CORTANDO…CORTANDO

Mabel Alicia Slavin
Instituto Superior de Formación Técnica Nº 75, Tandil. Argentina.
mabelslavin@hotmail.com

Resumen

Incentivar en el alumno el desarrollo de estrategias de solución para los “problemas” que el docente le ofrece con el objetivo de construir un nuevo conocimiento sirve para ayudar a que desarrolle sus habilidades de pensamiento y que construya un pensamiento independiente. El diseño de una secuencia didáctica que presente desafíos a los alumnos y en la que aparezcan nodos que entrelazan los ejes en los que está organizado el diseño curricular de la provincia de Buenos Aires, es una oportunidad para que el docente actúe como coordinador de los grupos de trabajo, redireccionándolos cuando sea necesario.

Introducción

Una secuencia didáctica debe presentar desafíos que los alumnos acepten de modo que, a través de la resolución de los “problemas” de la secuencia, puedan construir nuevos conocimientos. Los problemas que integran la secuencia deben ser los motores para la producción del conocimiento matemático deseado, deben generar espacios donde recontextualizar ese conocimiento y dar lugar al control de las conclusiones obtenidas por los alumnos.

La resolución de los “problemas” matemáticos de la secuencia requiere que el alumno pruebe, se equivoque, recomience a partir del error, construya modelos, lenguajes, conceptos, proponga soluciones, las defienda, las discuta, y comunique sus procedimientos y conclusiones.

La formalidad matemática no será el punto de partida de la tarea deductiva que conlleva la resolución de la secuencia, pero sí deberá ser la meta.

En el desarrollo de una secuencia como en todos los procesos de enseñanza–aprendizaje se supone una negociación y una renegociación permanente de significados y sentidos entre alumnos y docente en las que los vínculos afectivos, las habilidades mentales y las gramáticas motivacionales constituyen factores esenciales para lograr un buen trabajo en grupo (Elichiry, 2004).

Para el desarrollo de la secuencia propuesta se privilegiará la comunicación que se convertirá en el instrumento fundamental en los procesos de apropiación de los contenidos curriculares involucrados. Las diversas formas de comunicación, el uso de diferentes formas de lenguaje, el habla de los sujetos involucrados son los instrumentos de mediación para la construcción de los significados que se compartirán.

La diversidad de tareas y necesidades demandarán creatividad, ingenio, flexibilidad y la necesidad de desplegar una variedad de herramientas que no excluya a ninguno de los sujetos educativos.

Esta propuesta tiene como objetivo abordar el concepto de volumen y sus cortaduras llegando a la noción intuitiva de límite, teniendo como protagonista fundamental al triángulo rectángulo.

El uso del modo potencial en el marco de una conversación informal permitirá generar inquietud, sorpresa, cautivar con la novedad y establecer un vínculo basado en la curiosidad y la avidez por descubrir. Ninguno de los involucrados tendrá certezas, pero la duda y la formulación de hipótesis unidas a la actividad imaginativa liberarán el pensamiento y llegarán a completar el desafío de "desatar" los nodos propuestos a lo largo de la secuencia.

Consideraciones sobre la propuesta

La secuencia propuesta en este trabajo tiene como principal objetivo el "acompañar el hacer". No se podrá prescindir de "hacer" mientras se lleva a cabo su desarrollo en el aula. Constituye una propuesta abierta para estudiar y resolver problemas relativos a cuestiones relacionadas con los números y sus operaciones, con la medida, con la geometría plana y los volúmenes y por último con un intento de llegar a una idea intuitiva de límite.

En las ideas planteadas se integran los contenidos de diferentes ejes del diseño curricular vigente en la provincia de Buenos Aires, estas ideas están pensadas indiscutiblemente para docentes y alumnos de distintos niveles de escolaridad y se refieren a su formación matemática.

Actualmente la sociedad necesita que en las escuelas se formen personas más completas quienes, además de los conocimientos académicos, adquieran habilidades, actitudes y valores que los integren y complementen (Ricotti, 2012). Es, por lo tanto, función del docente despertar el interés por aprender y por continuar aprendiendo. Buscar caminos nuevos para recuperar el lugar importante que debe ocupar la geometría puede desembocar en la utilización de recursos sencillos, fáciles y económicos que permitan modelizar situaciones, resolver problemas, representar propiedades, construir con precisión, mejorar la visión espacial y, por que no, recuperar o ejercitar la tan venida a menos destreza manual.

