

**UNA EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE EN INTEGRALES CURVILÍNEAS MEDIANTE EL CÁLCULO DE TRABAJO CON APOYO DE TECNOLOGÍAS**

**Susana Beatriz Ruiz, Vanesa Gallardo**

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNSJ, San Juan. Argentina  
sbruizr@yahoo.com.ar , vanesagallardol@gmail.com

**Resumen**

El siguiente trabajo presenta una experiencia al trabajar con una guía de actividades de investigación, con apoyo de diferentes tecnologías en educación matemática, donde los alumnos en su resolución requieren de la realización de cálculos, análisis de representaciones gráficas, proponer conjeturas y comprobar las mismas en forma analítica, utilizando la teoría del Análisis Matemático de Varias Variables vinculada al problema físico del cálculo de trabajo. Este tipo de propuestas pueden resultar provechosas para favorecer la integración de contenidos, promover aprendizajes significativos de los conceptos matemáticos involucrados, y motivar al alumno hacia la investigación utilizando las TICs como herramientas de apoyo.

**Introduccion**

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) están atravesando nuestra vida, cambiando nuestras visiones del mundo y modificando los patrones de acceso al conocimiento y de vinculación interpersonal. En el ámbito educativo ofrecen la posibilidad de interacción de los estudiantes entre sí y con el docente, promoviendo una actitud activa, a una búsqueda y replanteamiento continuo de contenidos y procedimientos (Palomo, Ruíz, Sánchez, 2006), proporcionan herramientas y conocimientos necesarios para la realización de tareas, aumentan la participación y desarrollo de iniciativas, permitiendo filtrar información, seleccionar y tomar decisiones (Bautista, 2007).

La inserción de las TIC (en educación) puede reportar beneficios para alumnos, docentes y la comunidad educativa en general (Harasim et al., 2000). En el caso particular de los estudiantes les permite aprender de manera significativa y poder solucionar problemas cotidianos (Díaz-Barriga y Hernández, 2002). Es por ello que, en el ámbito universitario, una de las tareas claves del docente hoy es proponer a sus estudiantes actividades tendientes a resolver problemas de interés para su formación profesional, donde puedan aplicar contenidos en la resolución de problemas con ayuda del ordenador.

Este trabajo presenta una experiencia realizada a través de la puesta en marcha de una guía de trabajo, denominada “Actividades de Investigación con Software” desarrollado por alumnos que cursan la asignatura “Análisis Matemático II” de las carreras de Lic. en Astronomía y Lic. en Geofísica la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de San Juan. El material didáctico fue diseñado con el propósito de que el alumno desarrolle tareas que favorezcan a la integración y transferencia de

contenidos del Análisis Diferencial e Integral de Varias Variables en la resolución de problemas Físicos.

La temática abordada se centra en la problemática de resolver una secuencia de actividades en torno a un planteo físico inicial, donde a partir del cual se desprenden distintos cuestionamientos relacionados al cálculo de trabajo, para resolver realizando cálculos matemáticos, mediante representaciones y análisis de gráficos, utilizando la teoría de integrales curvilíneas de campos vectoriales y empleando tecnologías apropiadas.

En la selección de las actividades, del material didáctico elaborado, se tiene en cuenta que se presenten bajo planteos simples, sencillos y motivadores, que puedan resolver los alumnos en forma grupal, con la guía del docente, disponiendo de material didáctico específico en la biblioteca de la Universidad, apuntes de la cátedra y herramientas TICs educativas.

### **Material didactico elaborado**

Del material elaborado como propuesta de actividades, se pueden distinguir:

- a) Un planteo general introductorio donde se les presenta la temática general a abordar, los recursos y materiales de apoyo disponibles para realizar las actividades.
- b) Actividades de cálculo manual, con el apoyo de materiales didácticos correspondientes a la unidad temática de Integrales Curvilíneas.
- c) Actividades de cálculo, análisis y comparación de resultados con apoyo de tecnologías (estas actividades invitan al alumno a pensar, establecer relaciones, reflexionar entorno a dar respuestas a las problemáticas planteadas).
- d) Un espacio para el análisis, debate y reflexión de las tareas desarrolladas.

