SOBRE EL APRENDIZAJE DE INFINITÉSIMOS PARA DESARROLLAR COMPETENCIAS Y ESTRATEGIAS

María Inés Ciancio, Susana Beatriz Ruiz, Elisa Oliva
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la UNSJ, San Juan. Argentina
miciancio@hotmail.com, sbruizr@yahoo.com.ar, elisaoliva65@gmail.com

Resumen

La siguiente comunicación, muestra por medio de una guía de actividades, el aprendizaje y comprensión del concepto: Campo Escalar Infinitésimo. La misma está diagramada a través de tres momentos de desarrollo. Primer momento: presentación de situaciones de cálculo de límites que el alumno no puede resolver con sus saberes previos. Segundo momento: aprendizaje y comprensión del concepto infinitésimo, comparación y sustitución de los mismos en cálculos de límites para campos escalares. Tercer momento: aplicación de nuevas estrategias y del concepto apropiado para solucionar las situaciones del primer momento. Puesta en común sobre los resultados de la experiencia, en cuanto a su valoración como ambientes de aprendizaje colaborativo y la adquisición de nuevas competencias.

Introducción

En esta comunicación, se presentan diferentes situaciones en las que se manifiesta la importancia y necesidad de manipular el concepto de Función Infinitésimo dentro del cálculo de límite, para funciones de dos variables. Asumiendo que el concepto de Función Infinitésimo es escaso y, desarrollado en forma muy breve, sin tomar en cuenta toda su significación en los primeros cursos donde se imparte la enseñanza del cálculo, es que se propone este trabajo de profundización del concepto a través de una práctica organizada. Esta actividad, es desarrollada con los alumnos del primer año, segundo semestre, de la Lic. En Ciencias Geológicas en la cátedra Matemática II, de la Fac. de Ciencias Exactas F. y Ntles de la UNSJ.

En esta propuesta de guía organizada, el tema trabajado es el aprendizaje y la comprensión del concepto Infinitésimo y sus características principales (comparación, sustitución, etc.). Se presentan cuatro instancias de trabajo para el alumno, que está integrado dentro de un grupo. La primera instancia, presenta situaciones problemáticas (desafíos) de cálculo de límites dobles; para que el alumno intente resolverlas, aplicando sus saberes previos, y las diferentes estrategias aprendidas, la capacidad de observación para elegir y aplicar conceptos relacionados que le permitan determinar la solución. Ante la sensación de angustia por la imposibilidad de resolver los desafíos, en un segundo momento se desarrolla la concepción teórica del Infinitésimo y se muestra su vinculación con la problemática del cálculo de límites “insalvables”. Una vez desarrollado en completitud este tema, a continuación se propone un tercer momento de trabajo, en el cual los grupos ya cuentan con todas las herramientas teóricas para enfrentar la solución de los desafíos. Cada grupo presenta los pasos seguidos en la resolución de los ejercicios y se hace una puesta en común sobre las estrategias aplicadas. Se complementan los análisis con gráficos utilizando wxMaxima.

Justificación de la Propuesta

Un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de situaciones y problemas por resolver es como, el concepto adquiere sentido para el alumno; y así basándonos en la propuesta de Martinand (R Cantoral Uriza- R.M Farfán -2004)"- quien propone la idea de la multiplicidad de fuentes posibles para inspirar y fundar la legitimidad de un conocimiento o saber escolar, se trabaja esta propuesta integrada al aprendizaje del cálculo del límite para funciones de dos variable El esquema trabajado fue el siguiente (R. Cantoral y R.M.Farfán. (2004)):

- Pertinencia: En un primer momento de la experiencia, se presentan situaciones problemáticas seleccionadas, para que posibiliten generar cierto tipo de relaciones humanas, de manera que el concepto aparezca como medio útil para optimizar estas vinculaciones.
- Exhaustividad: En forma colaborativa se desarrollan la totalidad de las situaciones planteadas, a fin de adquirir nuevas habilidades y promover el desarrollo de capacidad para analizar, aplicar y transferir a futuras situaciones el tema infinitésimo.
- Consistencia: Se articulan los conceptos trabajados de manera que éste contenido pueda ser desarrollado integralmente y aplicado adecuadamente en nuevas situaciones.

Contenidos matemáticos trabajados

Para la puesta en marcha de la experiencia, se requiere que el alumno tenga entrenamiento en el manejo simbólico matemático, lea adecuadamente consignas propuestas para interpretar y analizar, adecuar a cada planteo los saberes previos que posee sobre el tema; utilizar estrategias de solución; reconocer las limitaciones de herramientas operativas que le impiden llegar a la solución del planteo.

