

ANÁLISIS DE LOS ERRORES COMETIDOS AL RESOLVER UN LÍMITE EN EXÁMENES DE PAU

Luis J. Rodríguez-Muñiz – Pilar Candás
luisj@uniovi.es – pcandasfernandez@gmail.com
Universidad de Oviedo - España

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Bachillerato

Palabras clave: error, examen, límite, PAU

Resumen

La clasificación de errores supone una fuente de información muy útil para el profesorado, y permite diagnosticar las deficiencias que se hayan producido en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los análisis a gran escala permiten detectar comportamientos generalizados en grandes poblaciones de estudiantes. En este trabajo se lleva a cabo el análisis de los errores cometidos en la resolución de un ejercicio en las pruebas de acceso a la Universidad de Oviedo (PAU), en España. El trabajo se ha centrado en el manejo del lenguaje y procedimientos matemáticos, por lo cual se ha seleccionado un ejercicio presentando en un contexto meramente matemático, que consistía en la resolución de un límite. Para analizar la tipología de errores se ha utilizado la clasificación realizada por Radatz (1979). Tras un primer pilotaje para calibrar la clasificación inicial, se analizaron un total de 616 exámenes, la totalidad de los que realizaron la opción de examen de PAU en la que se incluía este ejercicio. En el 71% de ellos se cometió algún tipo de error, siendo (con mucha diferencia) el más frecuente, el debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Introducción y marco teórico

El error debe ser considerado como la presencia en el alumnado de un esquema cognitivo inadecuado, no solo como la consecuencia de una falta de conocimiento o de una distracción (Socas, 1997).

Por este motivo, el análisis de errores es una línea de investigación con entidad propia en la Didáctica de la Matemática. El análisis de los errores sirve al docente de ayuda a la hora de organizar estrategias que contribuyan a un aprendizaje exitoso, pudiendo hacer hincapié en aquellos aspectos que generan mayores dificultades (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y

Hecklein, 2004). En Rico (1995) o del Puerto, Minnaard y Seminara (2004) se puede encontrar más información respecto a la evolución histórica de esta temática investigadora. Radatz (1979, 1980) observa que existen tantas clasificaciones de errores y causas de los mismos como grupos de trabajo, por lo que otorga importancia al estudio de errores y justifica la necesidad de un marco teórico de explicación de los mismos. Por otro lado, Brousseau, Davis y Werner (1986) concluyeron que los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores, lo cual no constituye necesariamente un error. Rico (1995) establece cuatro líneas de investigación en torno a los errores y detalla varias propuestas de clasificación. Las líneas de investigación son las siguientes: estudios sobre análisis, causas, elementos, y clasificación de los errores; trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores; estudios relativos a la formación de los docentes para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores del alumnado; y trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas cuantitativas.

Así pues, el análisis de los errores para su posterior clasificación otorga al docente una capacidad para ayudar al alumnado en las dificultades que surgen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Además de la clasificación de Radatz (1979, 1980), cabría mencionar otras notables, en muchos casos surgidas como modificaciones o refinamientos de la de Radatz. Así, Davis (1984), Booth (1984), o Movshovitz-Hadar, Zarlavsky e Inbar (1987) (cit. en Rico, 1995), Esteley y Villarreal (1996), Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1996) o Astolfi (1999). Otros investigadores toman alguna de estas clasificaciones como referencia y la adaptan en función del caso específico estudiado y de los pilotajes realizados, fusionando o subdividiendo esas categorías para obtener una mayor claridad.

Metodología

Se ha seleccionado la clasificación de Radatz (1979), por ser la que mejor se ajusta al contexto del ejercicio analizado. A continuación, se especifica cada tipo de error de esta clasificación:

- E1. Errores debidos a dificultades del lenguaje. Errores derivados del mal uso de símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.