### **Modelo de actividades propuesta**

#### *“Actividades de Investigación con Software”*

Introducción:

A continuación te presentamos distintas actividades a desarrollar, que se desprenden a partir de un planteo general vinculado a un problema físico sobre el cálculo de trabajo, mediante el empleo de integrales curvilíneas. Para resolver las actividades serán de utilidad la guía de materiales didácticos y de referencia propuesta por la cátedra, como así también la aplicación de softwares apropiados, que permitan realizar cálculos y representaciones gráficas, tales como: wxMaxima, GeoGebra, Symbolab, Scilab, etc. Para desarrollar las actividades, además contarás con la guía y el apoyo del personal de la cátedra.

#### I- Planteo General

Una noción importante asociada al cálculo de integrales curvilíneas es la independencia de la trayectoria, es decir, al ir del punto A al punto B, importa la trayectoria? Si la aplicación

es la longitud de arco, por ejemplo la respuesta evidente es afirmativa; así parece sorprendente que en muchos problemas con integrales la respuesta es negativa. El asunto de la independencia de la trayectoria es particularmente importante en las aplicaciones que implican al trabajo, ya que con frecuencia se quiere minimizar la cantidad de trabajo, energía, etc. , asociada con una tarea dada. (Purcell, E.; Varberg, D. y Rigdon, S. E., 2001, p.770).

Actividad 1: Suponga que quiere llevar un bote de  $A=(0,0)$  a  $B=(2,1)$  (ver Figura 1) y que la primer observación es que la fuerza del viento generalmente actúa en contra.

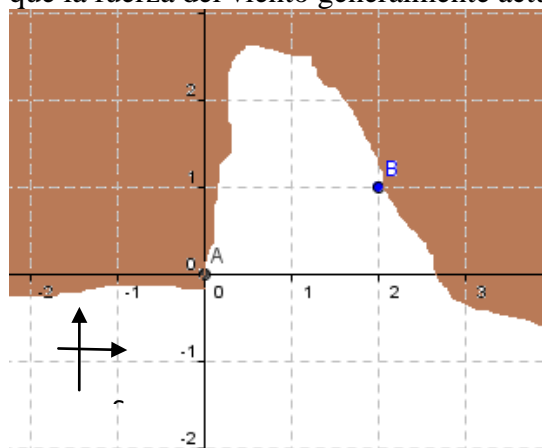


Figura 1: Imagen del relieve de la costa para Actividad 1.

Se estudia el efecto de considerar varias trayectorias de A a B. Suponga que las fuerzas del viento tienen componentes negativos, lo que indica que el viento se opone a la dirección de la trayectoria. El trabajo realizado por el viento será negativo. El trabajo que Ud. realiza para contrarrestar el viento es el negativo del trabajo realizado por el viento. En todo este proyecto, suponga que el agua no tiene fricción, de modo que el único trabajo realizado consiste en contrarrestar el efecto del viento.

- Si la fuerza del viento es  $\overrightarrow{F(x,y)} = -a\mathbf{i} - b\mathbf{j}$  con  $a > 0$  y  $b > 0$ . Calcule el trabajo realizado a lo largo de la trayectoria recta de A a B (Ver Figura 1) considerando el caso particular  $a = b = 1$ . A continuación calcule el trabajo realizado a lo largo de una segunda trayectoria (de A a B) de su elección ¿Importa aquí cual trayectoria se use?
- Debido al efecto de la ensenada a la que está entrando, la fuerza del viento es  $\overrightarrow{F(x,y)} = -a\mathbf{i} - ae^{-y}\mathbf{j}$  con  $a > 0$ . Nuevamente calcule el trabajo a lo largo de las dos trayectorias como en la parte (a) para el caso particular  $a = 1$ . Importa aquí la trayectoria?
- Ahora, sea  $\overrightarrow{F(x,y)} = -a\mathbf{i} - ae^{-y+cx}\mathbf{j}$  con  $a > 0$ . Nuevamente, calcule el trabajo a lo largo de la trayectoria lineal de A a B y muestre que el trabajo  $W$  es:  $W = a \cdot \left(2 + \frac{1-e^{2c-1}}{1-2c}\right)$ . Para  $c=0$  y  $a = 1$  el resultado debe coincidir con la parte (b).
- Ahora, para la fuerza de la parte (c), calcule el trabajo a lo largo de la trayectoria con segmentos de recta que va desde A hasta  $(0,1)$  y luego a B. Explicar por qué no se tiene independencia de la trayectoria para esta fuerza.

