# UN ESTUDIO DE LAS ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS EN TORNO AL CÁLCULO DE DERIVADAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

***Claudia Teti, Alejandra Haidar***
Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas. Universidad Nacional de Rosario. Argentina
cteti@live.com.ar, ahaidar@fbioyf.unr.edu.ar

**Resumen**

Como docentes involucradas en la enseñanza de la Matemática en carreras de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la UNR, nos resulta de interés analizar las características de la enseñanza de la Matemática en este contexto, para poder revertir dificultades presentes en este proceso. En este trabajo nos proponemos, en el marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico, describir y analizar las características de las Organizaciones Matemáticas propuestas para enseñar que conviven en nuestra institución universitaria en torno al cálculo de Derivadas, tomando como eje de análisis el material didáctico diseñado por docentes del área.

## Introducción

Como docentes involucradas en la enseñanza de la Matemática en el primer año de la Universidad, en carreras cuyo objeto principal de estudio no es la Matemática, nos resulta de interés analizar las características que reviste la enseñanza de la Matemática en este contexto, para poder revertir las dificultades que se presentan en este proceso.

En el ámbito del Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de la Matemática se han formulado distintos problemas de investigación; entre otros, las dificultades en el paso de estudiar Matemáticas en el nivel medio a estudiar Matemáticas en la Universidad (Fonseca, 2004) y se ha puesto de manifiesto la ausencia de una actividad matemática universitaria que permita a los estudiantes responder correctamente a cuestiones formuladas de una forma distinta de la usual o tradicional y como consecuencia de eso, se concluye que hay una incompletitud de algunos temas matemáticos en las organizaciones que se estudian en secundaria.

En el trabajo que presentamos, nos proponemos, en el marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), describir y analizar las características de las Organizaciones Matemáticas propuestas para enseñar (OMPE) que conviven en nuestra institución universitaria en torno al cálculo de Derivadas, tomando como eje de análisis el material didáctico diseñado por los docentes del área.

## Marco teórico

El Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (Gascón, 1998 y 1999) surgió de la convicción de que el origen del problema de la Educación Matemática está en las propias matemáticas. El nacimiento de este Programa de Investigación constituye una respuesta a la insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos de las Matemáticas, incluidos los modelos elaborados por la epistemología clásica de las Matemáticas, para abordar el Problema de la Educación Matemática. El cuestionamiento de la transparencia de lo "matemático" y la asunción inequívoca de que el misterio está en las propias matemáticas, implica que se tome la actividad matemática como objeto primario de estudio, como nueva "puerta de entrada" del análisis didáctico.

Para analizar la actividad matemática institucionalizada, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), situada dentro del Programa Epistemológico, empieza proponiendo un modelo epistemológico general de las matemáticas que describe el saber matemático en términos de organizaciones matemáticas institucionales (Chevallard, 1999). Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que es una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Para estudiar las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes, a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o "praxis" , formada por las tareas, T, y las técnicas matemáticas, TC; y el "logos" , constituido por el discurso matemático que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la tecnología, TG, que hace referencia directa a la práctica y la teoría, Q, que constituye un segundo nivel de justificación de la práctica (o tecnología de la tecnología).

Chevallard (1999) distingue cuatro niveles de OM, según el grado de complejidad de sus componentes:

- Organizaciones (o praxeologías) matemáticas *puntuales* (OMP): son aquellas que se construyen alrededor de un único tipo de tareas teniendo una técnica común.
- Organizaciones (o praxeologías) matemáticas *locales* (OML): están formadas por la articulación de las OMP en torno a un discurso tecnológico común, es decir, teniendo una tecnología común.
- Organizaciones matemáticas (o praxeologías) *regionales (*OMR): están formadas por la articulación de OML alrededor de una teoría común, es decir, una teoría común a las tecnologías.
- Organizaciones (o praxeologías) matemáticas *globales* (OMG): son producto de la agregación de OMR, sería una *teoría de las teorías*.

En este trabajo no iremos más allá del análisis de las OML.