Esta secuencia pretende ser una herramienta más para que incursionen placenteramente por el mundo de la geometría y se animen a pensar nuevas situaciones adaptadas a cada realidad, agregando, suprimiendo, enriqueciendo con las propias ideas y las ideas de sus alumnos.

Las actividades de resolución de problemas que priorizan la manipulación y la exploración con papeles, obligan a aprender poniendo los conceptos en acción. La cooperación, la comunicación, el trabajo compartido, la paciencia puesta en las propias construcciones, el reconocimiento de limitaciones o errores, el afán de enmienda y corrección, completarán los aspectos formativos.

El protagonista principal de la secuencia es el triángulo rectángulo y será un triángulo rectángulo isósceles que se construirá con papel, esto dará lugar a los primeros interrogantes con respecto a su construcción que generarán ideas respondiendo a las expectativas propias de cada realidad áulica. Aquí aparece un tratamiento geométrico del número irracional generado en su hipotenusa y se planteará la idea de una sucesión geométrica de números irracionales construyendo, a partir del primero, un triángulo rectángulo que contenga $\sqrt{3}$ en su hipotenusa (Levi, 2000). La observación detallada y la coordinación forman parte del desarrollo del pensamiento intuitivo y de la representación mental del espacio. Aquí aparece la doble opción de acercarse matemáticamente (desde la formalización), como de obviar la formalidad y quedarse con la construcción del número irracional con el nivel de fundamentación que se prefiera.

Es necesario volver a considerar los modos de aprender del alumno. El aprendizaje constituye un proceso por el cual el sujeto pone de manifiesto los diferentes momentos por los que atraviesa en su aproximación a explicaciones cada vez más adecuadas. La superación por medio de las contradicciones que le suscita la incorporación y coordinación de los diferentes puntos de vista en que se presenta un concepto, le permitirán avanzar en sus explicaciones.

La construcción de las mediatrices de un triángulo se suele hacer por procedimientos mecánicos, sin pensar demasiado en los "por qué" de cada uno de los pasos. Los alumnos en muchos casos memorizan las acciones desvinculadas de los conceptos y de las propiedades que están en juego. La construcción por plegado de las mediatrices de los triángulos rectángulos construidos permitirá "descubrir" una propiedad de su punto de intersección y esto llevará a los alumnos a generar una partición de los triángulos rectángulos en cuartos. Estos sencillos dobleces permiten representar fracciones que llevan a considerar las simetrías y las homotecias involucradas en la representación obtenida para las mismas. Las demostraciones requieren el manejo de algunos conceptos, pero no ofrecen mayores dificultades si se le dedica un poco de paciencia.

Aquí vuelven a relacionarse la geometría con los números y el álgebra, para la construcción de fórmulas que permitan obtener perímetros y áreas de las diferentes figuras que aparecen al plegar. El docente podrá desafiar a los alumnos con tareas que van más allá de sus habilidades y sus conocimientos, lo cual implica proponerles actividades que puedan resolver con lo que ya tienen y saben, pero también, actividades para las cuales necesiten buscar nueva información, nuevas maneras de solucionarlas. Aquí, deliberadamente, las palabras fueron reemplazadas por imágenes, que si son engañosas o confusas, requieren que las formas o figuras que se creen estén sustentadas por las propiedades geométricas. Las imágenes apelan a la visualización como valiosa herramienta de entendimiento (Ricotti, 2005).

El uso del color para identificar las partes de los triángulos permitirá pasar del plano al espacio construyendo (guiados por el color) un volumen que será el pieh-nao estándar o pirámide triangular. Aparece lo lúdico desde un rompecabezas. Esta situación pretende despertar el placer del desafío, de la búsqueda, el reconocimiento de la importancia de hacerse y hacer buenas preguntas y la necesidad de experimentar las propias ideas, de confrontarlas y de discutirlas.

El mismo color llevará a la posibilidad de generar una cortadura de la pirámide, en la que será necesario "completar" el desarrollo de los volúmenes obtenidos. Aquí los alumnos deberán explorar la posibilidad de obtener el desarrollo de los cuerpos con los polígonos que cumplan con las condiciones necesarias para hacerlo. Aquí será necesario diferenciar las longitudes de las superficies y estas de los volúmenes. Para ello será necesario manipular, estimar, comparar y medir. La fórmula deberá aparecer como un último recurso en la construcción de un camino para el cálculo requerido. Deberá ser un recurso más económico en términos de procedimientos, pero no como el único. La construcción de la fórmula será una instancia en el que el problema de la medida se articule con el álgebra, y en la que los alumnos se conviertan en los "productores" de fórmulas y no solo de "usuarios".