### II- Uso de Tecnología

*Actividad 2:* Emplear tecnología para graficar los campos vectoriales para las funciones de fuerza  $\vec{F}(x, y) = -a\vec{i} - ae^{-y}\vec{j}$  y  $\vec{F}(x, y) = -a\vec{i} - ae^{-y+cx}\vec{j}$ , con  $a = 1$  y  $c = 0.1$ . Caracterizar el comportamiento del campo vectorial al variar  $x$  e  $y$ , a partir de las gráficas.

*Actividad 3:* Un interrogante de interés en varios campos de aplicación es el siguiente: ¿Existe una trayectoria óptima (por ejemplo para minimizar el trabajo)? En tal caso cuál es? Para explorar estos temas con respecto a la fuerza del viento de la Actividad 2, considerar algunas trayectorias nuevas de A a B. En particular, considerar la familia de trayectorias parabólicas:  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t(\beta - 2\alpha t) \end{cases}$  con  $0 \leq t \leq 1$ .

- Si la trayectoria parabólica pasa por los puntos A y B, mostrar que  $\beta = \frac{1+4\alpha}{2}$ .
- Use tecnología para trazar las gráficas paramétricas de las trayectorias parabólicas para diversos valores de  $\alpha$ . Mostrar que para  $\alpha > 1$  la trayectoria se dirige “hacia el norte”, es decir, pasa por encima de la recta  $y = 1$  antes de llegar a B. ¿Qué ocurre cuando  $\alpha = 0$ ?
- Ajustar la curva hasta que la trayectoria parezca llegar a destino final horizontalmente, sin pasar por encima de la recta  $y = 1$ .
- Demostrar en forma analítica que su conjetura de la parte (c) es correcta.
- Calcular ahora el trabajo para ir de A a B a lo largo de diversas trayectorias parabólicas.
- ¿Cuál es la situación sobre la minimización del trabajo cuando no hay restricciones respecto a las trayectorias a considerar? ¿Es esto sorprendente de alguna manera?

*Actividad 4:* Espacio para expresar sus vivencias respecto a las actividades de investigación desarrollada. Indique aspectos positivos y negativos de esta experiencia.

### Muestra de algunas actividades desarrolladas por los alumnos

Para realizar las distintas actividades de la Guía de Investigación, los alumnos se integran a grupos de trabajo en el aula, de no más de tres personas. Resuelven las actividades en horario extra-áulico, con guía y apoyo de docentes en horarios de consultas pre-acordados en la cátedra. Resuelven las actividades utilizando: lápiz, papel y softwares tales como: wxMáxima y GeoGebra. La mayoría emplea wxMaxima debido a que es un software simple de utilizar y cuentan ya con experiencia en su uso. Los conocimientos previos que requieren emplear en la resolución, corresponden a contenidos de las asignaturas Análisis Matemático I, Geometría Analítica, Física I y Análisis Matemático II, algunos de ellos son:

- ✓ Ecuaciones paramétricas de curvas en el plano.
- ✓ Cálculo de integrales indefinidas.
- ✓ Concepto de trabajo.