Relacionado con la articulación e integración entre los componentes de las OM, Bosch, Fonseca y Gascón (2004) se refieren a la completitud de las OM. Aseguran que no tiene sentido referirse a OM completas ni incompletas, sino que la noción de completitud es relativa y que hay que referirse a *grados de completitud*; es decir, una OM es más completa en la medida en que satisface los siguientes indicadores:

- Integración de los tipos de tareas: En una OM conviven diferentes tipos de tareas, relacionadas entre sí, por un discurso tecnológico o por una serie de técnicas. Así, una OM será menos completa cuanto más aislados estén sus diferentes tipos de tareas, es decir, desarrolladas por técnicas que no estén relacionadas mediante ningún componente tecnológico.
- Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas: Una OM será más completa en la medida en que puedan existir técnicas alternativas (que pueden ser variaciones de una misma técnica) para resolver algunos de sus tipos de tareas. Esto permitirá cuestionar las distintas técnicas alternativas y decidir cuál es la más fiable o económica.
- Independencia de los ostensivos que integran las técnicas: la completitud de la OM será mayor cuando mayor sea la independencia entre los objetos matemáticos (técnicas, tareas, nociones, teoremas, etc.) y los objetos materiales (ostensivos) que se utilizan en cada caso para representarlos (gráficos, verbales, gestuales, etc.)
- Existencia de tareas y de técnicas inversas: Otro indicador de la flexibilidad de las técnicas, y por lo tanto, del grado de completitud, es el hecho de que existan en la OM local técnicas "reversibles", es decir, que permitan resolver un tipo de tareas y también la tarea inversa.
- Interpretación del resultado de aplicar las técnicas: Una OM local tendrá mayor grado de completitud en la medida en la que su discurso tecnológico adquiera mayor funcionalidad, es decir, explique, justifique técnicas y especialmente, interprete el funcionamiento de la técnica y de su resultado. Esto es, que en la OM estén los elementos tecnológicos necesarios para interpretar la técnica o las técnicas.
- Existencia de tareas matemáticas abiertas: se considera como tal a aquellas situaciones en las que los datos e incógnitas no están completamente determinados de antemano. Entre dicho tipo de tareas matemáticas se encuentran, las que requieren un proceso de modelación matemática.
- Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica: Este indicador hace referencia a las relaciones que se establecen entre los componentes tecnológicos de una OM.

## Metodología

En este trabajo se pretende describir las características de las Organizaciones Matemáticas en torno al cálculo de Derivadas en un curso de cálculo diferencial de una variable correspondiente a la asignatura Matemática I de primer año de las carreras de Licenciatura en Biotecnología, Licenciatura en Química y Licenciatura en Ciencia y Tecnología de los Alimentos de la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la Universidad Nacional de Rosario. Utilizaremos los instrumentos que proporciona la TAD para analizar la Organización Matemática propuesta para enseñar (OMPE) en el material diseñado por los docentes del área.

La selección del tema Derivada se debe, en primer lugar, a que es un tema central en el Cálculo, que es posiblemente el área de mayor énfasis en el currículo de las carreras citadas, por ser una herramienta fundamental para modelizar distintos fenómenos; además la conceptualización de la noción de derivada presenta dificultades en la enseñanza y el aprendizaje.

Tomamos como eje del análisis el material preparado y editado por los profesores del curso por ser buenos indicadores del tipo de actividad matemática que se propone en las instituciones y actúan, en la mayoría de los casos, como el verdadero diseño curricular implementado. Es incuestionable su influencia tanto en el desarrollo de las clases como en el trabajo de los alumnos y es muchas veces, para los alumnos, el referente exclusivo del saber científico.

Este material consta de dos capítulos Derivada y Aplicaciones de la Derivada, cada uno tiene una estructura formada por un bloque llamado teórico, seguido de otro llamado práctica con propuesta de actividades a realizar por los estudiantes.

Esta forma de organizar el material está en consonancia con la estructura del dictado de la materia en esta institución, el cual se separa en clases teóricas para todo el curso (dictada por un profesor) y clases prácticas a las que asisten los estudiantes separados en comisiones, a cargo de jefes de trabajos prácticos y auxiliares.

Nos centraremos en este trabajo en la parte del capítulo de Derivada referido al cálculo, siendo el análisis del material completo el objetivo de un proyecto de investigación en el que participamos, y en el marco del cual presentamos este trabajo.

Según el marco teórico adoptado, se describen las categorías para el análisis del material descripto:

**Tareas (T)**: tareas propuestas en el material analizado.
**Técnicas (TC)**: técnicas necesarias para resolver las tareas anteriores.
**Tecnologías (TG)**: justificaciones que respaldan las técnicas.
**Teorías**: teoremas; proposiciones, definiciones, propiedades, demostraciones, etc. que justifican las tecnologías.

