

## INDICAÇÕES DE ABORDAGEM DE ENSINO PARA CONCEITOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: NA PERSPECTIVA DE DAVID TALL

Marcio Vieira de Almeida – Sonia Barbosa Camargo Iglioni  
[marcioalmeidasp@gmail.com](mailto:marcioalmeidasp@gmail.com) – [siglioni@pucsp.br](mailto:siglioni@pucsp.br)  
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Tema: I.4 - Pensamiento Matemático Avanzado

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario

Palavras chave: Tall, Ensino e Aprendizagem do Cálculo, Limite, Derivada;

### Resumo

*Neste artigo são apresentadas indicações de abordagens de ensino para os seguintes conceitos do Cálculo Diferencial e Integral: limite, continuidade, derivada, integral definida e equações diferenciais. Essas abordagens de ensino foram desenvolvidas por David Tall e seus associados. Elas foram obtidas por meio de um estudo conduzido no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Trata-se da elaboração de um panorama sobre alguns artigos de Tall com vistas a realizar sínteses, efetuar análises e evidenciar dados importantes sobre a aprendizagem e o ensino do Cálculo na perspectiva do pesquisador. Neste artigo são descritos os objetivos, a problemática, os documentos submetidos à análise e a forma com que se processou a coleta de dados. E ao final, são destacadas indicações de abordagens de ensino para alguns conceitos do Cálculo. O estudo apresentado, neste artigo, pode contribuir com professores e pesquisadores, ou seja, com interessados em geral pelo campo da Educação Matemática Superior, mais especificamente pelo ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Isso porque os elementos teóricos de Tall e colaboradores são frutíferos tanto para a prática docente quanto para a pesquisa nessa área.*

### Apresentação

O estudo apresentado neste artigo trata de abordagens de ensino para os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral: limite, continuidade, derivada, integral definida e equações diferenciais, propostas por Tall e seus colaboradores, que emergiram da pesquisa de Almeida (2013).

Trata-se de um estudo (Almeida, 2013) de natureza teórica, com caráter bibliográfico, documental, inserido na modalidade panorama, cujos procedimentos teórico-metodológicos pautaram-se na Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1979).

Propõe-se a construção de um Panorama de artigos de autoria de Tall, ou de colaboradores, visando os objetivos: buscar a compreensão de dificuldades de aprendizagem de conceitos da Matemática Avançada, mais especificamente dos

conceitos do Cálculo; e elaborar um panorama sobre propostas teóricas de Tall com o intuito de contribuir com a organização da Educação Matemática.

A problemática desta pesquisa foi pautada em dificuldades de aprendizagem relacionadas aos conceitos de números reais, infinito, limite, derivada e integral. Outra componente da problemática são motivações e justificativas, expostas por pesquisadores (Mamona–Downs & Downs, 2008), da necessidade de se produzir sínteses dos resultados obtidos no campo da Educação Matemática, com vistas à consolidação dessa área e da elaboração de práticas de ensino.

Como já anunciado anteriormente, segundo processo de coleta de dados necessário, a pesquisa conduzida (Almeida, 2013) caracterizou-se como um estudo documental. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 102) esse tipo de pesquisa realiza-se sobre qualquer tipo de documentação escrita. A coleta de informações é feita por meio de fichamentos das leituras, que visam organizar de maneira sistemática os registros relativos a informações obtidas. Os documentos considerados nesta pesquisa foram artigos de autoria de David Tall, ou de colaboradores. A escolha desse tipo de documento deu-se em virtude dos argumentos de Bursztyn, Drummond e Nascimento (2010), segundo os quais, pesquisadores de todo o mundo podem, por meio dos artigos, “divulgar os resultados de suas pesquisas, os métodos que usam, os conceitos que adotam ou propõem, as teorias que os orientam” (Bursztyn *et al.*, 2010, p. 17).

