APORTES A LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA DESDE LA VARIACIÓN

Betina Williner
Universidad Nacional de La Matanza, Provincia de Buenos Aires. Argentina
bwilliner@unlam.edu.ar

Resumen

Ante situaciones de abandono y fracaso en la asignatura Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, decidimos dar una impronta diferente a la materia incluyendo actividades que promuevan el desarrollo de ideas variacionales. Consideramos que el Cálculo es la matemática de la variación y que si proponemos a los alumnos situaciones que le permitan desarrollar estas ideas estaremos contribuyendo a mejorar la comprensión sobre los conceptos principales. Presentamos en este artículo algunas tareas propuestas a los alumnos, un test tomado para evaluar el concepto de derivada desde su interpretación geométrica y física, los resultados obtenidos en el mismo y las reflexiones a las que arribamos.

Introducción

En la cátedra de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) existen serios problemas de comprensión de los conceptos principales del Cálculo por parte de los alumnos, escasos niveles de aprobación de la materia, importante deserción y una marcada dependencia del profesor a la hora de "hacer" o "resolver". Este panorama no es ajeno al contexto mundial, en efecto: un gran número de investigaciones en Educación Matemática tratan sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo a nivel universitario, debido, entre otras causas, a los serios problemas de comprensión por parte de los alumnos de conceptos como límite, derivada e integral (Artigue, 1995).

Salinas y Alanís (2009) describen el *paradigma tradicional de enseñanza del Cálculo* como aquel en el que el contenido se presenta de manera formal y rigurosa, organizado de modo tal que los conceptos y procedimientos anteriores dan sentido a los siguientes. A esta presentación formal le siguen aplicaciones que son consecuencia natural de dicha teoría. Se pone énfasis en las reglas de derivación e integración y en técnicas como por ejemplo: para hallar los extremos de una función se deriva e iguala a cero, etc. Estos autores advierten que este paradigma deja como consecuencias elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia la Matemática.

Artigue (1995) indica que este tipo de enseñanza tiende a evaluar competencias algorítmicas y algebraicas, entrando así en un círculo vicioso: "para tener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa" (p.

97). Otros autores como Dolores (2000), Cantoral y Mirón (2000) reafirman esta situación señalando que se logra un dominio razonable de técnicas para calcular límites y derivadas pero existen serias dificultades en comprender el significado de estos conceptos o de identificar cuándo un problema requiere, por ejemplo, calcular una derivada.

Para favorecer la comprensión del concepto de derivada Dolores (2000) realiza una propuesta didáctica basada en ideas variacionales. Según Engler, Vrancken y Muller (2003) el desarrollo de estas ideas se puede favorecer si se brindan a los alumnos actividades o tareas de aprendizaje que permitan el trabajo con los procesos de predicción, estimación y modelación de situaciones de variación (problemas y ejercicios) de donde surgen los conceptos y relaciones esenciales relativas a las variables, las funciones y la derivada.

Entonces como propuesta de mejora para la cátedra de Análisis Matemático I incorporamos actividades que favorecen el desarrollo de ideas variacionales bajo la premisa del trabajo activo del alumno. De esta manera sumamos al programa de la asignatura una unidad que llamamos Unidad Transversal de Resolución de Actividades que tiene sus objetivos propios y que atraviesa todos los contenidos. Pretendemos que el alumno desarrolle habilidades y/o heurísticas para resolver las situaciones planteadas, que trabaje en grupo donde pueda expresar sus ideas, fundamentarlas y discutirlas y que realice una reflexión metacognitiva de su proceso de aprender. Combinamos clases expositivas dialogadas con clases de Resolución de Actividades que se efectúan bajo modalidad taller en las que los alumnos trabajan en equipos de dos personas. Estas actividades están basadas en funciones como modelos matemáticos simples, en razones de cambio promedio e instantánea como preámbulo al concepto de derivada, en la relación de estos conceptos con de pendiente de recta secante y tangente, entre otros.

Una vez puesta en marcha la innovación descripta quisimos evaluar la comprensión del concepto de derivada desde el punto de vista variacional y geométrico mediante un test tomado sin aviso previo a los alumnos en una de las clases.

Presentamos en este artículo algunas de las actividades que realizan los alumnos en clase para favorecer sus ideas variacionales, el test que fue tomado en la oportunidad mencionada, los resultados del mismo y las reflexiones realizadas.