- ✓ Concepto de fuerza conservativa.
- ✓ Cálculo de integral de línea.
- ✓ Teoría de la función potencial.
- ✓ Concepto de derivada en un punto.
- ✓ Recta tangente a una curva en un punto.
- ✓ Cálculo de derivadas.
- ✓ Resolución de sistemas de ecuaciones.
- ✓ Representaciones de campos vectoriales,
- ✓ Teorema Fundamental del Cálculo, etc.

El tiempo para desarrollar las actividades y presentar un informe final fue de aproximadamente dos semanas. En este período se realizan breves encuentros entre el personal docente con cada grupo de trabajo para corroborar y guiar el avance en la resolución de las actividades de investigación.

En general, para la Actividad 1, los alumnos no presentan grandes dificultades en realizar los cálculos respectivos y responder a los cuestionamientos planteados. Lo resuelven en forma manual. Definen la ecuación de la recta que pasan por los puntos A y B en forma paramétrica y plantean las integrales definidas para el cálculo de trabajo, tienen en cuenta las definiciones previamente dadas en la cátedra Análisis Matemático II sobre trabajo. Realizan los cálculos y comprueban, para los apartados (a) y (b), que el trabajo es el mismo al considerar distintas curvas que pasan por los puntos A y B. Concluyen en estos casos que: las fuerzas son conservativas y los trabajos sólo dependen del punto inicial y final del recorrido, no dependen de las trayectorias elegidas. En el apartado (c) plantean la integral respectiva y comprueban el resultado considerando el valor absoluto de la integral obtenida. Mientras que para el apartado (d) los resultados obtenidos de trabajo resultan distintos, para distintas trayectorias, por lo que concluyen que la fuerza del viento no es conservativa en este último caso.

Para la Actividad 2, realizan las representaciones gráficas con apoyo de tecnologías (ver Figuras 2: a) y b) ) e interpretan el comportamiento de las fuerzas según las direcciones y el crecimiento o decrecimiento de las respectivas magnitudes, al variar x e y.

Los alumnos expresan: “*Las direcciones del viento en ambos casos se comportan del mismo modo: se mantienen casi verticales, avanzando prácticamente de norte a sur; mientras que el comportamiento de las intensidades se observan diferentes. Para  $\vec{F}(x, y) = -\check{i} - e^{-y} \check{j}$  se puede apreciar que a medida que se avanza a la zona sur la intensidad del viento se incrementa; mientras que para el modelo  $\vec{F}(x, y) = -\check{i} - e^{-y+0.1x} \check{j}$  se incrementa al avanzar hacia el Este (en la dirección del eje x positivo), y también al avanzar hacia el sur (dirección del eje y negativo).*”