La pirámide triangular se descompone en dos pirámides triangulares y en dos prismas de base triangular que superan la mitad del volumen original. (Levi, 2000). Aquí es posible establecer la relación entre los volúmenes pirámide triangular-prisma de base triangular por vaciamiento. También es posible cuestionar sobre la posibilidad de seguir realizando descomposiciones de las pirámides obtenidas en la primera cortadura lo que llevará a aceptar argumentaciones con distinto grado de formalidad, procurando su evolución progresiva de las menos formales a las más formales, a partir de analizar las diferencias y semejanzas entre unas y otras. Es posible intuir el final del proceso, convenciéndose de la validez del resultado, a partir de un argumento manipulativo que está al alcance de los alumnos.

Estas actividades aparentemente sencillas se plantean a manera de juego, aprovechando la proximidad del pensamiento lúdico con el matemático. El carácter del problema es el que genera las conexiones entre los distintos contenidos. No se trabaja con ninguno de ellos como un fin en sí mismo, sino como un trampolín necesario y racional para construir o enriquecer alguna idea. Se trabaja con el claro objetivo de solucionar una situación y para ello los contenidos no se imponen, sino que su uso aparece como una necesidad con una finalidad concreta. La utilización racional de los datos, el significado de los procedimientos, la evaluación de la razonabilidad de los resultados, la inmediata posible discusión de las ideas y modalidades para "llegar al objetivo", le dan sentido a la actividad y hacen que cada contenido no aparezca como una "ejercitación" aislada. No hay saltos bruscos entre un tema matemático y otro. Así, un problema puede ser tratado numéricamente e inmediatamente conectarse con una cuestión geométrica y adquirir, de ese modo, una nueva dimensión al ser integrados ambos.

Uso del material

El material preparado para esta propuesta consiste en cuatro triángulos rectángulos, dos isósceles rectángulos congruentes y los otros dos construidos sobre las hipotenusas de los triángulos anteriores y de cateto menor igual a los primeros.

Luego se genera una colección de triángulos rectángulos y rectángulos que surgen de cortar los triángulos anteriores en cuartos.

Utilizando las figuras anteriores como parte de un rompecabezas surgen cuatro volúmenes que se ensamblan conformando una pirámide triangular que representa 1/6 de un cubo. Los volúmenes son: dos pirámides homotéticas a la que se ensambla e iguales entre sí y dos prismas de base triangular iguales entre sí.

La colección de triángulos y rectángulos surge luego de construir en cada uno de los cuatro triángulos rectángulos sus correspondientes mediatrices, logrando de esta manera que las figuras se dividan en cuartos.

Los cuatro volúmenes generados se pueden ensamblar para construir nuevamente la pirámide mayor.

Aprovechando los triángulos y rectángulos que aparecen en el volumen obtenido se pueden generar situaciones lúdicas que permitan, con la presencia de imágenes, encontrar relaciones entre triángulos y cuadrados.

Intenciones pedagógicas

- Descubrir los números irracionales desde una generación geométrica.
- Encontrar la sucesión de los números irracionales.
- Razonar sobre el significado de la medida.
- Establecer relaciones entre elementos de una figura.
- Armar y calcular volúmenes.
- Diferenciar perímetro de superficie y ésta de volumen.
- Abstraer conceptos y relaciones.
- Estudiar diferentes desarrollos para los cuerpos generados.
- Encontrar relaciones entre volúmenes.
- Integrar el lenguaje propio del pensamiento visual.
- Utilizar gráficos, esquemas y dibujos.
- Facilitar la concentración, debido a la situación de modelización.
- Generar iniciativas y dejar de lado el aburrimiento.
- Facilitar el intercambio con otros.
- Favorecer el placer al superar obstáculos.
- Fomentar la tolerancia al error, esto evitará frustraciones.
- Diferenciar entre medio y fin, el proceso es más relevante que el resultado por alcanzar.
- Respetar reglas impuestas por el grupo.

Implementación

La versatilidad del material nos permite la utilización del mismo desde el Nivel Preescolar hasta el último año del Nivel Medio.