Marco teórico. Pensamiento y Lenguaje Variacional

Vivimos en un mundo en el cual hay manifestaciones de “cambio” en diversidad de fenómenos. En fenómenos naturales: aumenta o disminuye la temperatura a lo largo del día, crece o decrece la población de bacterias dentro de un organismo, aumenta o disminuye la población de un determinado país, cambia la posición de la Tierra según pasan los días del año respecto a su órbita alrededor del sol. En fenómenos sociales: aumenta o disminuye el costo de producir determinada cantidad de un producto, varía la posición de un tren cuando se mueve de un destino a otro, entre otros.

La Matemática nos permite modelar estos fenómenos, es decir representar o describir un objeto o situación del mundo real donde intervienen relaciones y conceptos matemáticos de manera tal de constituir una herramienta para interpretar y predecir el fenómeno y su comportamiento. Más específicamente, el Cálculo Diferencial es la parte de la matemática que estudia fenómenos de cambio.

El pensamiento y lenguaje variacional (P y LV) es una línea de investigación desarrollada por un grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México. En palabras de Cantoral (2004):

> El pensamiento y lenguaje variacional, desde la perspectiva socioepistemológica, estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social. Pone atención en el estudio de los procesos cognitivos, culturales, históricos e institucionales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales…(p.8)

Diversas investigaciones dan cuenta de que se puede trasmitir la esencia del Cálculo desarrollando en los estudiantes ideas de variación y cambio (Cantoral y Farfán, 1998, Dolores, 2000, Guerrero, 2002). La construcción de la idea de variación es un proceso difícil y lento, no inmediato. Requiere la ruptura con el pensamiento algebraico, la combinación de diferentes sistemas de representación (analítico, gráfico, numérico, verbal, pictórico) y una adecuada comprensión de conceptos matemáticos específicos como: número, variable, constante, magnitud, función y límite (Cantoral y Farfán, 1998)

La propuesta didáctica

De acuerdo a lo explicado anteriormente, combinamos clases teórico-prácticas desarrolladas en forma tradicional expositiva-dialogada, con clases de resolución de actividades en la que se trabaja bajo modalidad taller en grupos de dos personas. Presentamos a cada equipo una guía de actividades (formada por tres o cuatro problemas) para resolver en clase. Los problemas tratan sobre temas ya vistos integrándolos o anticipan las unidades temáticas que todavía no fueron desarrolladas. Los estudiantes pueden llevar material extra para trabajar con las actividades como ser computadora, bibliografía, apuntes, etc. En este espacio tratamos que los alumnos sean activos e independientes, en lugar de ser los tradicionales receptores pasivos de información y que organicen el trabajo grupal a fin de lograr la producción. Las actividades son diseñadas teniendo en cuenta el marco teórico expuesto en el punto anterior. Es oportuno aclarar que la guía de Trabajos Prácticos que cuenta la cátedra y que es común a todas las comisiones tiene también esa impronta. Se presentan las funciones como elementos principales para la modelación matemática, se enfatizan los conceptos de variación, razón de cambio promedio (y su relación geométrica con la pendiente de la recta secante), razón de cambio instantánea (y su relación con la pendiente de la recta tangente), entre otros.

Mostramos a modo de ejemplo dos problemas que forman parte de una de las actividades:

Problema 1

En 2004 durante los juegos olímpicos de Atenas, Xiang Liu (corredor chino) realizó un tiempo de 12.91 seg en los 110 metros con vallas, convirtiéndose en la mayor sorpresa del evento. La prueba consiste en recorrer 110 m saltando 10 obstáculos uniformemente separados en el menor tiempo posible. Se muestran los resultados en la tabla:

Distancia (m)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Tiempo (s)	2.57	3.58	4.56	5.53	6.51	7.46	8.45	9.46	10.48	11.53	12.91

a) ¿Cuál fue la velocidad promedio de Xiang Liu en toda la carrera?
b) ¿Entre qué obstáculos su velocidad promedio fue la más alta?