- E2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas inadecuadas de situaciones matemáticas.
- E3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática.
- E4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Errores causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.
 - E4.1. Errores por perseverancia: predominan los elementos singulares del problema.
 - E4.2. Errores de asociación incorrecta entre elementos singulares.
 - E4.3. Errores de interferencia entre conceptos u operaciones.
 - E4.4. Errores de asimilación por fallos de recepción.
 - E4.5. Errores de transferencia negativa a partir de tareas nuevas. Impresión errónea de un ejercicio a partir de un conjunto de problemas previos.
- E5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Cabe recordar, brevemente, que los exámenes de acceso a la Universidad son requisito imprescindible para que acceda el alumnado que egresa del Bachillerato. En el modelo en vigor hasta el curso 2015-2016, hay una serie de materias de obligado examen y otras a elección del alumno o alumna. Entre estas últimas se encuentra las Matemáticas.

En cuanto al diseño del experimento, éste se dividió en varias fases. En una fase inicial, se analizaron los exámenes de las diferentes convocatorias de acceso a la Universidad de Oviedo (España) del curso 2014-2015, para determinar en cuáles de ellos se incluía un ejercicio de resolución de un límite (resultaron ser cuatro). Una vez clasificados los exámenes, se procedió a la resolución de los ejercicios propuestos, con el fin de comprobar los distintos niveles de complejidad que presentaban cada uno de ellos. Se desestiman los que involucran parámetros, con el fin de aislar los errores de la parametrización, y se opta por el límite que incluye una expresión trigonométrica, al ser demasiado sencillo otro con una expresión logarítmica. El ejercicio finalmente seleccionado venía expresado en el examen de la siguiente manera:

$$\text{Obtenga } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotag x - \frac{1}{x} \right)$$

En la segunda fase, se solicitó acceso a las respuestas de los estudiantes a la Comisión Organizadora de las Pruebas de Acceso a la Universidad de Oviedo, obteniendo dicha autorización para acceder a las respuestas, siempre que los exámenes se analizaran en la sede en la que están archivados, esto es, el Vicerrectorado de Estudiantes de la Universidad de Oviedo (hay que señalar que los exámenes están anonimizados).

Inicialmente, se realizó un pilotaje, seleccionando al azar los exámenes de una de las distintas sedes. Con el fin de hacer una primera aproximación al tipo de errores que pudieran aparecer y validar el modelo de errores que se usaría en el resto de ejercicios como muestra de la investigación.

La tercera fase de la investigación consistió en clasificar los errores observados en los exámenes. Durante ocho jornadas en horario de mañana se realizó el trabajo, que se vio afectado por el hecho que eran muchos más los ejercicios con errores que los ejercicios correctos y de que esa opción de examen había sido seleccionada por muchos estudiantes. El tamaño inicial de la muestra era de 646 exámenes con el ejercicio seleccionado resuelto. De ellos, el pilotaje se realizó sobre 30 ejercicios, que se desecharon para el análisis posterior, con lo que el tamaño definitivo de la muestra ascendió a N=616 exámenes. La última fase se dedicó a analizar los resultados obtenidos para poder, a continuación, extraer unas conclusiones.

Resultados

El pilotaje realizado sobre los 30 ejercicios mencionados anteriormente, confirmó que la clasificación de Radatz era pertinente para este ejercicio, ya que no se encontró ningún error que no pudiese ser clasificado con claridad. Por ello, no se aplicó ninguna modificación sobre la misma.

Tabla 1. Resultados globales

Tipo de error	Frecuencia	Porcentaje
E1	64	5,85 %
E2	0	0 %

E3	649	59,32 %
E4.1	4	0,37 %
E4.2	50	4,57 %
E4.3	159	14,53 %
E4.4	3	0,27 %
E4.5	19	1,74 %
E5	146	13,35 %

Posteriormente, el análisis de la muestra de N=616 ejercicios, dio consistencia al pilotaje, ya que se comprobó que los resultados seguían el mismo patrón. De los 616 ejercicios, tan solo en 105 no se ha cometido ningún error, mientras que otros 11 no contienen errores pero son incompletos, es decir, no se ha concluido el ejercicio. Además, hay 46 ejercicios en blanco y

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \langle \infty - \infty \rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{tg} x} = \langle \frac{0}{0} \rangle =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \langle \frac{0}{0} \rangle \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sec x \operatorname{tg} x}{2} = 0$

16 en los que se evalúa bien el límite, pero no se continúa después de haber detectado la indeterminación inicial. Por lo tanto, la cantidad de exámenes que presentan errores es de 438, que supone un 71,10% del total inicial, es decir, un porcentaje bastante elevado. El número total de errores contabilizado es de 1094. En la Tabla 1 se detalla la frecuencia con la que aparece cada error.