**Análisis del material**

El bloque teórico inicia la presentación del tema a partir del análisis de un fenómeno concreto (llenado de un tanque de agua) y propone la comparación de la variación del volumen de agua contenida en el tanque en distintos intervalos de tiempo y en distintas situaciones. Se concluye que el cambio total del volumen de agua contenida en el tanque es de escasa utilidad lo que lleva a la necesidad de analizar la relación entre las variaciones de las variables involucradas (volumen de agua y tiempo).

Se propone luego el estudio del cociente de incrementos (razón de cambio) entre dos variables cualesquiera x e y, el cual comienza con el análisis con el caso más simple, el de las variables relacionadas por funciones lineales (razón de cambio constante), para pasar luego al caso de las relaciones no lineales.

Se analiza la variación de y para distintas variaciones de x, cada vez más pequeñas, y se propone la comparación de estos incrementos a través de una técnica conocida: el límite del cociente de infinitésimos. Surge así la definición de derivada de una función en un punto como una tecnología que justifica el uso del cociente de infinitésimos y que será utilizada como técnica para resolver tareas relacionadas al cálculo de derivadas.

Se plantea el uso de esta definición como una técnica para el cálculo de derivadas en un punto para el caso particular de funciones potencias de exponente natural ($f(x) = x^n$).

A través del registro sistemático de valores de derivadas en un mismo punto ($x_0$) para distintos valores de n, y la búsqueda de patrones de regularidad se induce una regla. ($f´(x_0)= n\, x_o^{n-1}$) generalizada $\forall n$ natural a través de la demostración (teoría).

Esto provoca la realización de dos cuestionamientos tecnológicos:

En primer lugar ¿es posible extender el uso de esta regla para el cálculo en cualquier x? Se demuestra que es posible y surge así una nueva tecnología (la función derivada $f´(x) = nx^{n-1}\ \forall x$ con n: natural).
Por otro lado ¿es válida para todo n real?
Como respuesta surge así otra tecnología, $f´(x) = n\, x^{n-1}$, la función derivada de $f(x) = x^n$ $\forall x \in R, \forall n \in R$
Se propone el cálculo de derivadas de distintas funciones potenciales en un punto ($x_0$) y se interpreta el resultado obtenido como cambio relativo, para poder responder a la cuestión inicial de determinar cuánto varía y en relación al cambio de x, a partir de $x_0$.

Se continúa realizando distintos cuestionamientos tecnológicos a través de la propuesta de distintas situaciones, por ejemplo, la dificultad de calcular la derivada como un límite es notable cuando se trabaja con funciones no elementales (aquellas que son suma, producto, cociente, composición de funciones elementales). Estos cuestionamientos, junto la teoría, generan nuevas tecnologías (derivada de la suma, producto, etc.).

El análisis de las tareas propuestas en el bloque práctico permite identificar las siguientes categorías, organizadas en el siguiente cuadro:

| Tipos de tarea | Tareas | Técnicas |
|---|---|---|
| Calcular derivadas | Dada la expresión algebraica de una función elemental calcular por definición la derivada en un punto **T1** | Definición de derivada de una función en un punto **TC1** |
| | Dada la expresión algebraica de una función elemental calcular por | Definición de función derivada **TC2** |

| | | |
|---|---|---|
| | definición la derivada cualquier punto **T2** | |
| | Dada la expresión algebraica de una función (suma, producto, cociente o composición de funciones elementales) calcular la función derivada **T3** | Reglas de derivación **TC3** |
| | Dada la expresión algebraica de una función analizar si existe la derivada en un punto dado **T4** | Reglas de derivación<br>Comparación de dominios (función y su derivada)**TC4 *** |
| | Dada la expresión algebraica de una función calcular las derivadas sucesivas **T5** | Reglas de derivación **TC3** |
| | Dada la expresión algebraica de una del tipo $a(x)^{b(x)}$ obtener la función derivada **T6** | Propiedades del log y de la función inversa para expresar como función exponencial compuesta **TC6***<br>Regla de derivación (regla de la cadena) **TC3** |
| | Dada la expresión algebraica de una función seccionalmente definida hallar la función derivada **T7** | Reglas de derivación **TC3**<br>Derivadas laterales **TC7** |

Las técnicas TC4* y TC6* están diferenciadas con un asterisco por formar parte de otras OM (referidas a la noción de función, dominios, propiedades)

En TC3 se incluyen distintas técnicas: derivada de la suma, producto, cociente y regla de la cadena.