Algunas sugerencias para el uso del material (cada docente establecerá el esquema que le convenga de acuerdo con los conocimientos y dificultades de su grupo de alumnos).

Nivel preescolar

* Posibilidad de reconocer figuras.
* Contar y sumar.
* Armar figuras a partir de triángulos.
* Encontrar diferentes representaciones numéricas.
* Encontrar simetrías.
* Noción de fracción. Reconocimiento de unidad y de cuarto.
* Obtener volúmenes por apilamiento.
* Armar guardas libres.

Nivel básico

* Reconocimiento de figuras.
* Reconocer fracciones (1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$)
* Encontrar equivalencias de fracciones entre diferentes figuras.
* Identificar simetrías.
* Armar los volúmenes.
* Encontrar otras fracciones por plegado en el cuadrado.
* Encontrar equivalencias entre fracciones.
* Representar fracciones en la recta numérica.
* Encontrar las simetrías.
* Con ayuda de un software realizar diferentes simetrías.
* Encontrar sumas “mágicas”.
* Calcular volúmenes.
* Calcular perímetros y superficies.
* Encontrar equivalencias entre los diferentes volúmenes.
* Obtener diferentes volúmenes por apilamiento.

Nivel medio

* Representar los números irracionales en la recta numérica.
* Establecer relaciones entre las superficies de las distintas figuras.
* Encontrar el valor exacto de las longitudes de los volúmenes.
* Reconocer la no proporcionalidad para perímetro, superficie y volumen.
* Encontrar simetrías y homotecias.

* Construcción, por plegado, de mediatrices.
* Encontrar las propiedades de la intersección de mediatrices del triángulo.
* Encontrar la relación entre los volúmenes.
* Obtener fórmulas.
* Intentar la obtención de un cubo a partir de la pirámide.
* Intentar la construcción de nuevos volúmenes por apilamiento.
* Encontrar relaciones entre los triángulos laterales de la pirámide.
* Llegar a la idea intuitiva de límite.
* Encontrar la relación entre los números triangulares y los números pentagonales.
* Uso de un software para desarmar cuerpos, explorarlos, rotarlos.
* Uso de un software para representar números irracionales en la recta numérica.
* Obtener diferentes desarrollos para los cuerpos.
* Obtener el volumen de un prisma triangular a partir del ensamble de tres pirámides triangulares.

El material

El material que se sugiere puede ser construido por lo mismos niños y/o adolescentes, ya que constituye en sí mismo un problema no convencional que exige la puesta en marcha de habilidades manuales y destrezas en el uso de herramientas (estos aspectos han dejado de ser tenidos en cuenta en estas últimas modificaciones de la enseñanza básica). Se prevé que los materiales puedan ser económicos y posibles de conseguir en cualquier contexto social, no por desconocer u oponerse a las nuevas tecnologías, sino para presentar opciones que alternen su uso. (Ricotti, 2005)

Con estas figuras triangulares el número irracional se trabaja desde lo visual buscando una fuerte reflexión sobre las relaciones existentes entre los lados que las delimitan. Aceptada su existencia por aplicación del teorema de Pitágoras, resulta que la interpretación natural de la posibilidad de su construcción da pie, curiosamente, a generar “todas” las representaciones de las raíces de los números naturales de la misma manera. La utilización de un software permitirá notar una curiosidad: la primera vuelta de la espiral de las raíces cuadradas se cierra con $\sqrt{17}$ (Levi, 2000)

El número racional se trabaja desde lo visual buscando una fuerte relación sobre las relaciones parte-parte y parte-todo en un todo continuo. Con el mismo material se calculan áreas y perímetros apelando a propiedades y teoremas con posibilidades de iniciar formalizaciones más rigurosas.

Para obtener las fracciones se hace uso del plegado para evitar la mecanización del uso de instrumentos y, para ello, se sugieren secuencias constructivas que lleven al uso de simetrías para determinar la validez.

Para lograr el desarrollo completo de los volúmenes obtenidos por cortadura se apela al conocimiento que los alumnos poseen sobre cubrimiento del plano, lo que les permitirá determinar la factibilidad de la obtención de diferentes configuraciones para cada volumen.

La experimentación con el material lleva a las propiedades de las figuras, esto le dará significatividad a los resultados y a la necesidad de ordenar datos para obtener representaciones claras de las medidas.