Como se puede observar, el error que se comete con mayor frecuencia es el error de la categoría E3, debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Fundamentalmente, en la gran mayoría de los casos, el motivo que hace que este tipo de error sea moda es una incorrecta aplicación de las reglas de derivación. En las Figuras 1 y 2 podemos apreciar dos ejemplos de estos errores. El de la Figura 1 se produce por derivar x^2 como x en lugar de $2x$.

Figura 1. Error tipo E3 cometido al derivar incorrectamente.

El de la Figura 2 se produce por no aplicar la regla de la cadena al derivar $\tan^2 x$ y al no utilizar bien los paréntesis en la derivada del $\cos^2 x$. Se debe señalar que el ejercicio aparece

3-)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot^2 x - \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{x}) = (\frac{1}{0} - \frac{1}{0}) = [\frac{1}{0}]$$

→ L'H $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{1}) = (\frac{1}{1} - \frac{1}{1}) = 1 - 1 = \boxed{0}$

↳ $\cos^2 x = (\cos x)^2 = 1^2 = 1$

corregido como correcto, a pesar de no serlo.

Figura 2. Errores tipo E3 cometidos al derivar y operar incorrectamente.

Si se analiza el resto de tipos de error, se observa que en la categoría E1, de errores debidos a dificultades en el lenguaje, el que más se comete es la no escritura del término \lim , ni de la variable ni del valor límite, es decir, se omite $\lim_{x \rightarrow 0}$

Figura 3. Errores tipo E4.4 y E5 cometidos en un ejercicio

Figura 4. Ejercicio con múltiples errores.

7: $x + 2y + 2 + 4 = 0$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \tan x}{x \tan x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} \right) = \left(\frac{\tan^2 x}{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x - x(2 \cos x - \sin x)}{\cos^4 x}} \right) = \frac{0}{2}$$

= 0

El tipo E2, errores debidos a dificultades para obtener información espacial, no se presenta en ningún ejercicio, lo que se explica por el tipo de ejercicio, en el que no existe la necesidad de manejar esta información.

El tipo E4, errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, se subdivide en cinco tipos, siendo los más frecuentes errores de asociación, E4.2, que básicamente en este análisis se limita a la asociación del elemento neutro de la suma con el de la multiplicación, y errores de interferencia; E4.3, por interferencia entre los significados de la cotangente con la tangente; bastante menos frecuentes, E4.5, errores que se producen por cambios de signo de algún término al cambiar de cara en el papel o la pérdida del signo; y, por último, E4.1, errores de perseverancia, como $1+1 = 3$, y E4.4 errores de asimilación, como, por ejemplo, el que se aprecia en la Figura 3:

Handwritten work showing a limit calculation with several errors. The student starts with the limit of $(\cot x - \frac{1}{x})$ as $x \rightarrow 0$. They attempt to use L'Hôpital's rule on the cotangent term, which is not a fraction. They then simplify the expression to $\frac{(\cos^2 x)^2 - \cos^2 x}{(\cos^2 x)^2 \cdot \text{tg } x - x \cos^2 x}$. They apply L'Hôpital's rule again, differentiating the numerator and denominator. The final result is $\frac{-2 \cos x}{-1 - 1 + 2} = \frac{-2}{0}$, which is circled in red. There are other annotations like "L'Hôpital papé?" and "0/0".

$$\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{1}{0}$$

El tipo E5, errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, es también un error bastante frecuente, siendo ejemplos de esta categoría la aplicación de la regla de L'Hôpital a cualquier indeterminación o la aplicación de técnicas de resolución de otro tipo de indeterminación (como multiplicar y dividir por la expresión conjugada). En la Figura 3 se observa que también se ha aplicado la regla de L'Hôpital a una expresión que no es una indeterminación, junto con la aplicación de la regla a una expresión que no es un cociente (algo necesario para aplicar esta regla).

