CB-325

TEORIA APOS: UM MODELO COGNITIVO PARA A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE DERIVADA FRACA

Janice Rachelli – Vanilde Bisognin
janicerachelli@gmail.com – vanildebisognin@gmail.com
Universidade Federal de Santa Maria, Brasil.
Centro Universitário Franciscano, Brasil.

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem de matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais
Modalidade: CB
Nível educativo: Terciário/Formação e atualização de ensino
Palavras-chave: Teoria APOS; Cálculo; Derivada fraca.

Resumo

O presente estudo é parte de uma pesquisa em andamento e tem por objetivo analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada fraca por estudantes brasileiros de um curso de mestrado de um programa de pós-graduação em ensino de ciências e matemática, utilizando a teoria APOS como referencial teórico e metodológico. Na análise teórica, elaborou-se a decomposição genética, em que foram descritas as possíveis construções mentais utilizadas pelo estudante, a fim de desenvolver a compreensão sobre o conceito de derivada fraca. Para a construção do conceito, foram organizadas situações de ensino compostas por atividades que tratam de problemas matemáticos que geraram a necessidade da derivada fraca e atividades que envolvem a construção desse conceito. As situações de ensino foram desenvolvidas em sala de aula, tendo como base o ciclo de ensino ACE. Os resultados obtidos, por meio dos registros dos alunos e das observações anotadas no diário de campo, indicam que os estudantes desenvolveram mecanismos mentais de abstração reflexionante que possibilitaram a construção das estruturas mentais de ação, processo e objeto e que as atividades propostas facilitaram a compreensão do conceito de derivada fraca.

Introdução

A derivada fraca é um conceito que foi introduzido por Serguei L. Sobolev (1908-1989), em 1936, tendo como motivação a fórmula de integração por partes. Esse conceito surgiu da necessidade de desenvolver uma análise matemática em que a noção de derivada não mais seja local, como a proposta por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716), mas sim tenha uma noção global e que possa ser utilizada no estudo de problemas e teorias associadas a equações diferenciais parciais.

ISBN 978-84-945722-3-4

A compreensão do conceito de derivada tem sido tema de pesquisas na área de Educação Matemática, em que diversos enfoques teóricos e metodologias vêm sendo utilizados, tendo como objetivo sanar as dificuldades observadas em sala de aula nas disciplinas de Cálculo e Equações Diferenciais e auxiliar os alunos na construção dos conceitos matemáticos. Essas dificuldades referem-se ao conceito de derivada clássica - definida pelo limite da razão incremental - e estão associadas a dificuldades que dizem respeito à formação básica, dificuldades em relacionar as representações analítica e gráfica da derivada, além da compreensão do conceito e suas diversas interpretações. A maioria dessas pesquisas evidencia a necessidade de realização de novas pesquisas como forma de investigar estratégias e alternativas para o ensino da derivada, de maneira que o estudante possa compreender e dar sentido aos conceitos e procedimentos como forma de contribuir para a construção do conhecimento matemático. Essas dificuldades e indicações de novas pesquisas podem ser encontradas, por exemplo, nos estudos de Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf (2001), García, Gavilán & Llinares (2012) e Vega, Carrillo & Soto (2014).
Além do mais, pesquisas que tratam das dificuldades inerentes aos próprios conceitos (Silva, 2011) e as que ultrapassam os primeiros tópicos do Cálculo, como as que envolvem o cálculo de várias variáveis e equações diferenciais (Rasmussen, Marrongelle & Borba, 2014), são indicadas como fonte de questões a serem investigadas.
Nesse sentido, o presente estudo, que é parte de uma pesquisa em andamento, tem como objetivo analisar como se dá a compreensão do conceito de derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado e utiliza o modelo cognitivo APOS para analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão desse conceito.

Referencial teórico

O modelo cognitivo APOS (*Action-Process-Object-Schema*), desenvolvido por Ed Dubinsky e seus colaboradores, é o referencial teórico utilizado na pesquisa. Essa teoria foi desenvolvida a partir das ideias de Piaget (1995) sobre a abstração reflexionante e vem sendo utilizada por pesquisadores como forma de conhecer as dificuldades dos alunos no que se refere aos conceitos matemáticos do ensino superior e analisar as construções mentais

ISBN 978-84-945722-3-4

utilizadas na aprendizagem, além de propor atividades de ensino que contribuam para a compreensão dos conceitos.