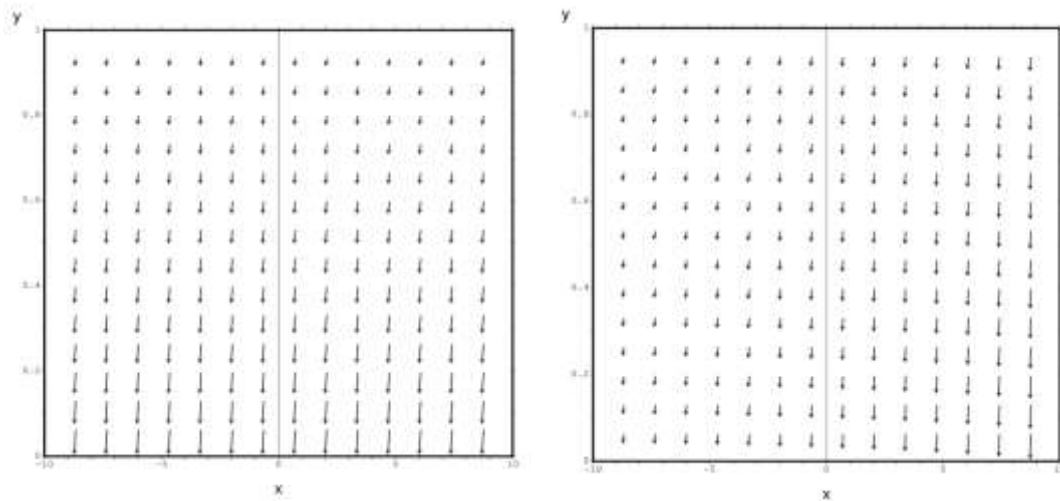


Figura 2: Graficas de: a)  $\overrightarrow{F(x,y)} = -\hat{i} - e^{-y} \hat{j}$ ; b)  $\overrightarrow{F(x,y)} = -\hat{i} - e^{-y+0.1x} \hat{j}$ .

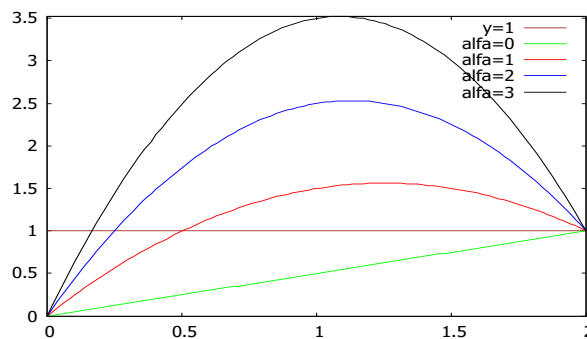


Figura 3: Grafica de distintas trayectorias parabólicas en la Actividad 3 (b).

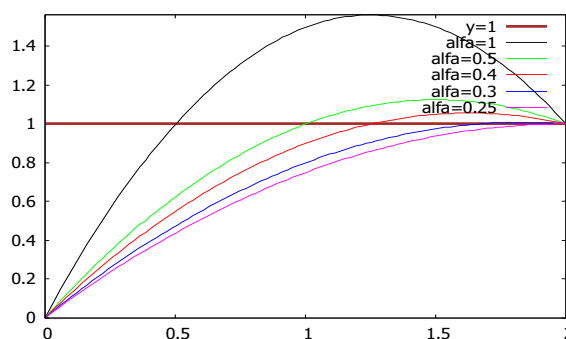


Figura 4: Ajuste de trayectorias en la Actividad 3 (c).

Luego de verificar la igualdad planteada en Actividad 3(a), al resolver un sistema de ecuaciones, los alumnos realizan las representaciones graficas correspondientes a los apartados (b) y (c). Pueden visualizar gráficamente el comportamiento de las trayectorias a medida que  $\alpha$  va decreciendo y se aproxima a cero. En el caso particular, cuando  $\alpha = 0$

comprueban visualmente que la trayectoria se convierte en la recta que pasa por los puntos A y B (ver Figura 3). Mientras que los valores propuestos de  $\alpha$ , desde las graficas, para el ajuste del apartado (c), en los distintos grupos, resultaron se tales que  $0.2 \leq \alpha \leq 0.3$ . La determinación del valor correcto de  $\alpha$  lo realizaron, con la guía y apoyo de la cátedra, bajo la consideración de que la pendiente de la trayectoria en B fuera nula.

La resolución del último apartado, en la Actividad 3, fue muy movilizador y generó conflictos a la hora de los cálculos y responder a los interrogantes. Abordados los cálculos de las integrales con diferentes herramientas tecnológicas, ninguna de estas proporcionó respuestas (en el caso de wxMaxima devuelve como salidas expresiones que escapaban de poder ser interpretadas en forma adecuada). La cátedra interviene en cada trabajo grupal, se les informa de que si bien las funciones a integrar en la actividad dada son continuas y por el Teorema Fundamental del Cálculo (Leithold, L., 1994, p. 362-365) son integrables, en estos casos (como también para algunas funciones en Probabilidades y Estadística donde aparece como término a integrar la expresión  $e^{\frac{x^2}{2}}$ ) “no existen fórmulas elementales de primitivas”, es decir, en términos de polinomios, raíces, senos, cosenos, exponenciales, logaritmos, etc., que determinen funciones primitivas  $F(t)$  tal que  $F' = f$  (Ivorra, C., 2009). Por lo que los alumnos concluyen la Actividad 3 observando que: no siempre los problemas de optimización se pueden resolver para todo tipo de trayectoria sin restricciones.