Problema 2

Una piedra cae de lo alto de un acantilado de 300 m

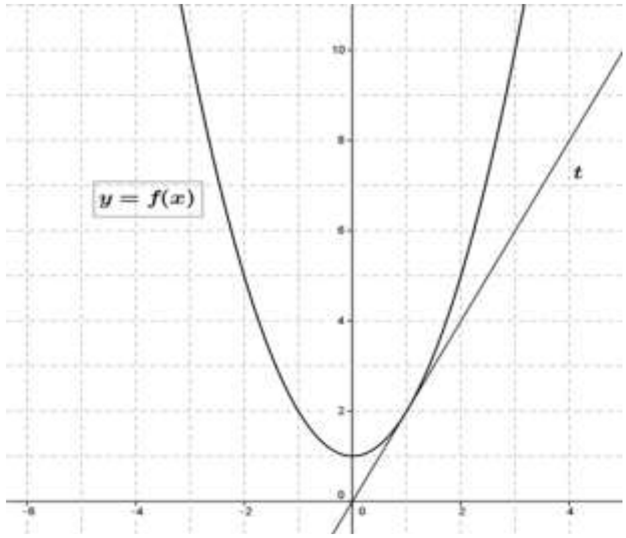
a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante los siguientes intervalos? (Recordar que la fórmula de caída libre es $s(t) = 4.9\, t^2$, donde s se mide en metros y t en segundos)

Intervalo [1,t]	Velocidad promedio	Intervalo [t,1]	Velocidad promedio
[1,2]		[0,1]	
[1,1.1]		[0.9,1]	
[1,1.05]		[0.95,1]	
[1,1.001]		[0.999,1]	

b) ¿Cuál es el valor que se “espera” para la velocidad en el instante t = 1? Estimarlo desde la tabla realizada anteriormente.
c) Calcular la velocidad instantánea en t = 1 en forma exacta mediante el concepto de límite. Recordar que la velocidad instantánea es el límite de la velocidad promedio cuando t tiende a t_0 (en este ejemplo $t_0 = 1$).

Un ejercicio que forma parte de la Guía de Trabajos Prácticos es el que brindamos a continuación:

En la gráfica siguiente se muestra el gráfico de una función f y de su recta tangente en x=1:



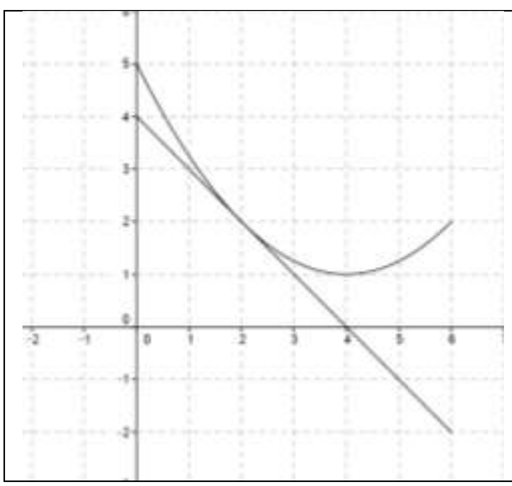
Indicar los siguientes valores o ecuaciones e identificarlos en el gráfico. Si no están graficados, agregarlos:

f(1) y f(3)	f(3) – f(1)	$y = \frac{f(3) - f(1)}{3-1}(x-1) + f(1)$
f '(1)	m_t (pendiente de t)	Ecuación de t

Test. Enunciado y resultados

Para conocer sobre el aprendizaje de los alumnos acerca de los conceptos de velocidad media e instantánea, pendiente de recta tangente y secante y su relación con la derivada en un punto, tomamos un test en todas las comisiones al mismo tiempo y sin previo aviso. El mismo fue extraído de Dolores (2000) y su enunciado es el siguiente

Punto 1: El siguiente es el gráfico de cierta función f. Contesta indicando la opción:



A) ¿Cuál es el valor de f (2)?

a) 4 b) 3 c) -1 d) 2

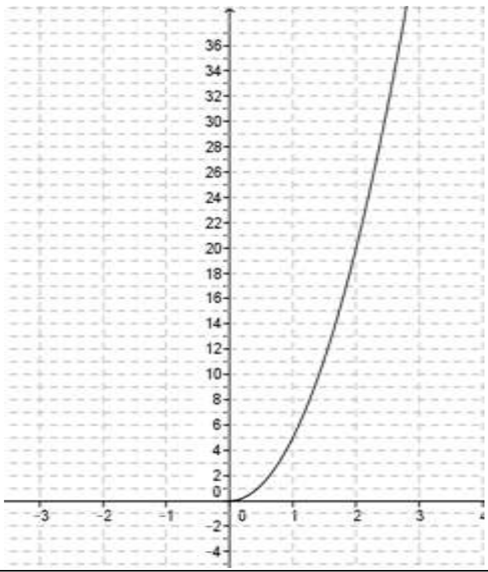
B) ¿Cuál es el valor de la derivada en x=2?

