POTENCIALIZANDO O ENSINO DE NÚMEROS COMPLEXOS A PARTIR DA ABORDAGEM VETORIAL

Daniella Assemany – Luiza Harab
daniella.cap@ufrj.br – harab.luiza@gmail.com
Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil –
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

Tema: Pensamento Geométrico
Modalidade: T (oficina)
Nível educativo: Médio
Palavras clave: números complexos; vetores; geometria vetorial

Resumo
O ensino tradicional do números complexos conduz a uma visão algébrica, desperdiçando o potencial de visualização proporcionado pela geometria. Carneiro (2004) afirma que o professor, ao mostrar um número complexo a+bi graficamente num plano cartesiano em que o eixo das abscissas representa a parte real e o das ordenadas a parte imaginária, o par (a,b) será a extremidade de um vetor centrado na origem. Isto permite atribuir significado geométrico aos números complexos e, consequentemente, as operações algébricas podem ser realizadas a partir de transformações geométricas no plano. Segundo Oliveira (2010), promove-se um apelo visual quando os números complexos são tratados primariamente como entes geométricos. Este trabalho se propõe a mostrar, a partir do enfoque vetorial, uma abordagem geométrica no estudo de Números Complexos no Ensino Médio. Assim, serão apresentadas atividades diferenciadas que podem ser utilizadas e aprimoradas pelos professores nas aulas de Matemática, partindo de um ponto de vista geométrico e vetorial. Além disso, serão destacados benefícios dessa abordagem e apresentados alguns resultados com alunos do 3o ano do Ensino Médio de um colégio federal do Rio de Janeiro. Acredita-se que essa pesquisa contribui para reflexões acerca do ensino tradicional e desconexo dos conteúdos de Matemática na educação básica.

Introdução

Esse artigo apresenta uma abordagem diferenciada na exploração dos números complexos com alunos do Ensino Médio de uma escola federal do Rio de Janeiro, Brasil. Deseja-se abdicar do *algebrismo* típico no ensino deste conteúdo na escola básica e fazer um paralelo com a sua representação geométrica, usufruindo das potencialidades da visualização no plano proporcionadas por este recurso.

Como defendida por Hadamard (2009) e Oliveira (2010), a ferramenta visual se torna uma aliada no ensino aprendizagem de Matemática na sala de aula. No caso dos números complexos, o que muitas vezes é despercebido, tanto para professores quanto alunos, é que a localização de um número z = a + bi, apresentado prioritariamente na forma algébrica, se constitui no par ordenado (a,b) no plano cartesiano em que o eixo das abscissas representa a parte real e o eixo das ordenadas a parte imaginária.

Carneiro (2004) e Oliveira (2010) apontam que, se os números complexos puderem estabelecer uma relação biunívoca com os vetores no R^2, a maioria dos problemas relacionados a este conteúdo será facilmente resolvida apenas com a utilização da noção vetorial em conjunto com a geometria no plano.

> O enfoque algébrico permite começar logo a operar com complexos sem dificuldade, mas a experiência tem mostrado que quando se perde a chance de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, em geral esta oportunidade não se recupera. (Carneiro, 2004, pp. 8-9)

Nota-se que as pesquisas apontam para a necessidade de conectar os conteúdos de *Geometria Plana* e *Vetores* aos *Números Complexos*. Portanto, este recurso vetorial e geométrico foi denominado pelas autoras, neste trabalho, de *geometria vetorial*.

Essa oficina tem por objetivo apresentar aos professores de Matemática uma abordagem diferenciada para os números complexos, a partir da geometria vetorial, incluindo as possíveis representações e operações definidas em $\mathbb{C}$. Acredita-se que as contribuições desse trabalho extrapolam o ensino de *Números Complexos*, pois interferem diretamente no estudo da Matemática em séries anteriores quando o professor se propõe a olhar e explorar os conteúdos do Ensino Médio (EM) sob a ótica da geometria vetorial.

Para atingir esses objetivos, será apresentada a abordagem no ensino de *Números Complexos* aplicada aos alunos da 3ª série do EM do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil (CAp UFRJ). Serão mostradas atividades aplicadas a estes alunos, desenvolvidas com o intuito de instigá-los a conjecturar por meio de visualizações e inferir suas resoluções a partir de conceitos previamente consolidados.