A teoria APOS tem como base as estruturas mentais: ação, processo, objeto e esquema e os mecanismos mentais de abstração reflexionante: interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade. A compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são então encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas (Arnon et al., 2014).

Metodologia

A metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa é de natureza qualitativa (Creswell, 2014), sendo empregada a metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (Arnon et al., 2014) e composta por três componentes:

- Análise teórica – elaboração da decomposição genética do conceito matemático. A decomposição genética é um modelo hipotético que descreve as estruturas e os mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico.
- Planejamento e implementação – elaboração de situações de ensino a serem desenvolvidas em sala de aula, baseadas na análise teórica e tendo como metodologia de ensino o ciclo de ensino ACE, que consiste em três componentes: (A) Atividades; (C) Discussão em classe e (E) Exercícios.
- Coleta e análise dos dados – desenvolvimento das situações de ensino e análise dos dados obtidos, como forma de determinar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão do conceito pelos estudantes.

A análise dos dados foi realizada a partir dos registros dos alunos nas atividades propostas nas situações de ensino e as anotações no diário de campo.

Os participantes desta pesquisa são cinco estudantes de um curso de mestrado, de um programa de pós-graduação em ensino de ciências e matemática, de uma universidade

ISBN 978-84-945722-3-4

brasileira, matriculados no segundo semestre de 2016, na disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral, a qual contempla tópicos de derivada, integral e equações diferenciais. Os estudantes, que denominaremos por E1, E2, E3, E4 e E5, são licenciados em Matemática e cursaram na graduação disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais.

Análise teórica

Para a elaboração da decomposição genética, utilizamos livros de Equações Diferenciais Parciais, nos quais o conceito de derivada fraca é introduzido, como por exemplo, o dos autores Medeiros e Miranda (1988) e tivemos por base a decomposição genética para a derivada (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 2001; García, Gavilán & Llinares, 2012; Vega, Carrillo & Soto, 2014). A decomposição genética preliminar ficou assim constituída:

PRÉ-REQUISITOS:

O estudante deve ter conhecimentos sobre:

- a diferenciabilidade de uma função;
- a integral de uma função;
- o cálculo da integração por partes;
- a definição de função com suporte compacto.

ESQUEMA DA DERIVADA FRACA:

- AÇÃO: Ação de substituir a função para obter sua derivada fraca. Ação de calcular a integração por partes e substituir os limites de integração.
- PROCESSO: Interiorização das ações descritas anteriormente e formação de um processo para obter, a partir do cálculo da integração por partes, a derivada fraca. Coordenação do processo de calcular a integração por partes para obter a derivada fraca da função. Coordenação do esquema da derivada clássica com o esquema da derivada fraca.
- OBJETO: Encapsulação do processo de obter a derivada fraca a partir do cálculo da integração por partes. A partir da estrutura dinâmica – o processo de calcular a integral por partes - obtém-se a definição do objeto matemático, ou seja, a derivada fraca da função. Generalização do esquema da função com sua derivada fraca.

ISBN 978-84-945722-3-4

- ESQUEMA: Todas as ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente do indivíduo e que permitem a resolução de um problema, fazem parte da construção do esquema da derivada fraca.

Planejamento e implementação

Para a derivada fraca, foram elaboradas situações de ensino compostas por três atividades. A primeira trata sobre soluções de equações diferenciais, a segunda, sobre a solução da equação da onda para pequenas vibrações de uma corda elástica por meio dos modelos de D'Alembert e do obtido via princípio de Hamilton, com ênfase às condições sobre diferenciabilidade exigidas para a solução e a terceira atividade, que trata do conceito de derivada fraca. Essas atividades foram planejadas de forma que o aluno compreenda que no estudo de problemas e teorias associadas a equações diferenciais parciais, surge a necessidade de desenvolver uma análise matemática em que a noção de derivada não mais seja local, ou seja, definida em um determinado ponto, mas sim, tenha uma noção global e que esta análise envolve o conceito de derivada fraca.

