

LAS SIMULACIONES COMO HERRAMIENTA DE ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Samira Abdel Masih. Jorge Colman Lerner.
abdel.masih@hotmail.com - jcolman@ing.unlp.edu.ar
Universidad Nacional de Lomas de Zamora, Facultad de Ingeniería.
Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ingeniería.
República Argentina.

Tema: Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Modalidad: Comunicación breve

Nivel educativo: Terciario – Universitario

Matemática.

Palabras clave: Simulaciones. Cálculo de Integrales. Funciones de una variable.

Resumen

El enorme progreso producido por la ciencia durante los últimos años, se debe en gran parte a la Matemática.

En particular, la rama de la Matemática conocida como Cálculo Integral, constituye un poderoso instrumento para resolver problemas provenientes de diversas ramas de la ciencia.

Su origen data de más de 2000 años, cuando los griegos intentaban calcular áreas de regiones planas limitadas por curvas. Pero recibió su mayor impulso en el siglo XVII, debido a los esfuerzos de Isaac Newton (1642 -1727) y de Gottfried Leibniz (1646-1716). Luego continuó en el siglo XIX, hasta que Agustín Cauchy (1789-1857) y Bernhard Riemann (1826-1866) le dieron una base matemática firme.

Este trabajo desarrolla el concepto de integral de funciones de una variable mediante los potentes pero sencillos recursos de simulación que brinda el software Wolfram Mathematica.

Se mostrarán ejemplos de aplicación provenientes de situaciones de la vida real que, para su resolución, conducirán al cálculo de integrales. Luego se ilustrará cómo efectuar las simulaciones de los mencionados ejemplos.

Este nuevo enfoque pedagógico y metodológico ayudará al estudiante de cualquier carrera vinculada con la Matemática y las Ingenierías, a comprender fácilmente este concepto, aprovechando los recursos que brindan las computadoras en nuestros días.

1. Antecedentes y metodología

1.1 El problema del área de una región de borde curvo

El problema del cálculo de áreas fue uno de los estímulos para el desarrollo del Cálculo Integral: ¿cómo calcular el área de una región de borde curvo? Esta pregunta fue formulada hace más de 2000 años por los griegos quienes, con este propósito, idearon un procedimiento al que llamaron “Método de Exhaustión”.

Las ideas generales de este método son muy simples y se pueden describir brevemente como sigue: Dada una región plana cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que aproxime a la dada y cuya área sea fácilmente calculable. Luego se elige otra región poligonal que dé una mejor aproximación y se continúa el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región dada.

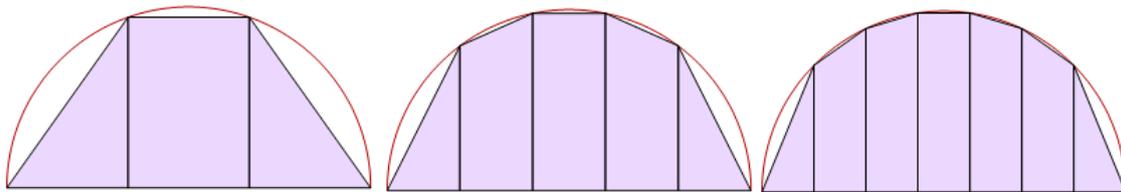


Figura 1. El Método de Exhaustión aplicado a una región semicircular

Este método fue utilizado satisfactoriamente por Arquímedes (287- 212 a.C.) para hallar fórmulas más exactas de las áreas del círculo y de otras figuras limitadas por un arco de parábola.

