PARADOJAS E INCONSISTENCIAS

Ana Jimena Lemes Pérez
jimenalemes@gmail.com
UFABC, Brasil

Tema: IV. Formación del profesorado de matemática.
Modalidad: IV.2 Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente.
Palabras clave: Historia de la matemática, paradojas, completitud.

Resumen

Muchas veces hemos escuchado hablar de que la matemática es coherente y consistente. ¿Qué significan estos conceptos? La idea de este trabajo es hacer un recorrido por algunas paradojas e inconsistencias lógicas, pasando por la hipótesis del continuo en el contexto de los 23 problemas de Hilbert enunciados en el I Congreso de Matemáticas de Francia. Al mismo tiempo se identifican algunas motivaciones históricas y personales del matemático Kurt Gödel, así como también el contexto social que influenció para que sus resultados revolucionaran la matemática y demostraran la imposibilidad del ideal de unificación. A partir de este acontecimiento veremos la importancia del contexto social, la construcción y acumulación matemática hasta ese momento, apostando a una visión integradora, mostrando al ser humano antes que al científico como participante activo de su sociedad.

Observar como los conocimientos se construyen y circulan, invita a repensar nuestras prácticas incluyendo historia de la matemática en nuestras aulas, buscando fomentar ambientes de producción de conocimiento y resaltando el poder motivador que posee la historia.

> *-El nombre de la canción se llama "Ojos de bacalao"-dijo el Caballero Blanco.*
>
> *-Así que ese es el nombre de la canción, ¿no?- preguntó Alicia, que comenzaba a sentirse interesada.*
>
> *-No, veo que no me entiende. Así es como se llama el nombre. El nombre en realidad es "El hombre viejo viejo".*
>
> Lewis Carroll, *A través del espejo.*

Introducción

Nuevamente vuelven a coincidir tres de mis grandes pasiones. La lógica, la historia de las matemáticas y la educación matemática. Varios de los cuestionamientos que presento en este trabajo se deben a motivaciones personales que intentan recorrer algunas de mis intenciones sobre la educación matemática a la que me gustaría dedicarme.

Preguntas como: ¿es importante la lógica para formación docente? ¿y para educación media? ¿cuál podría ser el beneficio de trabajar con estos conceptos?

A través del taller iremos definiendo algunos conceptos y haciendo un recorte histórico para hacer notar las influencias -como por ejemplo del Círculo de Viena-, y al mismo tiempo intentaremos darle la visión desde la educación matemática para el salón de clase.

Comenzando

Cuando David Hilbert el 8 de agosto de 1900, en la conferencia inaugural del Congreso Internacional de Matemática de París, elige elaborar una lista con los 23 problemas matemáticos que serán "los problemas del siglo XX". Hilbert nunca pensó que su proyecto de casi 25 años sobre la unificación de la axiomática se diluiría frente al descubrimiento de Kurt Gödel.

El primero de los 23 problemas es la Hipótesis del Continuo, propuesto por George Cantor en 1874 y resuelto en primer lugar por Gödel (aunque tampoco existe un consenso sobre esto), quien a través de sus descubrimientos de lógica sería recordado en la historia como uno de los científicos que revolucionaron las matemáticas del siglo XX.

Paradojas

Las paradojas han fascinado a la humanidad desde la antigüedad. El término paradoja procede del griego (de los términos para y doxos), que significa más allá de lo creíble. En ellas se plantea una situación de aparente coherencia pero que contiene contradicciones. Algunas son simples juegos de palabras (paradojas semánticas) pero otras poseen una profunda carga intelectual muchas veces ligadas a crisis en el pensamiento, por ejemplo en los fundamentos de las matemáticas.

Así una paradoja es una idea opuesta a lo que se considera verdadero a la opinión general. Es una proposición en apariencia verdadera que conlleva a una contradicción lógica o a una situación que infringe el sentido común.

En este trabajo serán presentadas las siguientes paradojas:

- Barbero: "Un barbero en un pueblo afeita a todos los hombre que no se afeitan por sí mismo, ¿el barbero se afeita a sí mismo?"
- Mentiroso: "Si afirmo que estoy mintiendo, ¿miento o digo la verdad?"
- Gato y la tostada: "El gato-tostada debería caer tanto del lado de la tostada como de los pies del gato, ¿será que se mantiene flotando en un misterioso estado de ingravidez?"