Coleta e análise dos dados

A coleta de dados se deu por meio do desenvolvimento das situações de ensino, em sala de aula, na disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral, perfazendo um total de 10 horas/aula. Para cada um dos tópicos trabalhados, a professora pesquisadora, fornecia as explicações necessárias para que os alunos percebessem como o conceito de derivada fraca foi introduzido na Matemática, além de esclarecer dúvidas e formalizar os conceitos matemáticos necessários à compreensão do conceito de derivada fraca. As atividades foram desenvolvidas com os alunos dispostos em dois grupos, um com dois e outro com três alunos, ou ainda, no grupo como um todo, em que eles tiveram a oportunidade de discutir e reflexionar com os colegas e a professora pesquisadora para, a partir daí, resolver os exercícios propostos nas atividades, a fim de auxiliá-los no desenvolvimento das construções mentais sugeridas pela decomposição genética.

Apresentamos, a seguir, a análise dos dados referentes à terceira atividade, a qual está diretamente relacionada ao conceito de derivada fraca. Esta atividade apresenta, inicialmente, a definição da derivada fraca que foi amplamente discutida com os alunos e, após, exercícios em que os estudantes devem responder questões sobre a derivada clássica e a derivada fraca

ISBN 978-84-945722-3-4

de funções e comparar os resultados obtidos. A Figura 1 apresenta o enunciado dos exercícios 1 e 2 desta atividade.

Exercício 1. Consideremos a função $f(x) = |x|$, $x \in (-1,1)$.

a) A função f é derivável no sentido clássico? Por quê?

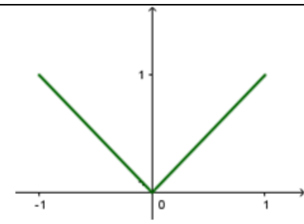

Gráfico de $f(x) = |x|$, $x \in (-1,1)$.

b) A função f é derivável no sentido fraco? Qual é a sua derivada fraca?

c) Qual é o gráfico da derivada fraca de f?

d) O que você pode concluir quanto aos resultados obtidos em (a) e (b)?

Exercício 2. Agora, consideremos $f(x) = x^2$.

a) Esta função é derivável no sentido clássico? Qual é a derivada de f?

b) Qual é a derivada fraca de f?

c) O que você pode concluir quanto aos resultados obtidos em (a) e (b)?

d) Se uma função é derivável no sentido clássico, ela é derivável no sentido fraco? Vale a recíproca? Justifique.

Figura 1 – Exercícios 1 e 2.

Todos os estudantes indicaram, em suas respostas, que a função $f(x) = |x|$ não é derivável no sentido clássico, justificando que o gráfico da função "apresenta bico" (Alunos E2, E3 e E4) e/ou, que "não existe reta tangente no ponto $x = 0$" (Alunos E1, E2, E4 e E5) e, portanto, "não existe derivada em $x = 0$" (Aluno E3), "não é uma função derivável no sentido clássico" (Aluno E4) ou "a função não é diferenciável no ponto 0" (Aluno E5). Acreditamos que, porque o gráfico $f(x) = |x|$ faz parte do enunciado no Exercício 1(a), os alunos fizeram a interpretação da derivada como a inclinação da reta tangente, demonstrando que o esquema da derivada foi utilizado para justificar o motivo de a função não ser derivável em $x = 0$.

No Exercício 2, todos os estudantes responderam que a função $f(x) = x^2$ possui derivada e sua derivada é igual a $f'(x) = 2x$. Isso mostra que os alunos compreenderam as condições de diferenciabilidade e utilizaram o esquema da derivada clássica para responder corretamente a questão.

Para responder a questão (b) dos exercícios 1 e 2, todos os estudantes partiram do conceito de derivada fraca, dado pela equação integral $\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b w(x)\varphi(x)dx$; substituíram, em cada um dos exercícios, a função dada, considerando o intervalo $(-1,1)$ no

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Exercício 1 e o intervalo (a, b), genérico, no Exercício 2 e tomando φ como função auxiliar, que é diferenciável e de suporte compacto nestes intervalos.

A Figura 2 mostra a solução obtida pelo Aluno E2 para o Exercício 1(b), e a Figura 3, a solução apresentada pelo Aluno E4 para o Exercício 2(b).