Cabe reseñar también, que el error E3 es el más frecuente en general, pero también lo es en todas y cada una de las sedes en las que se distribuye al alumnado para la realización de la

prueba (es decir, no hay diferencias en la prevalencia del error en función de la procedencia del alumnado). También se puede subrayar que el ejercicio con un mayor número de errores acumuló un total de 11 errores diferentes. Otro ejemplo de errores múltiples se observa en la Figura 4, donde al resolver el ejercicio se aplica la regla de L'Hôpital sin evaluar previamente la expresión en el punto, además se derivan incorrectamente $\cos^4 x$, $\cos^2 x$ y los productos del denominador, no se simplifica la expresión, lo cual dificulta y hace más laborioso el cálculo del límite, se olvida de escribir términos al derivar, y cuando simplifica la expresión lo hace mal, y, por último, al evaluar el resultado también se equivoca.

Conclusiones

En la tipología de errores que comete el alumnado en este ejercicio predominan los debidos a aprendizajes deficientes de hechos, destrezas y conceptos previos. Parte importante, en este caso, de esa producción de errores radica en la aplicación incorrecta de las reglas de derivación, que supone un contenido perteneciente al curso anterior a aquél en el que se están examinando. En el segundo tipo de error más cometido apreciamos las asociaciones incorrectas cuando al evaluar el límite, el concepto de tangente interfiere con el de cotangente. Este error se debe relacionar con el anterior, ya que las nociones de Trigonometría pertenecen al currículo de 1º de Bachillerato. Este tipo de errores evidencia que el aprendizaje supuestamente logrado en el curso anterior no ha sido significativo. El resto de tipologías de errores son mucho menos frecuentes en proporción.

Dado que se trata de un estudio de errores en exámenes de acceso a la Universidad, no podemos utilizar los errores como método de mejora del aprendizaje, como se propone, por ejemplo, en Manmino (2002) y Barbarán y Fernández Bravo (2014). Sin embargo, sí podemos formular recomendaciones para el profesorado, habida cuenta de que los errores cometidos son suficientemente transversales respecto a los distintos centros. Entre ellas debemos citar un refuerzo de la estructura de currículo en espiral, que retome las reglas de derivación como punto de partida antes de aplicar técnicas de resolución de indeterminaciones, como la de L'Hôpital. En segundo lugar, consideramos que en el tratamiento de los límites, es necesaria una profundización mayor desde el punto de vista conceptual y es ineludible el apoyo en la representación gráfica de las funciones, en el sentido apuntado por Blázquez y Ortega (2001).

Referencias bibliográficas

- Astolfi, J. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Díada Editora.
- Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Barcelona: Síntesis.
- Barbarán, J.J. y Fernández Bravo, J.A. (2014). El análisis de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una metodología para desarrollar la competencia matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 173-186.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 219-236.
- Brousseau, G., Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing students at work. En B. Christiansen, G. Howson y M. Otte (Eds). *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 205-241). Dordrecht: Reidel Publishing.
- Booth, L (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.
- Davis, R. (1984). *Learning Mathematics. The cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Sydney: Croom Helm.
- del Puerto, S.M, Minnaard, C.L. y Seminara, S.A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4).
- Engler, A. Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Boletín de la SOAREM*, 6, 23-32.
- Esteley, C y Villarreal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en Matemática. *Revista de Educación Matemática*, 11(1), 16-35.
- Mammino, L. (2002). Empleo del análisis de errores para aclarar conceptos de química general. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), 167-173.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in mathematics Education*, 18(1), 3-14.
- Radatz, H (1979). Error analysis in mathematics Education. *Journal for Research in mathematics Education*, 10(3), 162-172.
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: A survey. *For the learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds), *Educación Matemática* (pp. 69-108). Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.