Saberes y Contenidos que el alumno ha adquirido antes de la propuesta:

- ✓ Apropiación y manejo de temas relacionadas con funciones reales de variable real $y=f(x)$.(Desarrollo completo del curso Matemática I, en el primer semestre)
- ✓ Prácticas reforzadas de cálculo; para límites de la función $y=f(x)$; aplicando propiedades, teoremas, sustituciones, combinadas con estrategias algebraicas.
- ✓ Apropiación y manejo de conceptos: dominio, imagen, gráfica, para funciones reales de dos variables independientes $z=f(x,y)$.
- ✓ Límites Dobles y sus propiedades.
- ✓ Manejo de diferentes técnicas algebraicas y operativas aplicadas al cálculo del límite doble
- ✓ Apropiación, interpretación y aplicación de: teorema del encaje, límites trigonométricos especiales.

Saberes y Contenidos que el alumno adquiere luego de la propuesta:

- ✓ Definición e interpretación del concepto de Infinitésimo.
- ✓ Desarrollo de contenidos relacionados con el Infinitésimo
- ✓ Comparación de Infinitésimos (orden, suma)
- ✓ Algunos infinitésimos destacados en el punto *O=(0,0)*
- ✓ Importancia del infinitésimo para solucionar cálculos de límites y para la demostración de teoremas de diferenciabilidad.

Material trabajado

A continuación se muestra el formato y presentación de la guía trabajada en la experiencia:

MODELO DE GUÍA PROPUESTA

(Primer Momento de la Experiencia)

Objetivo: Proponer y discutir sobre la respuesta a los ítems planteados a partir de conceptos importantes ya adquiridos.

- ✓ Planteo 1: Utilice propiedades, herramientas y procedimientos algebraicos que considere adecuados para obtener la respuesta de los siguientes ejercicios; se sugiere trabajar en equipo a fin de optimizar los tiempos (dispone de un módulo para esta actividad) (Thomas.; Finney., (1999). Stewart (2002)).

a) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen(xy)}{x} =$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{tg(x^2y)}-1}{2sen(x^2y)} =$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2+2y-3)(1-cosx)}{x^2(y-1)} =$ d) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{lnx.tg(y-1)}{xy-x-y+1} =$

A continuación, complete las siguientes preguntas de acuerdo a su vivencia:

1. Luego de trabajar sobre cada límite propuesto, y con las herramientas que posee en estas instancias pudo determinar alguna respuesta?
2. Mencione cuales han sido los medios analíticos que Ud. pensó que lo podrían haber conducido hacia la solución del apartado a) b) y d).
3. Y para el planteo c)?
4. Cuál es su opinión en cuanto a la respuesta esperada?

(Segundo momento de la experiencia)

Luego de haber realizado la lectura de las respuestas, y una reflexión sobre las mismas; en una puesta en común, se enfatiza la necesidad de adquirir nuevos contenidos y conceptos matemáticos, apoyados con estrategias operativas que conduzcan a las respuestas del planteo 1).

Objetivo: Adquirir nuevos contenidos y conceptos del cálculo matemático, relacionados a situaciones que involucran el concepto de límite. Concentrarse en la comprensión de los conceptos.

Planteo 2: Lea correctamente para interpretar las siguientes definiciones:

Definición: (Para función de una variable independiente)

Se dice que una función y= f(x) es un infinitésimo en un punto x=a si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Desde el punto de vista intuitivo un ***infinitésimo es una función,*** que se aproxima a cero tanto como queramos sin más que aproximar x al punto a. $(x \to a)$ y $(f(x) \to 0)$

Definición: (Para función de dos variables independientes)

Se dice que una función z= f(x,y) es un infinitésimo en un punto (x,y)=(a,b) si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$

Una de las cuestiones más interesantes en el estudio de los infinitésimos es su comparación (a través del cociente entre ellos).

Comparación de Infinitésimos

Comparar dos infinitésimos nos permite averiguar cuál de los dos se acerca a cero más rápidamente y este conocimiento nos puede ser muy útil en otros cálculos (aquí solo trabajamos su aplicación al cálculo de límites). Así, saber que dos funciones muy diferentes tienden a cero con la misma velocidad en las cercanías de un punto nos permite que bajo ciertas condiciones “podamos sustituir una por otra” en nuestros cálculos y de esa manera simplificarlos.