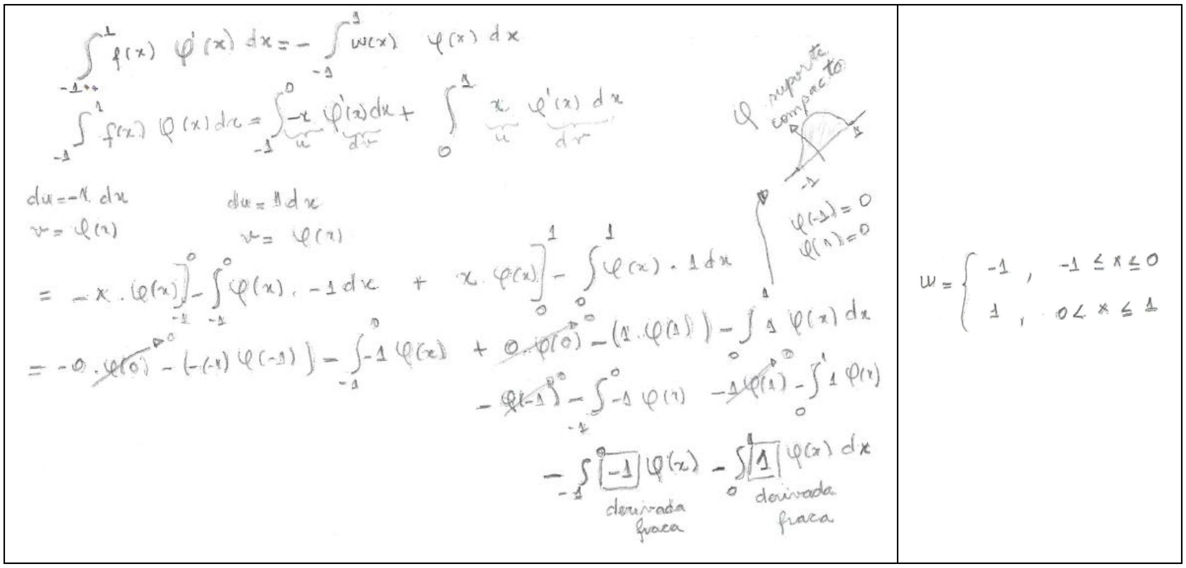

Figura 2 – Resposta do Aluno E2 ao Exercício 1(b).

As respostas fornecem evidências de que os estudantes desenvolveram estruturas mentais de ação e coordenaram o esquema da função e dos intervalos; utilizaram o processo de integração por partes, o teorema fundamental do cálculo e o fato de φ ter suporte compacto para realizar o cálculo e, por meio da interiorização e encapsulação, obtiveram a derivada fraca da função considerada.

