de acción, formulación y validación, las cuales requieren, para llegar a ser efectivas, organizaciones distintas de las relaciones de los estudiantes con el conocimiento matemático. (Artigue & Houdement, 2007, p. 366)

En el marco de la teoría antropológica que de acuerdo con Artigue & Houdement, (2007), representa una extensión de la teoría de la transposición didáctica propuesta por Chevallard donde reconoce una relación directa entre la resolución de problemas y el desarrollo del conocimiento matemático.

Dentro de las instituciones, el conocimiento matemático emerge de la resolución de tipos de tareas y del desarrollo asociado de las técnicas (la praxis) y del desarrollo de un discurso que explica y justifica las técnicas utilizadas. (p. 367)

Ahora, los conocimientos en matemáticas proporcionan un conjunto de herramientas de apoyo para describir, analizar y/o predecir el comportamiento de sistemas en diversos entornos del mundo real. La gran diversidad de escenarios de aplicación de los conocimientos matemáticos se ha convertido en el principal argumento de su presencia en los currículos escolares, tal como lo afirman Blum & Niss, (1991) Históricamente la modelización se incorporó en la enseñanza de la matemáticas con la intención de desarrollar en los estudiantes las habilidades y conocimientos sobre cuándo y cómo aplicar la matemáticas de forma eficiente en diversas situaciones problema surgidas del día a día del estudiante, aunque en los últimos años dichas situaciones se han puesto en escenarios del mundo laboral con el fin de ofrecer al estudiante las competencias básicas de desempeño profesional. La aplicación de las matemáticas en la solución de problemas cotidianos o llamada *modelización matemática*, debe ser vista como un proceso complejo en dónde el estudiante debe desarrollar correctamente una secuencia de procesos, citados por Verschaffel, Greer, & De Corte, (2000): a) Comprender los elementos clave de la situación problema propuesta; b) Construir un modelo matemático con los elementos y relaciones relevantes involucradas en la situación; c) Operar el modelo matemático con el fin de inferir implicaciones matemáticas; d) Validar los resultados obtenidos en función de las operaciones desarrolladas; e) Contextualizar los resultados obtenidos con el fin de realizar una correcta interpretación de ellos; f) Comunicar la solución obtenida respecto al problema inicial de aplicación.

Habitualmente, los planteamientos de problemas de aplicación que demandan de la utilización de la modelización matemática han hecho uso del registro de representación semiótico llamado “*lenguaje cotidiano*”. Verschaffel, Greer, & De Corte, (2000) definen este tipo de situaciones que hacen uso de este lenguaje como:

...descripciones verbales de situaciones problema en las cuales se plantean una o más preguntas, cuyas respuestas se pueden obtener por medio de la aplicación de operaciones matemáticas a los datos numéricos dados en el enunciado. ..

Lo ideal es que cada uno de los procesos mencionados en la modelización matemática pueda identificarse en la resolución de problemas verbales o de registro cotidiano. En Swetz, (2009) se citan varias publicaciones dónde se realiza un recorrido histórico de la presencia de problemas verbales en textos clásicos de diversas civilizaciones antiguas como la egipcia, china o india. El objetivo de este trabajo así como el de muchos otros, es el de analizar con

sentido crítico las dificultades que se derivan de la articulación de los contenidos matemáticos y diversas situaciones problema propiciadas de la cotidianidad, por ello se busca la identificación de las diversas concepciones que dificultan la solución de problemas de optimización en estudiantes de cursos de Cálculo Diferencial con el fin responder a la necesidad de implementar metodologías tendientes a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de nuestra universidad, ya que de esta forma se estaría haciendo aportes en la reducción de los índices: de pérdida académica, de repitencia y de deserción escolar; y por ende, en el aprovechamiento óptimo de los recursos económicos proporcionados por el gobierno central ya que nuestra universidad es de carácter público.

Método

El diseño y nivel de investigación se ajusta según Arias, (2012) al de investigación descriptiva de campo con medición de variables independientes (p. 23-25). **Contexto, población y muestra.** Esta investigación se realizó en la Universidad Francisco de Paula Santander de la ciudad de Cúcuta, universidad pública, ubicada en el nororiente colombiano. Para los fines de esta investigación la población objeto de estudio en la primera etapa está conformada por la totalidad de estudiantes matriculados en los cursos de Cálculo Diferencial en los diversos programas académicos. En la segunda etapa, se utiliza la técnica de muestreo no probabilístico intencional para conformar la muestra, la cual estará integrada por seis estudiantes. **Instrumento:** En cuanto al instrumento a utilizar se realizó un foro con docentes del Departamento de Matemáticas y Estadística de la UFPS, que voluntariamente participaron, cumpliendo con la condición de haber orientado el curso de Cálculo Diferencial durante al menos cinco semestres en los últimos cinco años. De dicho foro se concluyó que el instrumento debía contener cuando muchos cuatro problemas de optimización uno por cada pensamiento definido en el documento del Ministerio de Educación Nacional de Colombia denominado Estándares Curriculares en Matemáticas (pensamiento numérico, espacial, variacional y aleatorio).

Etapas del proyecto: El proyecto se desarrolla mediante las siguientes etapas.

Etapas 0 Fase Preliminar: Para el desarrollo de esta etapa se procedió inicialmente a identificar los problemas a incorporar en el instrumento. Una vez seleccionado se realizó la

primera versión del mismo la cual se aplicó a un grupo de estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas que se ofrecieron como voluntarios para la validación del mismo y que actualmente se encuentran matriculados en el curso de Cálculo Integral.