El procedimiento para comparar dos infinitésimos (trabajamos en dos variables) en un punto P=(a ,b), consiste en calcular el límite de su cociente cuando un punto genérico P=(x, y) (que puede o no pertenecer al dominio de dichos campos escalares) tiende al punto P= (a, b). Este procedimiento nos permite establecer la siguiente clasificación:

En todo lo que sigue supondremos que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son dos infinitésimos en un mismo punto P=(a,b), es decir.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = 0$$

Infinitésimo de Orden Superior: Diremos que $g(x,y)$ es un infinitésimo de orden superior a $f(x,y)$en el punto P=(a,b) si se verifica: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left|\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right| = +\infty$

Observe que , intuitivamente, esto significa que aunque ambos términos de la fracción tienden a cero, el denominador lo hace más rápidamente que el numerador, por lo que a pesar de que ambos se van haciendo cada vez más pequeños, el cociente se hace cada vez más grande, a medida que (x,y) se acerca al punto (a,b).

Infinitésimos del mismo orden: Diremos que los campos escalares f(x,y) y g(x,y) son infinitésimos del mismo orden en el punto P=(a,b) si se verifica: $\lim_{(x.y)\to(a.b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = C,\ C \neq 0\ y\ C \neq 1$ Intuitivamente, esto significa que ambas funciones tienden a cero a velocidades parecidas, aunque no totalmente equivalentes.

Infinitésimos Equivalentes (Importante): Diremos que los campos escalares f(x,y) y g(x,y) son infinitésimos equivalentes en el punto P=(a,b) si se verifica: $\lim_{(x.y)\to(a.b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = 1$ Intuitivamente, esto significa que ambas funciones tienden a cero a la misma velocidad, por lo que en las cercanías del punto los valores de f(x) y los de g(x) son aproximadamente iguales.

Sustitución de Infinitésimos (Importante): (Vera (2005)) Si en una expresión funcional se advierte que hay un infinitésimo que está multiplicando o dividiendo, se lo puede "sustituir" por otro "equivalente", con el objeto de simplificar los cálculos.

Considere que $f(x,y) \approx h(x,y)$ y $g(x,y) \approx t(x,y)$ (Recuerde concepto de Infinitésimos equivalentes).
Ahora suponga que $f(x,y)$ aparece multiplicando dentro de un límite que usted debe calcular:
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \boldsymbol{f(x,y)}.m(x,y) =$
$(multiplicando\ y\ dividiendo\ por\ su\ equivalente) \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\boldsymbol{f(x,y)}}{\boldsymbol{h(x,y)}} \boldsymbol{h(x,y)}.m(x,y) =$
$(resulta) \lim_{(x,y)\to(a,b)} \boldsymbol{h(x,y)}.m(x,y)$
Importante!! Pudo sustituir $f(x,y)$por $h(x,y)$.

En forma análoga, si tiene una expresión donde el infinitésimo esté dividiendo lo puede sustituir por un infinitésimo equivalente.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de infinitésimos que son equivalentes en el origen de coordenadas, y que Usted puede utilizarlos para cálculos de límites.

Tabla de Algunos Infinitésimos Equivalentes en el Origen de Coordenadas (Tome en cuenta que $\boldsymbol{z}$ puede ser cualquier función que tienda a (0,0); aunque (x,y) tienda a un valor distinto del (0,0)).

$$sen\, z \approx z \qquad tg\, z \approx z \qquad arc\, sen\, z \approx z \qquad arctg\, z \approx z \qquad 1 - \cos z \approx \frac{z^2}{2}$$

Infinitésimos Logarítmicos:

$$\ln(1+z) \approx z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z \approx \ln(1+z) \\ e^z - 1 \approx z \\ a^z - 1 \approx z\, lna \\ (1+z)^n \approx 1 + nz \\ \sqrt[n]{1+z} \approx 1 + \frac{z}{n} \end{array} \right\}$$

Sumas de Infinitésimos: Cuando un infinitésimo está sumando o restando, en general, no se puede sustituir por otro equivalente (por ejemplo, en una variable la suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menos orden. Véase ejercicio del anexo). Tome en cuenta que existen casos concretos en los que se pueden aplicar infinitésimos al caso de sumas. En dos variables esta sustitución es mucho más restrictiva, dado que no es aplicable la Regla de L'Hopital.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] \neq \lim_{(x,y)\to(a,b)} [h(x,y) + t(x,y)]$$

(Tercer momento de la Experiencia)

Luego de la lectura comprensiva, que se realiza sobre las definiciones anteriores, se propone al alumno establecer alguna relación entre los conceptos de infinitésimos y su comparación, con otros conceptos que ya posee con anterioridad.