O Ensino de Números Complexos no CAp UFRJ

O Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp UFRJ) é uma escola pública subordinada ao governo federal brasileiro, sendo um órgão suplementar da UFRJ. Suas principais finalidades são na atuação de ensino, pesquisa e extensão na educação básica, se constituindo em campo de estágio supervisionado para a formação de profissionais em educação e áreas afins. Atendendo a essas orientações, o setor curricular de Matemática do CAp UFRJ propõe ações pedagógicas no ensino e na formação de professores. Aos alunos são oferecidos, na grade curricular do 6º ano do Ensino Fundamental à 3a série do Ensino Médio, quatro tempos semanais de Matemática, em média. Essa carga horária é insuficiente para dar consistência ao ensino a partir de investigações, conjecturas e inferências. Para que não haja prejuízo na qualidade do ensino e aprendizagem, foram feitos alguns ajustes curriculares, otimizando o tempo e aprofundando os conteúdos. Nos últimos sete anos, a reestruturação curricular tem sido feita com mais ênfase no EM. Para a compreensão da abordagem de *Números Complexos* a partir da geometria vetorial, é necessário explicitar o atual currículo para o Ensino Médio do CAp UFRJ, conforme discrimina-se na tabela abaixo:

Tabela 1

	Conteúdos	
	1° semestre	**2° semestre**
1a série / E.M.	Conjuntos Numéricos e Intervalos Reais	Funções
	Vetores no R^2	Módulo de um número real
	Circunferência e sua equação	Função Afim / Modular
	Transformações no R^2	Progressão Aritmética
	Trigonometria no círculo	Função Quadrática / Modular
	Equações da reta no plano	Inequações
2a série / E.M.	Função Exponencial / Modular	Matemática Financeira
	Equação e Inequação Exponencial	Trigonometria
	Progressão Geométrica	Funções Trigonométricas
	Logaritmos	Análise Combinatória
	Função Logaritmica / Modular	Probabilidade
	Equação e Inequação Logaritmicas	Binômio de Newton

A noção de *Vetores no* R^2 desde a 1ª série do EM lança mão de um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos posteriores, como *Transformações no Plano*, *Trigonometria*, *Função Afim*, *Translações de Gráficos*, *Matrizes e Números Complexos*, simplificando cálculos desnecessários que estes temas recorrem quando seu ensino é feito de maneira isolada. A organização dos conteúdos pretende conduzir o aluno a interpretações geométricas de fatos algébricos. A tabela 2 mostra a inserção dos números complexos na grade curricular da 3ª série do Ensino Médio.

Tabela 2

	Conteúdos	
	1° semestre	**2° semestre**
3a série / E.M.	Revisão de Funções, Vetores no plano e Geometria plana	Geometria espacial por vetores no R^3
	Números Complexos por vetores	Prismas com equações de plano
	Polinômios com funções reais	Esfera e superfície esférica
	Vetores no R^3	Cilindros por rotação de retas
	Sistemas, Matrizes e Determinantes	Cones por rotação de retas
	Transformações no plano através de matrizes	Pirâmides com equações de plano
	Equações de retas e planos (SLNH)	Sólidos inscritos
	Geometria espacial de posição	Cônicas
	Poliedros	Estatística

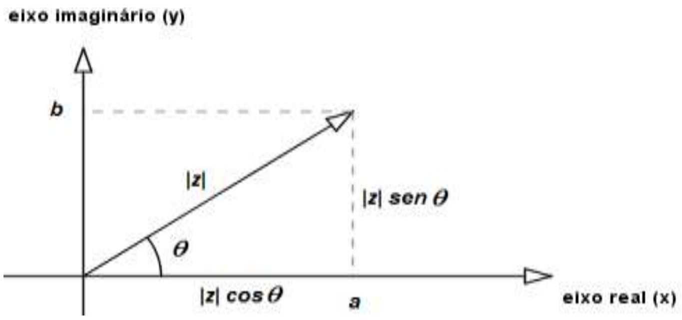
Para dar início aos estudos de *Números Complexos* na 3ª série do EM do CAp UFRJ, apresenta-se a motivação: *"Tente descobrir dois números x e y, sabendo que sua soma é*

18 e seu produto é 82.”. Seu desenvolvimento indica o surgimento de um conjunto no qual estão contidos os *Números Reais*, definido como *Conjunto dos Números Complexos*. A partir da forma algébrica a + bi, faz-se a correlação biunívoca com os vetores no R^2, apresentando-o no plano de Argand-Gauss pelo par ordenado (a,b) e no plano cartesiano pela extremidade de um vetor com origem em (0,0), como sugerido por Carneiro (2004).