1.2 Simulación del Método de Exhaustión

La siguiente simulación, diseñada mediante el software Wolfram Mathematica 8.0, desarrolla el Método de Exhaustión para calcular áreas de regiones planas limitadas por gráficas de funciones de una variable. En ella se ingresan como datos la expresión de la función, el intervalo en el cual se la graficará y el rango de los ejes de abscisas y de ordenadas. El programa ilustra cómo las regiones poligonales se aproximan cada vez más a la figura cuya área se desea calcular. Además, calcula el área aproximada de la figura mediante el cálculo del área de dichas poligonales. La figura 2 muestra el correspondiente código fuente y en la figura 3 se puede observar cómo, haciendo uso de los controladores, la región poligonal se va asemejando a la figura en cuestión.

```

Interpretation[{f = 0, a = 0, b = 0, rxmin = -3, rxmax = 3, rymin = -3, rymax = 3},
Panel[Grid[{{Style["Ingrese la expresión de la función f ", Bold], SpanFromLeft},
{"f(x)=", InputField[Dynamic[f]}},
{Style["Ingrese el intervalo [ a , b ] donde se graficará f", Bold], SpanFromLeft},
{"a:", InputField[Dynamic[a]}}, {"b:", InputField[Dynamic[b]}},
{Style["Rango de los ejes", Bold], SpanFromLeft},
{"Rango mínimo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmin]]},
{"Rango máximo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmax]]},
{"Rango mínimo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymin]]},
{"Rango máximo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymax]]}}]],
Manipulate[
Grafica = Plot[f, {x, a, b}, AxesStyle -> Arrowheads[0.05],
PlotStyle -> {RGBColor[0.701961, 0, 0], Thickness[0.005]}];
Area = N[Sum[(((b - a) / 2 n) ((f /. {x -> (a + (k (b - a) / n)}) + (f /. {x -> (a + ((k + 1) (b - a) / n)})))))], {k, 0, n - 1}];
Show[Grafica,
Table[Graphics[{{EdgeForm[Black], RGBColor[0.847059, 0.690196, 1], Opacity[0.5],
Polygon[{{(a + ((k + 1) (b - a) / n), 0}, {a + ((k + 1) (b - a) / n), f /. {x -> (a + ((k + 1) (b - a) / n)}},
{a + (k (b - a) / n), f /. {x -> (a + (k (b - a) / n)}}, {a + (k (b - a) / n), 0}}}], {k, 0, n - 1}],
AxesStyle -> Arrowheads[0.05], PlotRange -> {{rxmin, rxmax}, {rymin, rymax}}, Axes -> False,
AspectRatio -> 1/2], Panel[" Valor aproximado del área con el Método de Exhaustión "],
{{n, 1, "Cantidad de rectángulos"}, 1, 20, 1}, {Area}, SaveDefinitions -> True]]

```

Figura 2. Código fuente para el Método de Exhaustión.