Etapa 1 Enfoque Cuantitativo: Validado el instrumento se procederá a aplicarlo a la totalidad de estudiantes que integran la población objeto de estudio. A cada instrumento se le aplicará la siguiente escala valorativa: (5) Demuestra una comprensión completa del problema incluyendo en la respuesta todos los elementos exigidos; (4) Demuestra una comprensión considerable del problema incluyendo en la respuesta todos los elementos exigidos; (3) Demuestra una comprensión parcial del problema incluyendo la mayoría de elementos exigidos; (2) Demuestra una comprensión mínima del problema excluyendo elementos exigidos; (1) Demuestra que no comprende el problema; (0) No contesta o no intenta realizar el proceso exigido. Con los resultados que se deriven de la aplicación se procederá a clasificar a los estudiantes en dos grandes grupos: los que comprenden el problema propuesto y que obtuvieron calificación global superior a 11 puntos y los que desconocen el tema con notas inferiores a 12 puntos en la prueba.

Etapa 2 Enfoque Cualitativo: Esta parte de la investigación se centrará en una muestra de seis estudiantes (tres por cada grupo) que serán seleccionados de forma intencional considerando el mayor aporte que se puedan derivar de lo realizado en el test. A ellos se les aplicará una entrevista semi-estructurada que considera los siguientes elementos a indagar en lo realizado: a) *Contenido:* conoce los conceptos y los relaciona entre sí; b) *Procedimiento:* explica el planteamiento, describe la estrategia de resolución, utiliza recursos adicionales para mejorar el entendimiento, traza un plan de acción y lo ejecuta, resuelve y generaliza, verifica resultados; c) *Aspectos generales:* añade a las cantidades se significado, estructura el trabajo organizando la información y ejecutando el trabajo con limpieza y orden; d) *Resolución Global:* la solución es correcta globalmente, obtiene resultados correctos de forma parcial, generaliza la respuesta. Estas dimensiones y criterios han sido ajustados de la rúbrica reportada en el libro de Blanco, Cárdenas, & Caballero, (2015).

Conclusión

Tras la aplicación de la prueba piloto se pudo observar en los estudiantes que a nivel general existe desconocimiento en la forma de cómo abordar problemas en contextos.

Se evidenció dificultad en la selección de datos útiles que los lleva a identificar las relaciones entre variables afectando notablemente el proceso de modelado matemático. Finalmente, de los cuatro problemas propuestos los asociados al pensamiento espacial y al pensamiento aleatorio fueron los que generaron mayores desaciertos o en su defecto, no respuesta. El pensamiento variacional generó mejor nivel de respuesta, dado que se les proporcionaba la expresión algebraica que relacionaba las variables del problema y ello resultó de utilidad al realizar procesos mecánicos de tipo algebraico.

Referencias bibliográficas

- Arias, F. (2012). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica*. (6ta. ed.). Caracas: Editorial Episteme.
- Artigue, M., & Houdement, C. (2007). *Problem solving in France: didactic and curricular perspectives* (Vol. 39). ZDM The International Journal on Mathematics Education.
- Blanco, L. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas, *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (págs. 171 – 185). Barcelona, España: Editorial Graó.
- Blanco, L., Cárdenas, J., & Caballero, A. (2015). *La Resolución de Problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria*. España: Universidad de Extremadura.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). *Applied mathematical problema solving, modelling, applications, and links to others subjects: state, trends, and issues in mathematics education* (Vol. 22). Educational Studies in Mathematics.
- Camacho, M., & Santos, M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números*, 58, 45-60.
- Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En M. Camacho, L. J. Blanco, & (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII* (págs. 113-140). España: SEIEM.
- Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving. What, Why, How*. Palo alto, CA: Dale seymour Pu.
- Devlin, K. (1994). *Mathematics the science of patterns*. New York: Scientific American Library.
- Gil, N., Guerrero, E., & Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*, 4(1), 47-72.
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional. Los Afectos en el Aprendizaje Matemático*. Madrid, España: Narcea.
- Gómez-Chacón, I. (2010). tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, T. A. Sierra, & (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIV* (págs. 121-140). Lleida, España: SEIEM.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester Jr., & (Eds), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning a project*

- of the National Council of Teachers of Mathematics* (págs. 763-804). Charlotte, NC: Information Ag Publishing .
- Mcleod, D. (1989). The role of affect in mathematical problem solving. En D. Mcleod, V. Adams, & (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving* (págs. 20-36). New York: Springer-Verlang,: A New Perspective.
- National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
- Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Granada: Comares.
- Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco, & (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII* (págs. 93-111). Badajoz, España: SEIEM.
- Santos, L. (2007). *La Resolución de Problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Santos-Trigo, M. (2004a). Exploring the triangle inequality and conic sections using Dynamic Software for Geometry. *The Mathematics Teacher*, 97(1), 68–72.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grows , *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 334-370). Nueva York: Macmillan.
- Swetz, F. (2009). Word problems: footprints from the history of mathematics. En L. Verschaffel, V. Greer, G. Van D., S. Mukhopadhyay, & (Eds), *Words and worlds: modelling verbal descriptions of situations* (págs. 73 – 92). Rotterdam : Sense Publishers.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of Word problems*. Lisse, (Holanda): Swets & Zeitlinger.