Em seus estudos, Carneiro (2004) também sinalizou as relações que as operações algébricas dos números complexos têm com as transformações geométricas no plano quando se propõe a enxergar esses números como pontos ou vetores. Como no CAp UFRJ os alunos trabalham com os vetores desde a 1ª série do EM, esta abordagem se torna mais facilitada ao explorar esses entes geométricos. Quando direciona-se esta abordagem vetorial para os números complexos, abre-se um leque de possibilidades para abordagens geométricas utilizando a geometria vetorial.

No momento em que um número complexo é localizado no plano, sua leitura vetorial permite que os conceitos de Módulo e Argumento de números complexos sejam associados à Módulo e Inclinação de vetores, surgindo intuitivamente a forma trigonométrica de um número complexo, como na figura a seguir:

Figura 1

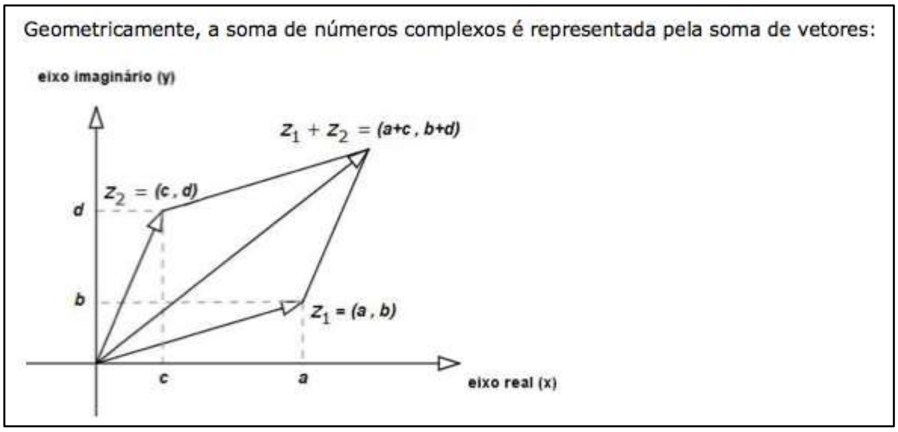


Posteriormente, são mostradas, no plano complexo, as potências de i e sua interpretação geométrica através da rotação do afixo em torno da origem. Os alunos são motivados a perceber que, além do significado da rotação de 90° em torno da origem representar a multiplicação de um complexo por i, a multiplicação por $\sqrt{i}\ ou\ i^{\frac{1}{2}}$ produz uma rotação de 45° do afixo em torno da origem. Através de experimentações, conclui-se que as rotações de um ângulo θ em torno da origem, que são exploradas vetorialmente na 1ª série do Ensino Médio, são revistas sob a ótica de multiplicar um número complexo por $i^{\frac{1}{n}}$, em que n é $\frac{90}{\theta}$, com $\theta\ \neq 0$. Como exemplo, destaca-se a seguinte atividade:

Dados os vértices A = (3,4) e C = (5,8) do quadrado ABCD, determine as coordenadas dos vértices B e D.
Resolução: Considerando o ponto médio das diagonais do quadrado, determina-se M = (4,6). Como as diagonais de um quadrado são perpendiculares, então $\overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{MD}$. $Mas\ \overrightarrow{MD} = i.\overrightarrow{MC}$. Logo, se $\overrightarrow{MC} = \vec{z} = (1,2)$, então z = 1 + 2i. Assim, w = MD = (1 + 2i) . i = -2 + i e $\overrightarrow{MD}$ = (−2,1) . Logo, D = (-2, 1) + M → **D = (2, 7)**. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então B = C – D + A → **B = (6, 5)**.

No conjunto dos números complexos, o conceito de igualdade, conjugado e as operações de adição, subtração e multiplicação por um número real são apresentados através das coordenadas dos vetores formados pela origem com extremidade no afixo no plano complexo. Assim, estas noções são revalidadas a partir de conceitos já conhecidos, como destaca-se a figura 2, apresentada no material didático *Matemática no CAp UFRJ – Construindo Caminhos: Números Complexos e Polinômios*, desenvolvido pelos professores Cleber Neto, Daniella Assemany, Fernando Villar, Leo Akio, Letícia Rangel, Lilian Spiller, Priscila Dias e Ulisses Dias (2013):