a) 4 b) 3 c) -1 d) 2

C) ¿Cuál es el valor de la derivada en x = 4?

a) 1 b) -1 c) 0 d) 2

Punto 2: la distancia que recorren los cuerpos en caída libre está dada aproximadamente por la ecuación $s = f(t) = 5t^2$. Observa la gráfica y contesta:



A) ¿Cuál es la distancia que recorre un cuerpo en el primer segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 4.9 m d) 10 m

B) ¿Cuánto cambia la distancia que recorre un cuerpo entre el 1º y 2º segundo?
a) 1 m b) 5 m c) 15 m d) 10 m

C) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo entre el 1º y 2º segundo?
a) 5m/s b) 20 m/s c) 15 m/s d) 10.2m/s

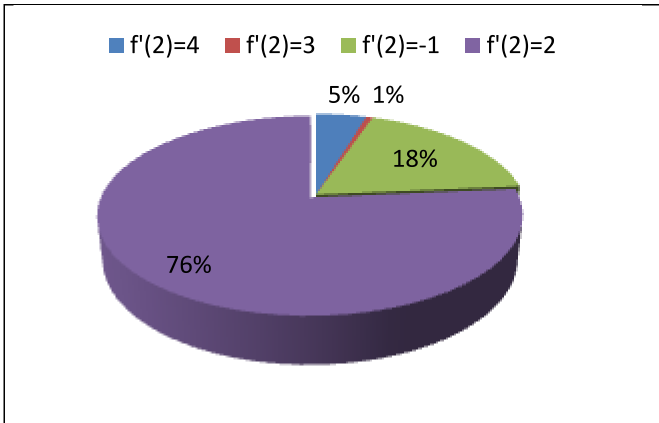
D) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo exactamente en el primer segundo?
a) 5m/s b) 10 m/s c) 15 m/s d) 4 m/s

Participaron 174 alumnos en la resolución del test, obteniendo los resultados que se muestran a continuación. Daremos los más relevantes con gráficos.

Punto 1

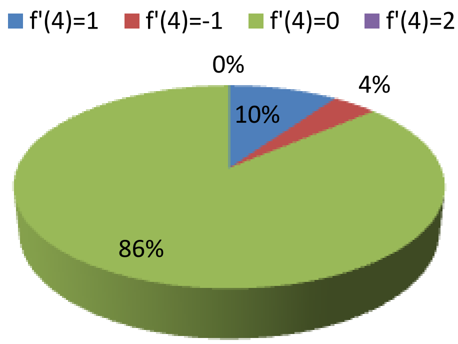
a) A través de un gráfico se solicita el valor de la imagen del punto de abscisa x = 2, siendo la respuesta correcta $f(2) = 2$. El 99% de los alumnos responde correctamente.

b) Se muestra el gráfico de la función y de la recta tangente en el punto (2,2). Pedimos el valor de f ’(2) (pendiente de la recta tangente), obteniendo:



Sólo el 18% de los alumnos reconoce el valor de la derivada en el punto como la pendiente de la recta tangente en dicho punto (respuesta correcta $f'(2) = -1$). La mayoría (76%) lo asocia con el valor de la imagen en ese punto. Los resultados obtenidos por Dolores (2000) fueron similares: un 8.9% respondió bien y un 57.4% señaló la opción $f'(2) = 2$

c) En este ítem pedimos el valor de la derivada en el punto de abscisa x = 4, siendo éste un punto de tangente horizontal y por lo tanto de derivada cero. Los resultados fueron:



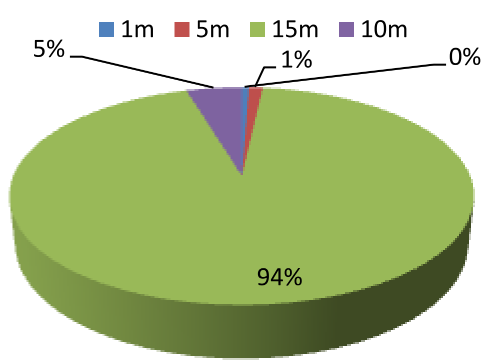
En este caso el 86% de los alumnos reconocen punto de tangente horizontal y no confunden el valor de la derivada con el de la imagen de la función en dicho punto.
Estos resultados discrepan con los obtenidos por Dolores en los que sólo un 20.5% responde correctamente.