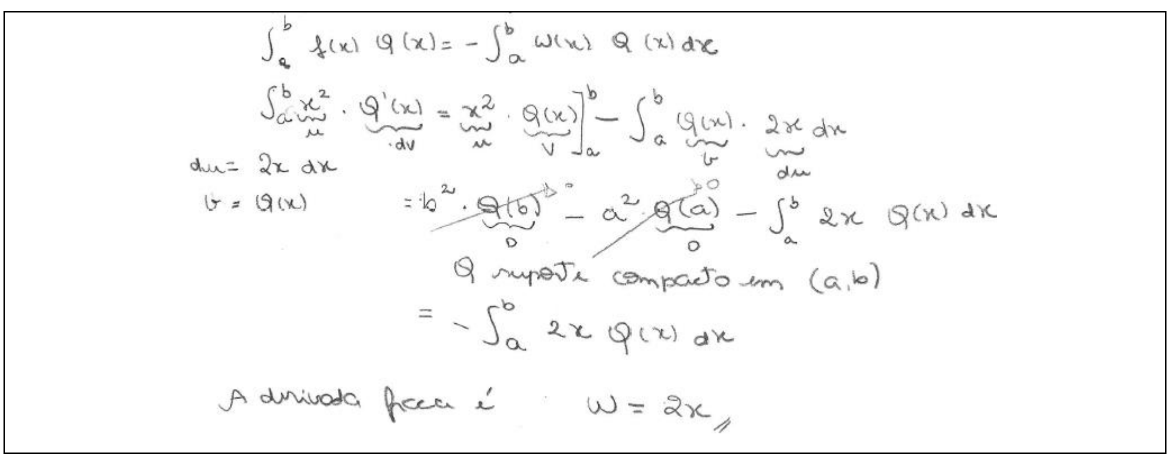

Figura 3 – Resposta do Aluno E4 ao Exercício 2(b).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Podemos observar que ambos os estudantes identificaram a função w como a derivada fraca da função f, indicando que os mecanismos mentais de abstração reflexionante de encapsulação e generalização permitiram a construção do objeto matemático: derivada fraca. Ao responderem as questões dos exercícios 1(d) e 2(c), todos os alunos observaram que a função $f(x) = |x|$ não é derivável no sentido clássico, mas possui derivada no sentido fraco e que a função $f(x) = x^2$ possui derivada clássica e derivada fraca e ambas são iguais. A Figura 4 mostra a resposta elaborada pelo Aluno E3 ao Exercício 1(d).

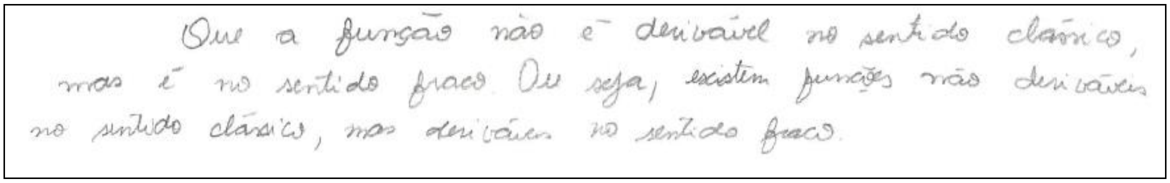
Que a função não é derivável no sentido clássico, mas é no sentido fraco. Ou seja, existem funções não deriváveis no sentido clássico, mas deriváveis no sentido fraco.

Figura 4 – Resposta do Aluno E3 ao Exercício 1(d).

No Exercício 2(d), todos os alunos responderam que, se uma função possui derivada clássica, terá derivada fraca e que a recíproca não é verdadeira.

Observamos que a compreensão sobre a diferenciabilidade de uma função no sentido clássico e no sentido fraco ficou clara a todos os estudantes e acreditamos que as atividades propostas, que têm por base a decomposição genética, favoreceram a compreensão, como também a compreensão sobre o conceito de derivada fraca. Além do mais, dificuldades, que foram anotadas no diário de campo, foram observadas em sala de aula na medida em que os alunos resolviam os exercícios. Para a derivada fraca, essas dificuldades dizem respeito, principalmente, à forma de justificar os resultados obtidos.

Considerações finais

Apresentamos aqui resultados preliminares sobre uma pesquisa em andamento. Esses resultados indicam que, mediante o modelo cognitivo, baseado na teoria APOS, foi possível a construção de mecanismos e estruturas mentais pelos alunos que possibilitaram a compreensão do conceito de derivada fraca. Salientamos que a metodologia de ensino utilizada, tendo por base o ciclo de ensino ACE, com o desenvolvimento de atividades, discussões em classe e exercícios, e que as atividades elaboradas a partir da decomposição genética e apresentadas aos alunos, favoreceram a compreensão.

Referências bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (2001). The development of students' graphical understanding of the derivative. Research in Collegiate Mathematics Education, 1-37. http://www.math.kent.edu/~edd/SlopeStudy.pdf/ Consultado 5/03/ 2016.

Creswell, J. W. (2014). *Investigação qualitativa e projeto de pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens*. Porto Alegre: Penso.

García, M., Gavilán, J. M. & Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del professor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del professor. Enseñanza de las Ciencias, 30.3, 219-236.

Medeiros, L. A. & Miranda, M. M. (1988). *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Caderno Didático UFRJ.

Piaget, J. (1995). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.

Rasmussen, C., Marrongelle, K. & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? ZDM Mathematics Education, 46, 507-515.

Silva, B. A. (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem de Cálculo. Educação Matemática Pesquisa, 13(3), 393-413.

Vega, M. A., Carrillo, J. & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. Bolema, 28(48), 403-429.

ISBN 978-84-945722-3-4