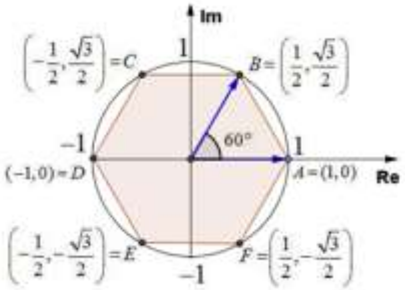
Figura 2



(Dias et al, 2013, p.18)

A multiplicação e a potenciação são abordadas de maneira tradicional, a partir da forma trigonométrica, obtendo-se a primeira Fórmula De Moivre. O grande diferencial dessa abordagem é a determinação de raízes complexas de um número complexo (operação de radiciação), que é apresentada sem a utilização de fórmula. Para isso, é sugerida uma atividade de investigação em que, dado um ponto A = (1,0), os alunos são motivados a efetuar rotações sucessivas de 60^{o} em torno da origem até que este ponto retorne para a posição inicial, anotando as coordenadas e identificando que a figura formada é um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio 1, conforme Assemany e Azevedo (2011) destacam através da figura abaixo:

Figura 3



$A=1\cdot cis(0)$ $\quad D=1\cdot cis\cdot\left(\frac{3\pi}{3}\right)$

$B=1\cdot cis\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad E=1\cdot cis\cdot\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$C=1\cdot cis\cdot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad F=1\cdot cis\cdot\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

(Assemany e Azevedo, 2011, p.2)

Em seguida, é proposto que os alunos calculem a sexta potência de cada afixo representativo dos vértices do hexágono para observarem que os resultados são iguais a $1 = 1^6$ = (raio da circunferência)^6. Assim, conclui-se que as raízes sextas de 1 são dadas pelos afixos A, B, C, D, E e F da figura 3. Então, define-se: “Os afixos das n raízes enésimas de z dividem a circunferência de centro (0,0) e raio $\sqrt[n]{|\vec{z}|}$ em n partes congruentes, isto é: Se $n=2$, são pontos diametralmente opostos. Se $n\geq 3$, são vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência.” (Iezzi, 1994, p.43).

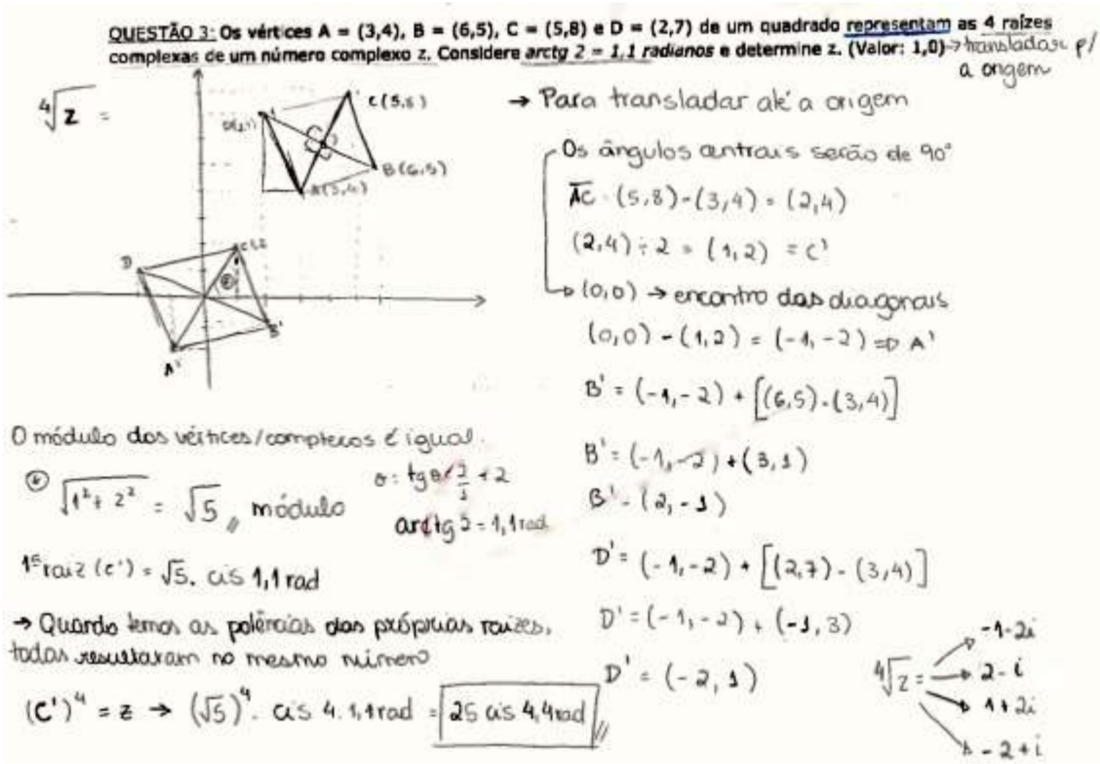
Para determinar todas as raízes de um número complexo, localizam-se os vértices de um polígono regular através de rotações partindo de uma raiz complexa conhecida. Por exemplo*, $\sqrt[3]{-8}$ tem -2 como raiz conhecida, e as outras são determinadas por rotações de 120° de z = -2. O processo para localizar as coordenadas dos vértices na extração da raiz enésima de um número complexo divide-se em: i) há pelo menos uma raiz real (*); ii) todas as raízes são da forma a + bi, sendo b ≠ 0. Neste caso, “(...) utiliza-se a potenciação de números complexos para determinar a primeira raiz e localizá-la no plano complexo, e posteriormente fazer a rotação.” (Assemany e Azevedo, 2011, p.3).