(Por ejemplo ¿En que se basa para poder justificar que $sen\, z \approx z$? (Aquí se espera que el alumno relacione Infinitésimos equivalentes con el teorema que establece $\lim_{(x,y)\_>(0.0)} \frac{Sen\,(xy)}{(xy)} = 0$). Se complementa este estudio a partir del diseño y la visualización de las graficas de las funciones infinitésimos, con ayuda del software wxMaxima (Ver Figura 1).

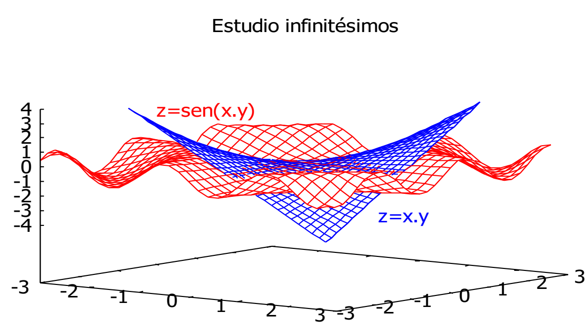

Figura 1: Visualización gráfica de la equivalencia de infinitésimos sen(x.y) ≈ xy

Objetivo: Aplicar los nuevos contenidos, para utilizar algún criterio en torno a la investigación y búsqueda de la respuesta a los ejercicios del planteo 1).

Planteo 3: Trabajando en grupo, nuevamente intente obtener la respuesta para los ejercicios del planteo 1. Tome en cuenta los conceptos recientemente apropiados y la forma de vincularlos dentro de su problema.

Planteo 4: A continuación, le proponemos más ejercicios para profundizar y adquirir nuevas habilidades, relacionadas con estrategias para resolver ejercicios de cálculo de límites de campos escalares bidimensionales.

a)$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1-\cos(x^2-y)}{(x-\sqrt{y})^2}$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{senx\ ln(1+y)}$

c) $\lim_{(x,y)\to(,0)} \frac{senx\ sen(3y)}{2xy}$ d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy}$

(Cuarto momento de la experiencia)

Habiendo concluido con las actividades propuestas, se solicita a cada alumno que en forma individual responda a las siguientes preguntas y las entregue al equipo de cátedra.

- ✓ Relacionadas a su equipo de trabajo: Considera que resulta adecuado trabajar en grupo? (Considere tiempo utilizado, aprendizaje de nuevas estrategias de resolución, discusión de herramientas aplicadas, aprendizaje en un entorno colaborativo, etc.).
- ✓ Relacionadas con el contenido trabajado: Considera el concepto de infinitésimo (comparación y sustitución), como un saber relevante en el planteo y solución de situaciones de cálculo de límites?. Justifique su respuesta.(Mastache (2009))
- ✓ Relacionadas con el uso de herramientas tecnológicas: En caso de poder contar con software y la pc, ¿Qué actividades propondría para mejorar esta experiencia? (Considere gráficos, cálculos, etc).(Gonzalez G. (2010))

Nota: Se adjunta, la solución de uno de los ejercicios propuestos, y la muestra del ejercicio donde la sustitución de la suma de infinitésimos no es efectiva en dos variables.

Resultados observados

Esta experiencia, es desarrollada con alumnos del primer año de la Lic. En Ciencias Geológicas; en una clase teórico-práctica, para la cual disponemos de cuatro horas reloj. La guía es entregada ese mismo día, y el trabajo se hace sin uso de la computadora, dado que la meta propuesta es asimilar y comprender la importancia de apropiar nuevos conceptos del cálculo diferencial ,que le permitan generar una base sólida de conocimientos matemáticos que lo impulsen a emprender nuevos desafíos.

Se puede advertir que en el primer momento de la experiencia, el alumno manifiesta su desconcierto y angustia por no poder encontrar solución a ninguno de los planteos (se advierte que utilizan las propiedades de límite, los teoremas vinculados al mismo tema, estrategias de cálculo algebraico, sustituciones trigonométricas, etc.). Aquí, es necesaria una reflexión sobre la situación generada, promoviendo y conduciendo al alumno a tomar conciencia sobre la necesidad de concentrarse en la comprensión de nuevos conceptos: el concepto a desarrollar es el de Infinitésimo y sus Sustituciones en una situación de cálculo de límite.