Punto 2

En forma analítica brindamos una función que indica la distancia aproximada recorrida por un cuerpo que cae en caída libre.

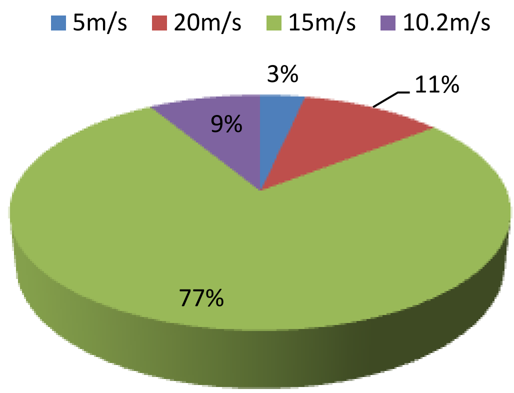
a) Preguntamos cuántos metros recorre el cuerpo en el primer segundo. El 88% de los alumnos responde de forma correcta.

b) En este ítem pedimos calcular la distancia recorrida por el cuerpo entre el primer y segundo segundo, es decir: s(2) – s(1). La respuesta correcta es 15m, y los resultados fueron:

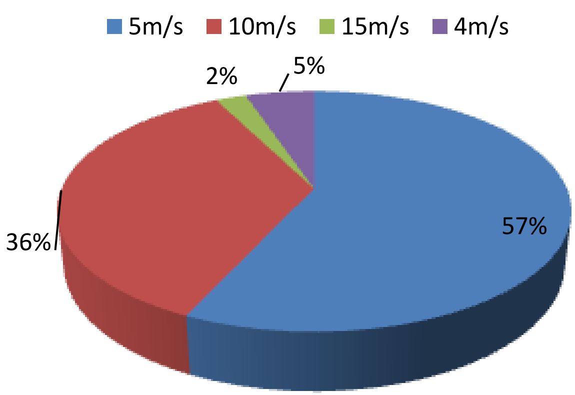


El 94% de los alumnos contesta bien, es decir es capaz de calcular la variación de la función en ese intervalo.

c) Pedimos la velocidad media en ese intervalo de tiempo, es decir la distancia recorrida de 15m dividido el tiempo que transcurrió: 1 segundo; por lo tanto la respuesta correcta es 15m/s.

	El 77% de los alumnos responde de manera correcta el valor de la velocidad media (cociente incremental).

d) En el último ítem requerimos el valor de la velocidad instantánea en t = 1, es decir el valor de la derivada de la función en dicho punto, siendo la respuesta correcta 10m/s.

	El 57% de los alumnos elige como respuesta 5m/s, el 36% contesta correctamente el valor de la derivada de la función en ese punto.

Reflexión final

Los problemas en el artículo son a modo de ejemplo. Es importante que en las clases podamos desplegar situaciones que permitan comprender procesos de cambio entre dos estados, razón de cambio media para pasar luego a razón de cambio instantánea y con ésta al concepto de derivada. Las actividades deben ser resueltas por los alumnos, generando un espacio de debate y de discusión conjunta con sus compañeros y con el docente, que será el que guíe el proceso y enfatice los conceptos y relaciones importantes del pensamiento variacional para enriquecer el aprendizaje.

Respecto a los resultados de los test observamos la escasa comprensión del concepto de derivada desde el punto de vista geométrico, en particular cuando ésta no es cero. A su vez son más alentadores los resultados obtenidos en el problema de la velocidad.

Diseñando actividades que conecten a la matemática con otras ciencias o con situaciones cotidianas, enfatizando el valor de los conceptos más que el de los cálculos, estimulando la predicción, la lectura de gráficos, la interpretación de resultados al contexto estudiado estaremos contribuyendo a la mejora de la enseñanza y esperamos que esto derive en una mejora en la comprensión por parte de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. y Farfán, M. R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon 42*, 353-372.

Cantoral, R. y Miron, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (3), 265-292.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Ed), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME 8*, 155-181. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Engler, A., Vrancken, S y Müller, D. (2003). Derivada y función derivada: su aporte en el estudio del comportamiento de la función. *Revista Novedades Educativas 153.*

Guerrero, L. (2002). *Un estudio exploratorio acerca de las concepciones que referentes al comportamiento variacional de funciones elementales tienen los profesores del bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, Universidad del Estado de Guerrero, México.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (3), 355-382.