Resultados

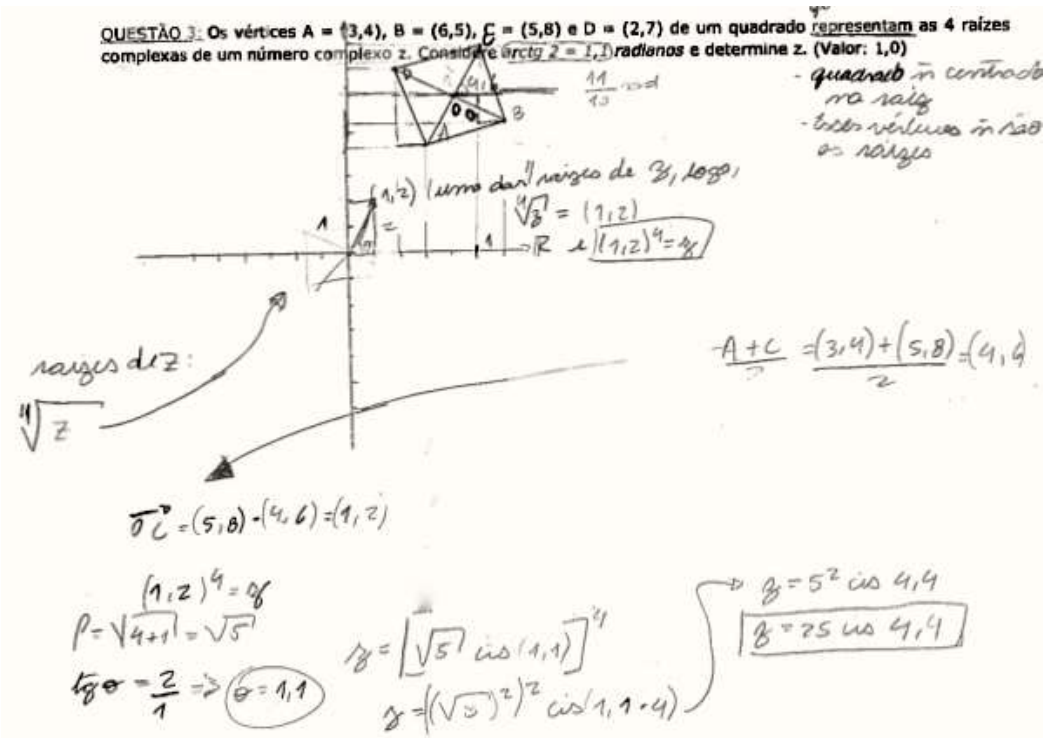
A atividade a seguir foi realizada com alunos do CAp UFRJ e mostra a presença da abordagem vetorial que os auxilia pelo seu apelo visual. Em anexo, há seis atividades essenciais que exemplificam o potencial da geometria vetorial nos números complexos.