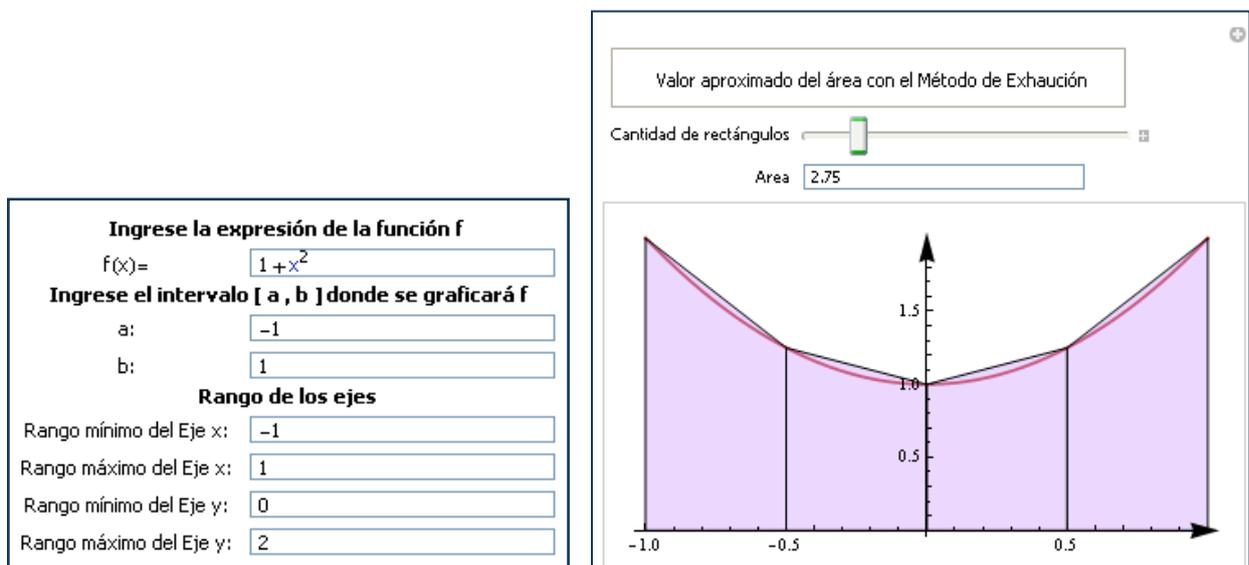


Figura 3. Simulación del Método de Exhaustión para la región limitada por la curva $y = x^2$.

1.3 La definición de integral

Desde Arquímedes, el desarrollo del Método de Exhaución tuvo que esperar 18 siglos, hasta que el uso de símbolos y técnicas algebraicas se hizo preciso en los estudios matemáticos. El Álgebra elemental que es actualmente familiar para la mayoría de los alumnos de nivel terciario y universitario, era totalmente desconocida en tiempos de Arquímedes, lo que tornaba imposible extender el método a cualquier clase de regiones. Gradualmente, el Método de Exhaución que empleaba áreas de regiones poligonales, fue reemplazado por el cálculo de áreas de regiones rectangulares, transformándose en lo que hoy se conoce como Cálculo Integral. Esta disciplina matemática recibió su mayor impulso en el siglo XVIII, gracias a Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716). Su desarrollo continuó durante el siglo XIX, hasta que Agustin Cauchy (1789-1857) y Bernhard Riemann (1826-1866) le dieron el toque final, tal cual se estudia en nuestros días, con el nombre de “integral definida”. Su definición es la siguiente:

Definición de integral definida

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene una cantidad numerable de discontinuidades (pero no discontinuidades infinitas) en un intervalo $[a, b]$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a) / n$. Denotamos con $x_i = a + i(b-a) / n$, para $i = 0, \dots, n$, a los puntos extremos de estos subintervalos. Entonces la integral definida de f , desde a hasta b , es

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

La suma $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ se llama Suma de Riemann. Si f es positiva, esta suma puede interpretarse como una suma de áreas de rectángulos de aproximación, que es un caso especial del Método de Exhaución.

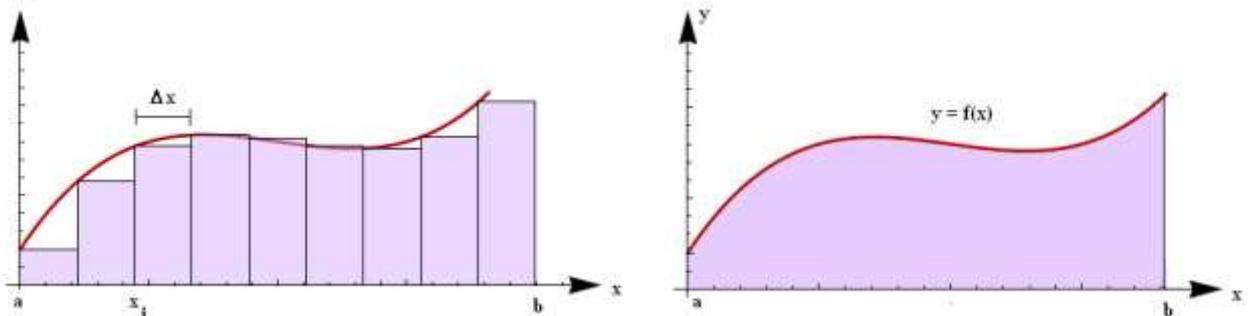


Figura 4. Izquierda: Si $f(x) \geq 0$, la Suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos. Derecha: La integral definida es el área bajo la curva $y=f(x)$, desde a hasta b .