El análisis realizado permite concluir que en el bloque teórico se parte de una cuestión generatriz en la que las variables son V y t pero a la hora de continuar trabajando en distintas situaciones se vuelve a las variables x e y, y se abandona la situación problemática inicial. Se realizan cuestionamientos tecnológicos que justifican la necesidad de nuevas técnicas, pero la forma en que se proponen las tareas no evidencia la necesidad de estos cuestionamientos, se proponen solo cálculos usando técnicas dadas.

La secuencia de las tareas T1, T2 y T3 coincide con el recorrido teórico, pero la tarea T6 está propuesta luego de otras, cuando en realidad podría presentarse como una ampliación de la técnica TC3, ya que para su realización se propone expresar $a(x)^{b(x)} = e^{b(x).\ln a(x)}$ (aplicando TC6*) para luego derivar como una función compuesta.(TC3)

Lo mismo sucede con T4, separada en la secuenciación propuesta de T7, si fueran realizadas a continuación permitirían ver que se trata del análisis de la derivabilidad se una función en un punto utilizando distintas técnicas, de acuerdo al tipo de función de que se trate y de acuerdo también a las tecnologías que se poseen en ese momento.

## Conclusiones

Consideramos que la OMPE analizada no puede ser caracterizada como puntual ya que contiene diversas técnicas que pueden describirse mediante un enunciado común: calcular la derivada de una función. En efecto para derivar se utilizan distintas técnicas: definición, técnicas que se obtienen del álgebra de derivadas, regla de la cadena.

A lo largo del material teórico se va desarrollando un discurso tecnológico común que permite describir, interpretar, justificar, explicar y relacionar entre sí a las antiguas técnicas matemáticas, así como producir técnicas nuevas e integrarlas.

Por otro lado la forma en que se plantean las tareas podría no hacer necesario el uso de distintas técnicas ni el cuestionamiento tecnológico de las mismas (dominio de validez, economía, justificación, interpretación de los resultados que se obtienen con ella, etcétera).

En el bloque práctico no se propone el uso de dos o más técnicas diferentes para una misma tarea, tampoco se incluye la interpretación del resultado ni del proceso.

Tanto en el bloque teórico como en el práctico no se trabajan conjuntamente las técnicas de derivación e integración, ni se proponen situaciones que requieran el trabajo de modelización.

En la parte teórica, al presentar los problemas motivadores se observa cierta independencia de las representaciones ostensivas (nomenclatura), dependiendo del contexto en que está inmersa la actividad. Esta cierta flexibilidad en cuanto a la nomenclatura se pierde en el bloque práctico, donde existe una predominancia de la nomenclatura utilizada para denominar la variable independiente (x) y la dependiente (y), la función (y = f(x)), la simbología de la función derivada (f´(x)), etc. lo que hace presuponer que las técnicas de derivación dependerán de esta nomenclatura, esto provoca la falta de en flexibilidad de las técnicas utilizadas ya que deberían permitir o promover la utilización de diferentes representaciones.

De acuerdo a este análisis, teniendo en cuenta los criterios de completitud del marco teórico adoptado, podríamos concluir que la OMPE en torno al cálculo de la derivada de funciones de una variable es una OM local relativamente completa.

Consideramos que la forma de estructurar el material (y las clases) separando "lo teórico" de lo "práctico", podría provocar una desconexión entre los elementos que componen toda OM. Este modelo es predominante en la Universidad, y muy difícil de modificar, pero imaginamos que una propuesta superadora que permita flexibilizar e integrar las OM que se estudian en la Universidad debería intentar modificar esta situación promoviendo el estudio integrado de las OM.

## Referencias bibliográficas

Bosch, M.; Fonseca, C.; Gascón, J. (2004) Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), 205-250

Chevallard, Y. (1999) L´analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266

Fonseca, C. (2004). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria. Febrero 2016, de Universidad de Vigo – España. Sitio web: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf

Gascón, J. (1998) Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-34.

Gascón, J. (1999), 'Didactique fondamentale' versus 'Advanced Mathematical Thinking': ¿Dos programas de investigación inconmensurables?, *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ardm), II, 152-170.