Em virtude do amplo volume de trabalhos desenvolvidos por David Tall e seus associados, o universo dos artigos considerados foi restringido. Em vista dos objetivos almejados, foi considerada uma seção que aborda um tópico central para o Cálculo, a saber, o conceito de limite, assumindo o que defende Cornu:

O conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, característico do tipo de raciocínio necessário na Matemática Avançada. Ele detém uma posição central que permeia toda análise matemática – como um fundamento da teoria das aproximações, da continuidade, e do Cálculo Diferencial e Integral (Cornu, 1991, p. 153).

Foram escolhidos os artigos da seção *Limits, Infinity & Infinitesimals*, do sítio acadêmico do pesquisador. Segundo o prefácio existente no sítio, Tall chama a atenção de que os estudos, que resultaram nos artigos, indicaram a existência de distinções entre as teorias matemáticas e as crenças cognitivas dos sujeitos. Uma delas está relacionada ao fato de que nosso cérebro associa uma ideia de movimento à noção de limite. Em consequência, a imagem mental foca apenas em aspectos dinâmicos dessa noção. Outro aspecto destacado foi o fato da noção de limite ser concebida como um processo e

posteriormente como um conceito. Além disso, Tall descreveu um conflito cognitivo relativo ao fato de muitas vezes, o sujeito conceber o conceito de limite como um processo de aproximar-se a um valor limite, sem nunca alcançá-lo. Essa concepção entra em conflito com a definição formal desse conceito. O conceito de limite zero de uma sequência, ou de uma função, revelou ao pesquisador o surgimento no sujeito da ideia de número arbitrariamente pequeno, o que ele nomeou como um infinitesimal cognitivo. Por fim, nos artigos mais recentes, o objetivo do pesquisador foi propor um modelo com vistas a explicar como ocorre, por parte do sujeito, o desenvolvimento formal dos conceitos da Matemática.

Em Almeida (2013), o estudo dos artigos considerados se desenvolveu do seguinte modo: inicialmente, foi conduzido um estudo minucioso do *corpus* documental, sendo esse “o conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (Bardin, 1979, p. 96), e foram eleitas as unidades de análise. Por meio desse estudo, foram criadas dois tipos de categorias que nortearam a construção do Panorama pretendido. O primeiro conjunto teve por objetivo evidenciar as proposições teóricas desenvolvidas, pelo próprio pesquisador ou com a sua colaboração, que surgiram no *corpus* documental. Como resultados foram destacados seis elementos teóricos: as concepções infinitesimais; os conflitos; o conceito imagem e o conceito definição; a noção de proceito, a fundamentação para a utilização do computador na aprendizagem e formas de modelar o desenvolvimento da Matemática formal por parte do sujeito. No segundo conjunto de categorias foram destacados os tópicos do Cálculo Diferencial e Integral, que emergiram nos artigos do *corpus* documental. Tais tópicos totalizaram as seguintes categorias: números reais, infinito, limites, sequências e séries, continuidade, derivada e integral.

### **Indicações de abordagens de ensino**

Para o conceito de limites de sequências e séries o que Tall e Schwarzenberger (1978) propõem é o seguinte: integrar a noção de limite com o conceito de números reais definidos a partir das sequências de aproximações decimais de um número real  $k$  (Tall & Schwarzenberger, 1978, p. 5). Essa integração foi possível pelo fato de haver uma precisão limitada na representação, em uma folha de papel, de um segmento com medida igual a um número irracional.

Outra indicação de abordagem, relativa ao conceito de limite de sequências, surgiu no estudo de Tall e Li (1992). Nesse estudo, os pesquisadores conduziram um experimento

por meio de um curso, no qual foi utilizado um ambiente de programação, com duração de 20 semanas, realizado com estudantes da Universidade de Warwick. Nesse curso, os estudantes foram convidados a programar determinadas sentenças e séries, e, investigar o comportamento dos termos delas para determinados valores da variável dependente. Após essa atividade, os sujeitos foram conduzidos à definição formal do conceito de limite. Posteriormente, Tall (2001) refletiu sobre três falhas existentes na abordagem do conceito de limites proposta nesse estudo. A primeira falha detectada foi que em determinadas sequências, o computador demorava a realizar os cálculos, e isso reforçou a ideia que o limite é um processo que não termina. Com relação ao tópico da convergência de sequências, o objetivo do curso era promover intuições, por meio de uma precisão fixada, com o intuito de desenvolvê-la para a definição formal do conceito. Apesar desse tipo de abordagem, comparando os resultados de um pré-teste para um pró-teste, a maioria dos sujeitos da pesquisa respondeu incorretamente às questões formuladas. Um último tópico foi dedicado à discussão de que um decimal infinito pode ser visto como um limite de sequência de aproximações decimais. Em entrevistas realizadas com os estudantes foi possível constatar que eles continuaram a conceber a dizima periódica  $0,999\dots$  como uma sequência de números mais próxima de 1 e não como um valor fixo.