1.4 Simulación del Cálculo Integral

En la siguiente figura se muestra el código fuente que permite ingresar la expresión de una función f y un determinado intervalo $[a, b]$, para llevar a cabo la simulación. En la figura 6 se puede comprobar cómo, al ejecutar la simulación, las sumas de Riemann se aproximan a la integral

$$\int_a^b f(x) dx .$$

```

Interpretation[{f = 0, a = 0, b = 0, rxmin = -3, rxmax = 3, rymin = -3, rymax = 3},
Panel[Grid[{{Style["Ingrese la expresión de la función f ", Bold], SpanFromLeft},
{"f(x)=", InputField[Dynamic[f]]},
{Style["Ingrese el intervalo [ a , b ] donde se graficará f", Bold], SpanFromLeft},
{"a:", InputField[Dynamic[a]]}, {"b:", InputField[Dynamic[b]]},
{Style["Rango de los ejes", Bold], SpanFromLeft},
{"Rango mínimo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmin]]},
{"Rango máximo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmax]]},
{"Rango mínimo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymin]]},
{"Rango máximo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymax]]}}]],
Manipulate[Gráfica = Plot[f, {x, a, b}, AxesStyle -> Arrowheads[0.05], AxesOrigin -> {0, 0},
PlotStyle -> {RGBColor[0.701961, 0, 0], Thickness[0.005]}];
Suma = N[Sum[(((b - a) / n) (f /. {x -> (a + (k (b - a) / n))})), {k, 0, n - 1}]];
Show[Gráfica,
Table[Graphics[{{EdgeForm[Black], RGBColor[0.847059, 0.690196, 1], Opacity[0.5],
Rectangle[{{a + (k (b - a) / n), 0}, {a + ((k + 1) (b - a) / n), f /. {x -> (a + (k (b - a) / n))}}]}, Axes -> True,
AxesOrigin -> {0, 0}], {k, 0, n - 1}], AxesStyle -> Arrowheads[0.05],
PlotRange -> {{rxmin, rxmax}, {rymin, rymax}}, Axes -> True, AspectRatio -> 1 / 2],
Panel["Valor aproximado de la integral por Sumas inferiores de Riemann",
{{n, 1, "Cantidad de rectángulos"}, 1, 200, 1}, {Suma}, SaveDefinitions -> True] ]
    
```

Figura 5. Código fuente para el cálculo y demostración gráfica de la integral definida.