En esta instancia final del desarrollo de actividades (Actividad 4), los alumnos expresan:

- la importancia de este tipo de actividades de aplicación de contenidos matemáticos.
- Consideran como muy positivo la posibilidad de usar distintos programas en la resolución de las actividades, pudiendo experimentar las posibilidades y limitaciones de softwares.
- Este tipo de actividades de investigación con software deberían seguirse realizando en la cátedra.

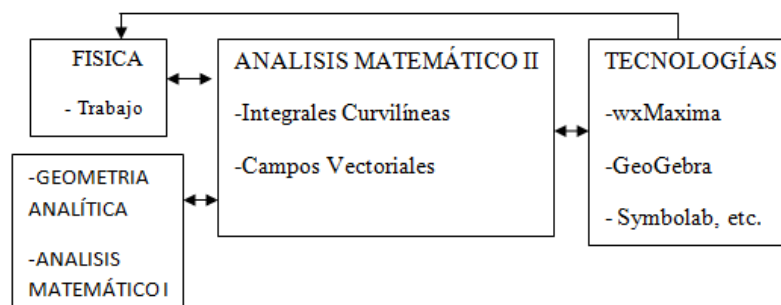


Figura 5: Esquema general de contenidos y tecnologías utilizadas en la experiencia.

### Conclusiones generales

Desde esta propuesta de trabajo, se pudo observar que este tipo de actividades integradas, donde el alumno se lo motiva con planteos simples vinculados a áreas de interés en su

formación profesional y puede resolver, analizar y dar respuesta a los cuestionamientos utilizando software apropiados, como también experimentar en problemáticas de investigación donde no se pueden brindar respuestas generales e invitan al análisis de las mismas en cuanto a las limitaciones al respecto, involucran conductas en las que tienen cabida la creatividad y en las que la interacción favorece la comunicación y el pensamiento crítico. Además, el poder resolver actividades matemáticamente en la búsqueda de soluciones a problemas relacionados al campo de la física, y poder comprobar que las soluciones propuestas mediante visualización gráficas se corresponden con las obtenidas en forma analítica favorece a la auto-estima del alumno, motivándolo en la búsqueda y el aprendizaje de nuevos contenidos relacionados con la temática; como así también a la integración de contenidos, articulando la teoría y la práctica. Es una experiencia con resultados satisfactorios y gratificantes tanto para el docente como para el alumno.

### Referencias bibliográficas

- Bautista, J. (2007). *Importancia de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje*. Recuperado de: Blog Comunidades Virtuales <http://comunidadesvirtuales.obolog.com/importancia-tic-proceso-enseñanza-aprendizaje-40185>
- Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación Constructivista*. México: Mc-Graw Hill
- Harasim, L., Hiltz, S.R., Turoff, M. y Teles, L. (2000). *Redes de aprendizaje: Guía para la enseñanza y el aprendizaje en red*. Barcelona: Editorial Gedisa/EDIUOC.
- Ivorra, C. (2009). Funciones sin primitiva elemental. Gaceta de la real Sociedad Matemática Española, ISSN 1138-8927, 12, 3,2009, 483-516. Recuperado de: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Primitivas.pdf>
- Leithold, L. (1994). *El Cálculo* (7 ed). México: Oxford University Press.
- Palomo, R., Ruíz, J. y Sánchez, J. (2006). *Las TIC como agentes de innovación educativa*. Sevilla: Dirección General de Innovación y Formación del Profesorado, Edición Junta de Andalucía, Consejería de Educación.
- Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. E., (2001). *Cálculo* (octava edición). México: Pearson Educación.