Com relação ao conceito de continuidade, o pesquisador utilizou elementos da Análise Não-Standard com o objetivo de fornecer uma base formal adequada às intuições manifestadas pelos alunos. A Análise Não-Standard é um ramo da Matemática desenvolvido na década de 60, pelo matemático Abraham Robinson, que “procura recuperar a noção de infinitésimo que, com o auxílio dos métodos da lógica matemática, em particular, da teoria dos módulos, foi estabelecida de forma rigorosa” (Felizardo, 2005, p. 6).

No artigo (Tall, 1981, p. 13), o pesquisador exibiu a definição do conceito de continuidade no contexto da Análise Não-Standard.

Além disso, Tall propôs uma abordagem intuitiva para o conceito de continuidade, utilizando o computador. Ela consiste no seguinte, em considerar “[...] um gráfico desenhado "continuamente" nesse sentido intuitivo, simplesmente esticando-o horizontalmente, mantendo a escala vertical constante, retire essa imagem do gráfico em uma janela separada” (Tall, 1993, p. 11).

O resultado do processo descrito anteriormente foi ilustrado na Figura 1:

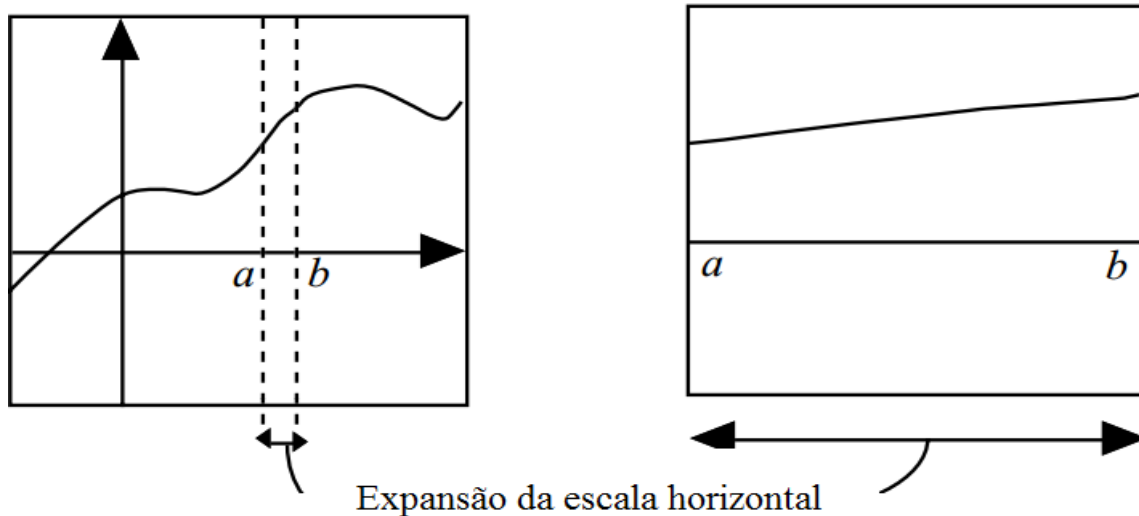


Figura 1 – Esticando um gráfico horizontalmente (Tall, 1993, p. 11).

Tal abordagem, na qual uma porção do gráfico de uma função é “horizontalmente esticada”, é possível introduzir a definição formal de continuidade de uma função no ponto  $x_0$  (Tall, 1993, p. 12).