El segundo momento de la experiencia (comprensión del concepto), es guiado por los docentes de la cátedra, haciendo intervenciones adecuadas que permiten comprender de forma intuitiva (utilizando diferentes recurso) la comparación y la sustitución de infinitésimos.

El tercer momento, está dedicado a reflexionar y seleccionar estrategias adecuadas para determinar la solución de los límites planteados, utilizando este nuevo recurso teórico.

De la lectura de las respuestas recibidas en la cátedra, se mencionan en general los siguientes aspectos:

- Los alumnos se sintieron contenidos por el equipo de trabajo. Adquirieron nuevas formas de razonar ante planteos no tradicionales. Se animaron a proponer estrategias diferentes de cálculo.
- El contenido matemático: Infinitésimo, es valorado por el alumno en cuanto a las posibilidades de aplicarlo en cálculo de límites y en demostración de teoremas involucrados en diferenciabilidad.
- En cuanto a la utilización de tecnología, propusieron complementar los cálculos anteriores con el análisis de las tendencias en las imágenes, mediante las graficas de los campos escalares con ayuda del software libre wxMaxima. A través de las gráficas de los campos escalares involucrados, pudieron observar y cotejar las respuestas obtenidas
- Finalmente se destaca que con este tipo de experiencias de aprendizaje, el alumno trabaja con mayor libertad y le permite realizar su autoevaluación sobre los saberes previos y los nuevos alcanzados.

Material complementario:

Se adjunta la solución del planteo 1- b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{tg(x^2y)}-1}{2sen(x^2y)}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{tg(x^2y)}-1}{2sen(x^2y)} = \ (A)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(x^2y)}{2x^2y} \ = \ (B)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2y} = \ \frac{1}{2}$

(A) Aquí aplica las equivalencias de la tabla (B) Aquí aplica las equivalencias de la tabla

Rpta.El campo escalar *f(x,y)*= $\frac{e^{tg(x^2y)}-1}{2sen(x^2y)}$ tiene límite doble L= $\frac{1}{2}$ cuando (x,y)->(0,0)

Se adjunta propuesta de solución al planteo utilizando sustitución de sumas de infinitésimos: Tómese en cuenta que en una variable, la suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menor orden. Esta regla se basa en el hecho de que al aplicar las reglas de L'Hopital el primer término que dejará de ser cero es el de menor grado, y en consecuencia se puede establecer la equivalencia.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{(3\boldsymbol{x^2} + 3x^3 - 5x^4)f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\boldsymbol{x^2}).f(x)}{g(x)}$

Sin embargo en dos variables esto no se puede aplicar de manera general, pues aquí la Regla de L'Hopital no es aplicable.

Ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y^2)f(x,y)}{g(x,y)} \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x)f(x,y)}{g(x,y)}$

En consecuencia, en dos variables la suma de infinitésimos solamente se puede reducir al de menor grado cuando los infinitésimos sean homogéneos (es decir que contengan las mismas variables)

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+3x^3-5x^4)f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)f(x)}{g(x)}$

Ahora esta situación en dos variables se plantea de la siguiente forma:

Ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2+3y^3-5y^4)f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to} \frac{(y^2)f(x,y)}{g(x,y)}$ (Homogeneidad de variables)

Referencias bibliográficas

Burden, R.; Faires, J. (1992). *Análisis Numérico*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Cantoral Uriza, R.; Farfán, R. (2004). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. México: MATH Learning.

Ciancio, M.; Ruiz,S. (2013) *Apuntes de Análisis Matemático II*. San Juan: Universidad Nacional de San Juan.

Gerald,C ; Wheatley,P. (2000). *Análisis Numérico con aplicaciones*. México: Editorial Iberoamérica

Gonzalez G.; Aguado L.; Gil Y. (2010). *Desarrollo de Competencias para Gestionar Información y Construir Conocimientos en los Nuevos Ambientes Educativos*. San Juan: Fundación Universidad Nacional de San Juan

Mastache A.; Miguez D.; Nantes L. (2009). *Formar Personas Competentes*. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Stewart, J. (2002). *Cálculo Multivariable*. 4° Edición . México: Edit. Thomson.

Thomas G.; Finney M., (1999). *Cálculo de Varias Variables*. México: Edit. Pearson Educación

Vera, S. (2005); *Cálculo para Ingeniería*. Disponible en www.matap.uma.es/svera/docs.