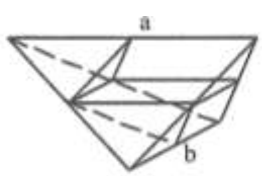
Los alumnos pueden generar la idea de volumen, con la posibilidad de deducir cómo encontrar su valor numérico a partir de la idea de "llenar".Aquí surge la diferencia entre volumen y capacidad.

Con esta modalidad de trabajo se pretende integrar saberes y desdibujar los límites entre diferentes ejes del diseño curricular, para lograr una mirada más profunda y crítica, tanto de la significatividad de las situaciones como de la razonabilidad de los resultados.

Este material que deja un margen total de libertad al docente para que de acuerdo con sus capacidades, gustos y/o estilos decida cómo, cuando y para qué utilizarlo, solo pretende ser el comienzo de vivencias diferentes, de expresiones enriquecedoras que hagan más apasionante la clase de matemática.

El uso de la imagen, tan popular en los medios de comunicación actuales, será necesario para lograr el entendimiento con miras a un aprendizaje más directo.

Los diseños



Pirámide triangular

Pirámide cortada

Pirámide triangular

Los cuatro volúmenes

Comentarios finales

Enseñar y aprender son actos que suceden en una dimensión de lo real que no siempre advertimos. Podemos ver, evaluar, escuchar, describir, observar lo que sucede en un aula, pero no podemos decir que estamos enseñando ni aprendiendo, hasta tanto no nos adentremos en ese resquicio de lo real que nos transporta a la dimensión donde nos encontramos con el otro. En ese espacio y ese tiempo en el que vivimos una “experiencia” compartida, en el que pensamos con el otro y se ponen en comunicación los sistemas de pensamiento y se enlazan los deseos y las ideas más allá o más acá de los saberes propios de cada cual. Desde este punto de vista, toda persona se muestra con elocuencia tal cual es mientras está jugando. Por esto, todo juego es una cosa seria, ya que como espacio de diversión hace sentir libre a quien se involucra aceptando y definiendo reglas, creando vínculos entre los que participan y generando fuertes emociones, que pueden oscilar desde el desconcierto y la tensión hasta las demostraciones de alegría más explosivas.

El juego se convierte en un espacio privilegiado de aprendizaje espontáneo y promueve la construcción de habilidades cognitivas, afectivas y sociales (Aizencang, 2005).

Jugar es hacer. Y el hacer en educación es aprender (Bixio, 2006).

Para el docente rescatar lo lúdico del enseñar y aprender significa idear modos creativos y novedosos de abordar y resolver los problemas, llenar de significados los datos y los conceptos, abrir espacios para construir procedimientos y sentidos, como lo intenta hacer esta secuencia propuesta.

El uso de la secuencia permite acceder al mundo de la posibilidad, al pensamiento flexible y reflexivo, a la expresión de incertidumbre, a la duda, a la formulación de hipótesis esquivas, a la actividad imaginativa que libera el pensamiento de dogmas y certezas.

El docente deberá convertirse en un guía que sea capaz de hacer preguntas que sugieran caminos de acción, un guía que sea capaz de mostrar la belleza y la utilidad de la matemática en la vida diaria.

El docente deberá revisar la matemática que vive en la escuela, interrogarla, analizarla para concebir otros escenarios en los que se restituya el deseo de aprender (Sadovsky, 2005). Desafiar a su alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar…

Esta secuencia intenta que los docentes crean que esto es posible y para ello esta es una manera de empezar a actuar.

Enseñar a ser jugador es la enseñanza que más nos compromete, ya que solo podemos hacerlo si somos “buenos jugadores”, si jugamos de verdad, si disfrutamos y nos entusiasmamos,…si honestamente jugamos.

Referencias bibliográficas

Aizencang, N. (2005). *Jugar, aprender y enseñar. Relaciones que potencian los aprendizajes escolares.* Buenos Aires: Ediciones Manantial

Bixio, C. (2006). ¿*Chicos aburridos? El problema de la motivación en la escuela.* Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Elichiry, N. (2004). *Aprendizajes escolares. Desarrollos en psicología educacional.* Buenos Aires: Ediciones Manantial.

Levi, B. (2000). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Ricotti, S. (2005).*Juegos y problemas para construir ideas matemáticas.* Buenos. Aires: Novedades Educativas.

Ricotti, S. (2012). *Geometría y origami. Una fiesta con papeles para la clase de Matemática.* Rosario: Homo Sapiens Ediciones.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy*. Buenos. Aires: Libros del Zorzal.