Com relação ao conceito de derivada, no artigo (Tall, 1981, p. 14), o pesquisador exibiu uma indicação de abordagem de ensino, na qual o conceito de derivada é definido no contexto da Análise Não-Standard. Utilizando a função, nomeada pelo pesquisador, microscópio- $\delta$  centrado em  $(x, f(x))$ , ele afirmou: “Surpreendentemente, vemos o gráfico como uma linha reta” (Tall, 1981, p. 17). Contudo, essa construção foi feita de maneira teórica, utilizando resultado da Análise Não-Standard e representações com lápis e papel. Pela evolução dos computadores, Tall retomou as ideias aqui descritas. Com auxílio do computador, ele construiu imagens que desenvolvessem motivações adequadas à noção de funções diferenciáveis. Ele indicou que essa noção pode ser “motivada simplesmente ampliando seu gráfico, mantendo a mesma escala relativa nos eixos” (Tall, 1993, p. 11). Com isso, quando a representação gráfica de uma função é ampliada, a aparência dessa porção do gráfico é idêntica a um segmento de reta. Logo, a inclinação do segmento de reta, exibido na tela, terá a mesma inclinação da reta tangente ao gráfico da função.

Na Figura 2 exibe-se esse *software* sendo utilizado para a função  $g(x) = \sin x$ . Na segunda janela do *software* é possível perceber que a representação gráfica da função  $g$  fica parecida com uma linha reta, assim como a conclusão teórica obtida com auxílio da função microscópio- $\delta$ .

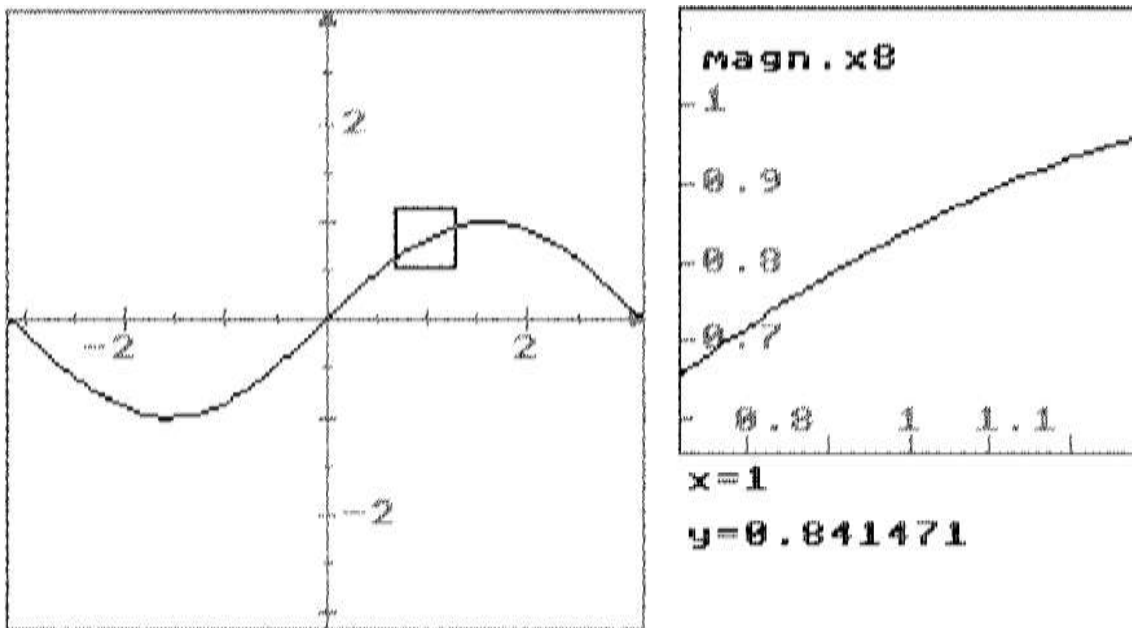


Figura 2 – Representação do organizador genérico *Magnify* (Tall, 2000, p. 12).

A noção de aproximação linear local foi nomeada pelo pesquisador como “retidão local” (Tall, 2000, p. 11). Ela seria uma raiz cognitiva apropriada para o conceito de derivada.