- Examen sorpresa: "Un día de la semana que viene les pondré un examen."
- R el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. (Russell decía que la auto-referencia es la madre de todas las paradojas)
- "Esta oración tiene cinco palabras" es verdadera. "Esta oración no tiene cinco palabras" también lo es, entonces ¿es su negación?

Entrando en tema

Antes de Gödel, incluido Hilbert, se creía que todas las verdades de la aritmética eran demostrables. Él probó en 1931 que existen verdades aritméticas no demostrables, entre ellas la consistencia o no contradicción de la aritmética.

La existencia de verdades no demostrables tiene una aplicación interesante por ejemplo en la teología: puesto que Dios es una verdad no demostrable, como lo prueba la experiencia y el fracaso de demostraciones contundentes, tendríamos que basarnos en una verdad lógicamente equivalente que no puede ser más que la misma Verdad. Es más, el empleo de la lógica viene a ser un reconocimiento implícito de la existencia de la Verdad.

Pero entonces ¿es o no posible demostrar las proposiciones matemáticas?

Veamos dos ejemplos que ilustran la situación:

- Quinto postulado de Euclides.
- Hipótesis del Continuo.

Se pueden considerar tanto la veracidad como la falsedad de ambas proposiciones. ¿Será que hay errores? ¿Cómo puede existir esa contradicción?

Surge aquí el concepto de indecidibilidad o independencia, que se refiere a proposiciones que son independientes de la teoría y que al ser tomadas como verdaderas o falsas generan sistemas formales diferentes.

Por ejemplo en el primer caso, aceptando el quinto postulado de Euclides obtenemos el desarrollo teórico de la geometría euclidiana, si lo negamos surgen las no euclidianas que generaron bastante resistencia en su momento y sin embargo son totalmente consistentes.

Haciendo un recorte histórico: David Hilbert y Kurt Gödel

Hacia 1930 la situación del programa formalista de Hilbert era más o menos la siguiente. Se pensaba que el primer requerimiento había sido ya básicamente cumplido con la construcción del sistema formal de *Principia Mathematica.* Y por esta fecha muchos matemáticos y lógicos trataban de cumplir el segundo requerimiento (trataban de probar la consistencia lógica del sistema formal). Como la tarea parecía difícil, se trataba de empezar por lo más fácil, por probar la consistencia de algún sistema formal de la aritmética.

El año 1931 se publicó el artículo más famoso de Gödel y quizá de la historia entera de la lógica. Sus resultados mostraban la imposibilidad de llevar a cabo el programa de Hilbert. En primer lugar Gödel probaba que todos los sistemas formales de la matemática clásica (incluidos el de *Principia Mathematica*, la aritmética formal de Peano, la teoría axiomática de conjuntos, etc, y en general, cualquier sistema formal que cumpliese ciertas condiciones de aceptabilidad) son incompletos, es decir, que para cada uno de ellos puede efectivamente construirse una sentencia indecidible (ni ella ni su negación es deducible). Además esta incompletitud no tiene remedio. Por muchos axiomas que añadamos, los sistemas formales siguen siendo incompletos. En segundo lugar Gödel demostraba que es imposible probar la consistencia de un sistema formal (que cumpla ciertas mínimas condiciones de aceptabilidad) de la matemática clásica, incluso utilizando todos los recursos y razonamientos incorporados en el sistema, es decir, que es imposible demostrar la consistencia de un sistema formal dentro del mismo.

Kurt Gödel nació un 28 de abril de 1906 en la actual República Checa. Luego de realizar estudios en filosofía, física y matemáticas, escoge el segundo de los problemas de Hilbert para su tesis doctoral: probar que los axiomas de la aritmética son consistentes, es decir que la aritmética es un sistema formal que no supone una contradicción. De esta manera intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática.

En un panorama de pos-guerra, Gödel se instala en Viena y comienza la Universidad formando parte del tan renombrado grupo de filósofos y científicos: El Círculo de Viena.

En 1931 a los 25 años de edad, un año después de finalizar su doctorado, Gödel quien al igual que Hilbert creía en la integridad de la matemática demostró que la completitud de la aritmética era inalcanzable.