<table>
<tr><td>Objetivo</td><td>Determinar um número complexo a partir de suas raízes complexas</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>Vetores, Translação, Rotação, Polígono regular, Trigonometria</td></tr>
<tr><td colspan="2">Os vértices A = (3,4), B = (6,5), C = (5,8) e D = (2,7) de um quadrado representam 4 raízes complexas de um número complexo z transladado da origem segundo um vetor.
Considere arctg 2 = 1,1 radianos e determine z.</td></tr>
</table>

Aluno A



Aluno B



Esses dois exemplos foram selecionados para por demonstrarem que a geometria vetorial oferece subsídios para que os alunos raciocinem e conceituem a partir do dinamismo proporcionado pelos vetores. Os dois alunos em destaque utilizaram os conceitos vetoriais na resolução, porém produziram significados diferentes. Observe que o aluno A transladou o quadrado inicial para a origem antes de resolver a questão, atendo-se à figura geométrica para obter maior compreensão. Já o aluno B, partiu da ideia que o vetor (1,2) representado na forma canônica, garante uma das raízes do número complexo. A translação de pontos não foi essencial na sua resolução.

Conclusões

Esse trabalho aponta para o ensino aprendizagem de *Números Complexos* na educação básica através de raciocínios, correlações, múltiplas representações e produção de significados, promovendo a supressão de fórmulas prontas, muitas vezes utilizadas por professores e alunos. Além disso, destacaram-se resoluções, com base em recursos diferentes, para um mesmo problema de *determinação de um número complexo*. Desse modo, o ensino da geometria vetorial se mostrou um facilitador na resolução e compreensão de questões de matemática do Ensino Médio.

Os anexos também mostram seis situações problema em que, para resolvê-las, há a necessidade da geometria vetorial. Esses resultados foram provenientes de uma abordagem diferenciada para o ensino de *Números Complexos*, descrita neste trabalho.

Através da análise das resoluções dos alunos da 3ª série do CAp UFRJ, concluiu-se que o enfoque geométrico, destacado por Carneiro (2004), permitiu que o ensino dos números complexos fosse significativo e útil dentro da matemática estudada até então.

Acredita-se que a geometria vetorial, recorrente do ensino de vetores em consonância com a geometria plana, torna mais efetivo o ensino aprendizagem da matemática, sendo validado e priorizado o raciocínio do aluno na escola básica.

Referências bibliográficas

Akio, L. Assemany, D. Dias, P. Dias, U. Neto, C. Rangel, L. Spiller, L. & Villar, F. (2013). Matemática no CAp UFRJ – Construindo Caminhos: Números Complexos e Polinômios. Rio de Janeiro, Brasil: Edição 1.

Assemany, D. e Azevedo, C. (2011). O ensino de vetores como ferramenta para a determinação de raízes complexas de um número complexo. VII Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Carneiro, J.P. (2004). A geometria e o ensino dos números complexos. En Memorias de VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife (Inverno 2004). Recuperado de http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf

Hadamard J., (2009). Psicologia da Invenção na Matemática. Rio de Janeiro: Contraponto Editora Ltda.

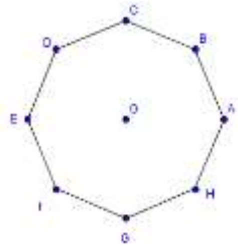
Iezzi, G. (1994). Fundamentos da Matemática Elementar. Ed. Atual.

Oliveira, C. N. C. (2010). Números complexos: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. (Tese de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, Brasil.

Anexos

Atividade 1	
Objetivo	Determinar as coordenadas dos vértices de um octógono regular.
Recursos	Vetores, Rotação, Polígono inscrito, Trigonometria

A figura é um octógono regular ABCDEFGH de centro O e lado de medida $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Admitindo um plano complexo, cujos eixos coincidem com as retas OA (eixo real) e OC (eixo imaginário), determine os afixos dos números complexos em A, B, C, D, E, F, G, H.



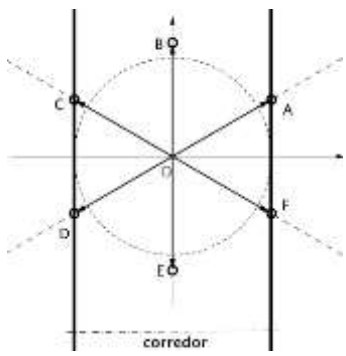
Atividade 2	
Objetivo	Relacionar as coordenadas dos vértices de um hexágono regular com as raízes cúbicas complexas de dois números complexos.
Recursos	Vetores, Rotação, Polígono inscrito, Trigonometria, Raízes Complexas

Resolvendo as equações $z^3 = 8$ e $w^3 = -8$ e localizando os afixos das suas raízes complexas em um mesmo plano de Argand-Gauss, obtém-se um hexágono H. Esboce o desenho deste hexágono, apresentando as coordenadas de seus vértices, e determine a área de H.