Com relação ao conceito integral definida, o pesquisador recorreu à função área abaixo do gráfico de uma função em dois artigos (Tall, 1993, 2000). Em um primeiro momento, Tall defendeu que uma abordagem na qual a integração é reconhecida como o inverso da diferenciação faz com que o papel da continuidade da função integrável fique menos evidente, porém, “quando ao conceito de integração é dado um significado independente por meio da soma, a função da continuidade torna-se mais evidente” (Tall, 1993, p. 13).

Segundo Tall “as noções corporificadas de ‘área’ e ‘área até o momento’ (tradução da expressão ‘area-so-far’) podem apoiar a Integração de Riemann e até a de Lesbegue” (Tall, 2000, p. 16). Essas noções podem ser ampliadas com um computador e *softwares* desenvolvidos apropriadamente, pois eles podem ser utilizados para calcular a área numérica e relacionar a noção de continuidade à noção de integração.

Com relação ao conceito de equações diferenciais, Tall sugeriu a introdução desse conceito, por meio da seguinte situação problema:

Considere o problema inverso da diferenciação (Não, esse não é a integração!). O problema é o seguinte – se você conhece a inclinação de uma função em qualquer ponto, como podemos construir o gráfico que tem essa inclinação? (Tall, 2000, p. 14).



O objetivo do pesquisador com essa questão foi propiciar um significado corporificado ao estudante, apresentando outras abordagens que não aquela utilizada, em geral, a abordagem simbólica. Além disso, Blokland, Giessen e Tall (2000 como citado em Tall, 2001, p. 211) desenvolveram um *software* que constrói a solução gráfica para uma equação diferencial de 1ª ordem, na qual o *mouse* é utilizado para mover um pequeno segmento, cuja inclinação é definida pela equação diferencial, e, com um clique sobre o plano cartesiano, esse segmento é fixado ao plano.

### Conclusões

Com as considerações deste artigo, é esperado contribuir com as discussões do VII CIBEM, com a exposição de considerações sobre a aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral sob a perspectiva de um importante pesquisador do campo da Educação Matemática. As contribuições de Tall e colaboradores para essa área, compiladas e apresentadas neste artigo são destinadas tanto para a sala de aula, quanto para futuras pesquisas do campo da Educação Matemática.

### Referencias bibliográficas

- Almeida, M. A. (2013) *Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP, Brasil.
- Bardin, L. (1979) *Análise de conteúdo*. (L. A. Reto & A. Pinheiro, Trad.). São Paulo: Edições 70, Livraria Martins Fontes (Obra original publicada em 1977).
- Bursztyjn, M., Drummond, J. A., & Nascimento, E. P. (2010) *Como escrever (e publicar) um trabalho científico: dicas para pesquisadores e jovens cientistas* (pp. 17 – 41). Rio de Janeiro: Garamond.
- Cornu, B. (1991) Limits. In TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166). Boston / Londres: Kluwer Academic Publishers.
- Felizardo, S. B. (2005) *Aplicação da Análise Não-Standard à Teoria da Medida: uma representação hiperfinita de medida de Lebesgue*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil.
- Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2009) *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos* (3a ed.). Campinas: Autores Associados.
- Mamona–Downs, J., & Downs, M. L. N. (2008) Advanced Mathematical thinking and the role of mathematical structure. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 154 – 174). New York: Routledge.
- Tall, D. O. (1981) Infinitesimals constructed algebraically and interpreted geometrically [Eletronic version]. *Mathematical Education for Teaching*, 4 (1), 34–53.
- Tall, D. O. (1993) Real Mathematics, Rational Computers and Complex People [Eletronic version]. *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*. Addison-Wesley, 243 – 258.

- Tall, D. O. (2000) Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning) [Electronic version]. *Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics*, Chiang Mai, Thailand. ATCM Inc, Blackwood, 3–20.
- Tall, D. O. (2001) Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12 (3), pp. 210 – 230.
- Tall, D. O., & Li, L. (1992, July) Constructing Different Concept Images of Sequence & Limits by Programming. *Proceeding Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 17(2), Tsukuba, JAP.
- Tall, D. O., & Schwarzenberger, R. L. E. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, pp. 44 – 49.