Imaginemos la sensación de los formalistas como Hilbert al comprender la magnitud de la obra de Gödel: el edificio matemático antes construido sobre el sueño del sistema perfecto de razonamiento lógico se desarmó por completo.

Lógica: Descripción de la metamatemática

Algunos de los conceptos a ser desarrollados (Gödel, 1981)

- Un sistema formal S es *completo* si y sólo para cada sentencia φ de su lenguaje formal ocurre que φ es deducible en S o que ¬ φ es deducible en S. (Todos los problemas planteados en un sistema formal completo son decidibles).
- Un sistema formal S es *incompleto* si y sólo si hay alguna sentencia φ, tal que ni φ ni ¬ φ son decidibles en S.
- Un sistema formal S es *consistente* si y sólo si hay alguna sentencia de su lenguaje formal que no es deducible en S (o, equivalentemente, si para ninguna sentencia φ ocurre que tanto φ como ¬ φ sean deducibles en S).
- Un sistema formal S es *inconsistente* o contradictorio si y sólo si toda sentencia del lenguaje formal de S es deducible en S (o, equivalentemente, si hay alguna sentencia φ del lenguaje formal de S, tal que tanto φ como ¬ φ son deducibles en S).

La historia de la matemática como recurso pedagógico

Desde nuestro punto de vista cabe preguntarse: ¿cuáles fueron las repercusiones de este descubrimiento en el ambiente científico? ¿de qué manera se puede aportar una visión constructiva de la matemática? ¿cuál sería el objetivo?

El dinamismo de la ciencia hace que día a día, se continúen incrementando avances sustanciales, que servirán de peldaños para posteriores descubrimientos. La matemática no es ajena a esta dinámica, sin embargo como dice Ochoviet (2008): "algunos estudiantes del primer año del profesorado de matemática consideran que la matemática únicamente está presente en las aulas y que las únicas necesidades sociales matemáticas son las que se derivan de la educación formal".

La matemática se ha separado de su parte humana, tal vez intentando una objetividad que la deja vacía de historia, que la transforma en contenidos -que aunque maravillosos- dejan de transmitirnos las inquietudes, frustraciones y motivaciones de quien intentó descubrirlos. De hecho en la mayoría de nuestras escuelas la matemática se basó desde siempre en un mecanismo memorístico de resolver problemas, generar un patrón de formulación, planteo y resolución, completamente ajeno a la creatividad e imaginación, apostando siempre a optimizar la velocidad de resolución y motivando la competitividad en lugar del trabajo en equipo.

Bibliografía y páginas web

Dalcin, M. Ochoviet, C., Olave, M. (2011). Una mirada a las prácticas de los formadores de futuros profesores de matemática: el profesor, el conocimiento y la enseñanza. Consultado 16/07/2013 http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/412/485

Miguel, A., Brito, A. (2010). A história da matemática na formação do professor de matemática. Consultado 16/07/2013 http://professoresdematematica.files.wordpress.com/2010/03/a_historia_da_matematica_na_formacao_do_professor_de_matematica_antonio_miguel_arlete_brito.pdf

Gödel, K. (1981). Obras Completas. Alianza Editoral, Madrid. Capítulo: Introducción a: Sobre sentencias formalmente indecidibles de principia mathematica y sistemas afines.

Nobre, S. (2004). Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. Ciencia e Educação. v.10, n.3,p. 531-543. http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v10n3/15.pdf Consultado 16/07/2013

Ochoviet, C. Dalcin, M. et al. (2011). Integrando la matemática con su historia en los procesos de enseñanza. Montevideo: Editoral Psicolibros Waslala.

Skovsmose, O. (2001). Educação Matemática Crítica: a questão da Democracia. Campinas: Papirus.

Paradojas:

Ga-To: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13478&directory=67 Consultado 16/07/2013

La del mentiroso: http://www.lasangredelleonverde.com/index.php?option=com_content&view=article&id=229:la-paradoja-del-mentiroso&catid=61:filosofia-del-lenguaje&Itemid=99 Consultado 15/07/2013

La del barbero: http://paradojasyfalacias.blogspot.com.br/2010/11/paradoja-del-barbero-o-de-russell.html Consultado 16/07/2013

Examen sorpresa, oraciones, etc: http://www.ugr.es/~nef/Docencia_files/fil%20arg%2016%2012%2010.pdf Consultado 16/07/2013