Atividade 3	
Objetivo	Identificar a equação das retas perpendiculares às retas dadas e determinar a coordenadas do ponto de interseção das mesmas.
Recursos	Vetores, Rotação, Equação da reta

A figura a seguir mostra uma circunferência tangente às paredes paralelas de um corredor, de centro em O, origem do plano cartesiano, o qual possui duas retas, uma na direção do vetor $\left(-\sqrt{3}\ ,1\right)$ e outra com equação $x-\sqrt{3}y=0$. A largura do corredor é de $2\sqrt{3}$ metros e $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}|$.

Uma pessoa encontra-se sobre ponto B da figura e, sem deslocar-se, lança duas bolas que deslizam pelo solo em linha reta, simultaneamente e com mesma intensidade, a partir de B. Uma bola seguiu para o ponto F e outra para o ponto D. Após tocarem as paredes do corredor, as bolas mantiveram seu trajeto retilíneo até se chocarem. Considere que o ponto F representa o conjugado de A e faça o que se pede:



a) Determine o número complexo que representa o conjugado de B.

b) As bolas se encontrarão em algum dos pontos da figura (O, A, B, C, D, E ou F)? Justifique e determine as coordenadas de tal ponto em caso afirmativo.

Atividade 4

Objetivo	Determinar as coordenadas dos vértices do quadrado inicial através de simetrias centrais e utilizar conceitos de geometria plana.
Recursos	Vetores, Transformações, Geometria Plana

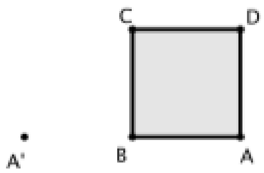
CARNIÇA COMPLEXA: Quatro crianças, dispostas sobre os vértices de um quadrado de lado 5 dm, decidem brincar de carniça. Na brincadeira, a primeira criança deve pular por cima de todas as outras e, em seguida, a segunda criança pula por cima de todas as outras, até que todas tenham completado o percurso.

Admitamos que "pular" significa fazer uma reflexão da criança que pula em relação à criança a ser pulada. Na brincadeira, a ordem dos pulos deve obedecer as seguintes sequências necessariamente:

A $\Rightarrow$ B, C e D   **C** $\Rightarrow$ D, A e B

B $\Rightarrow$ C, D e A   **D** $\Rightarrow$ A, B e C

Considere que a criança **A** encontra-se sobre o afixo do número complexo **z = 2 + i.** A figura mostra a posição ao final do primeiro pulo da criança **A sobre a criança B**, que recai na posição de **A',** de modo que o eixo real do plano complexo esteja paralelo ao lado AB do quadrado.



Faça o que se pede.

a) Escreva as coordenadas das posições das crianças B, C e D, no plano complexo, antes de começar a brincadeira.

b) Determine os afixos em A' e A", representantes da posição da criança A após o 1^o e 2^o pulos, respectivamente.

c) Calcule a área do quadrilátero formado pelos pontos correspondentes às posições A', B', C' e D', representantes do 1^o pulo de cada criança.

d) No final da brincadeira, todas as crianças ainda estarão dispostas na forma de um quadrado? Justifique sua resposta matematicamente.

Atividade 5

Objetivo	Determinar as coordenadas de um triângulo equilátero a partir da rotação.
Recursos	Vetores, Rotação, Polígono inscrito, Trigonometria

Considere o polígono P, cujos vértices são os afixos de todas as raízes complexas $\sqrt[3]{-8}$. Sabe-se que o polígono P' foi gerado através da rotação de P, em torno da origem, sob um ângulo de 90^o no sentido anti-horário. Determine as expressões algébricas para os afixos representantes dos vértices de P' no plano complexo.

Atividade 6

Objetivo	Resolver problemas geométricos a partir de números complexos.
Recursos	Reta, Circunferência, Afixos, Trapézio, Trigonometria

São dados os vértices de um trapézio cujos afixos são A= $\sqrt{2}$ cis 45^o, B= 3 + i e C = 5 – i. Sabendo que o vértice D do trapézio está sobre a reta y = x e sobre a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$, determine:

a) as coordenadas do vértice D do trapézio.

b) a medida do ângulo interno $\widehat{ABC}$.