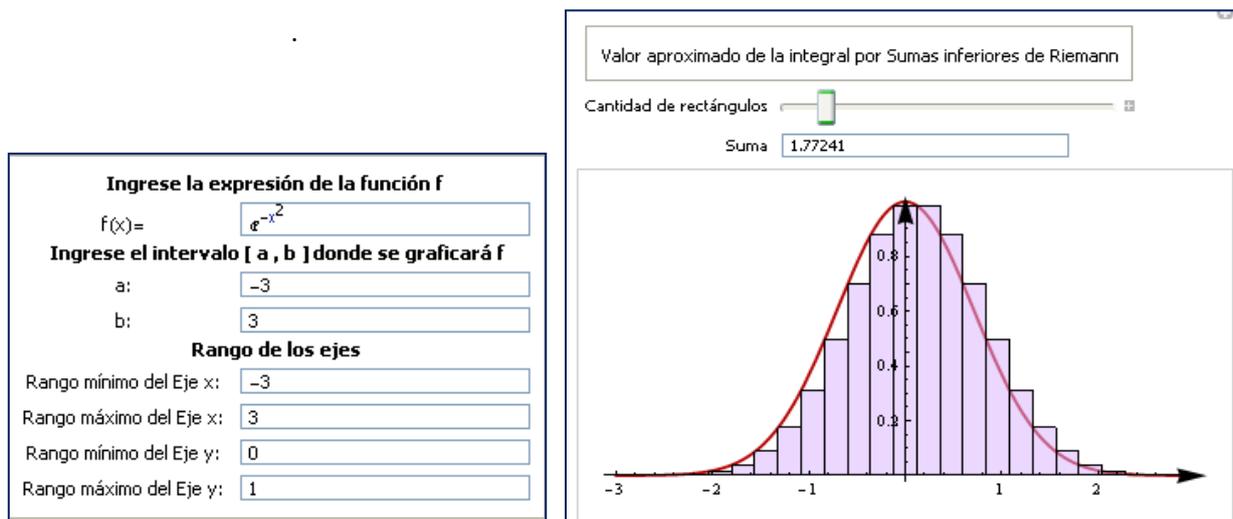


Figura 6. Simulación de la integral definida para la función $f(x) = e^{-x^2}$ en $[-3, 3]$

2. Ejemplos de aplicación de la integral

2.1 Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

El volumen de un objeto desempeña un rol importante en numerosos problemas de las ciencias físicas y de la ingeniería. En particular, los sólidos de revolución son muy utilizados para el diseño de ejes, embudos, píldoras, botellas y pistones. En la siguiente figura se muestran los comandos que permiten generar un sólido de revolución al girar, alrededor del eje x , una región acotada por las rectas $x = a$, $x = b$ y las gráficas de dos funciones continuas f y g con $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Asimismo, calcula el volumen de dicho sólido.

```

Interpretation[{f = 0, g = 0, min = 0, max = 0, rxmin = -3, rxmax = 3, rymin = -3, rymax = 3, rzmin = -3, rzmax = 3},
Panel[
Grid[
{{Style[
"Solido de revolución generado por las gráficas de f y g, con f(x) >= g(x), entre x = a y x = b",
Bold], SpanFromLeft}, {Style["Ingrese la expresión de la función f", Bold], SpanFromLeft},
{"f(x)=", InputField[Dynamic[f]]},
{Style["Ingrese la expresión de la función g", Bold], SpanFromLeft},
{"g(x)=", InputField[Dynamic[g]]}, {Style["Rango de los ejes", Bold], SpanFromLeft},
{"Ingrese el valor de a:", InputField[Dynamic[min]]},
{"Ingrese el valor de b:", InputField[Dynamic[max]]},
{"Rango minimo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmin]]},
{"Rango maximo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmax]]},
{"Rango minimo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymin]]},
{"Rango maximo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymax]]},
{"Rango minimo del Eje z:", InputField[Dynamic[rzmin]]},
{"Rango maximo del Eje z:", InputField[Dynamic[rzmax]]}}]],
Manipulate[Volumen = Integrate[ $\pi (f^2 - g^2)$ , {x, min, max}];
Show[Table[ParametricPlot3D[{f Sin[tita], x, f Cos[tita]}, {x, min, max},
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0.501961, 1]}], {tita, 0, k, 0.05}],
Table[ParametricPlot3D[{g Sin[tita], x, g Cos[tita]}, {x, min, max},
PlotStyle -> {RGBColor[0.666667, 0, 0]}], {tita, 0, k, 0.05}], Boxed -> False, Axes -> True,
AxesOrigin -> {0, 0, 0}, AxesLabel -> {"x", "y", None}, ViewPoint -> {Pi, Pi/2, 2},
PlotRange -> {{rxmin, rxmax}, {rymin, rymax}, {rzmin, rzmax}}],
{{k, 0, "Inicio"}, 0, 2.5 Pi, ControlType -> Trigger},
Panel["El volumen del sólido de revolución alrededor del eje x es:"], {Volumen}

```

Figura 7. Código fuente para generar un sólido de revolución alrededor del eje x y su correspondiente cálculo de volumen.

2.2 Ejemplo

Un copón ornamental se diseña al hacer girar la gráfica de la función $f(x) = x + \sin(ax)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$, alrededor del eje x . En este caso, x y $f(x)$ se miden en cm.

- Mostrar los diferentes diseños del copón, para valores de $a \in [1, 5]$
- ¿Cuál es el valor de "a" que maximiza el volumen del copón?

Solución

a) En la siguiente figura se ilustra los diferentes diseños del copón, al ejecutar la simulación:

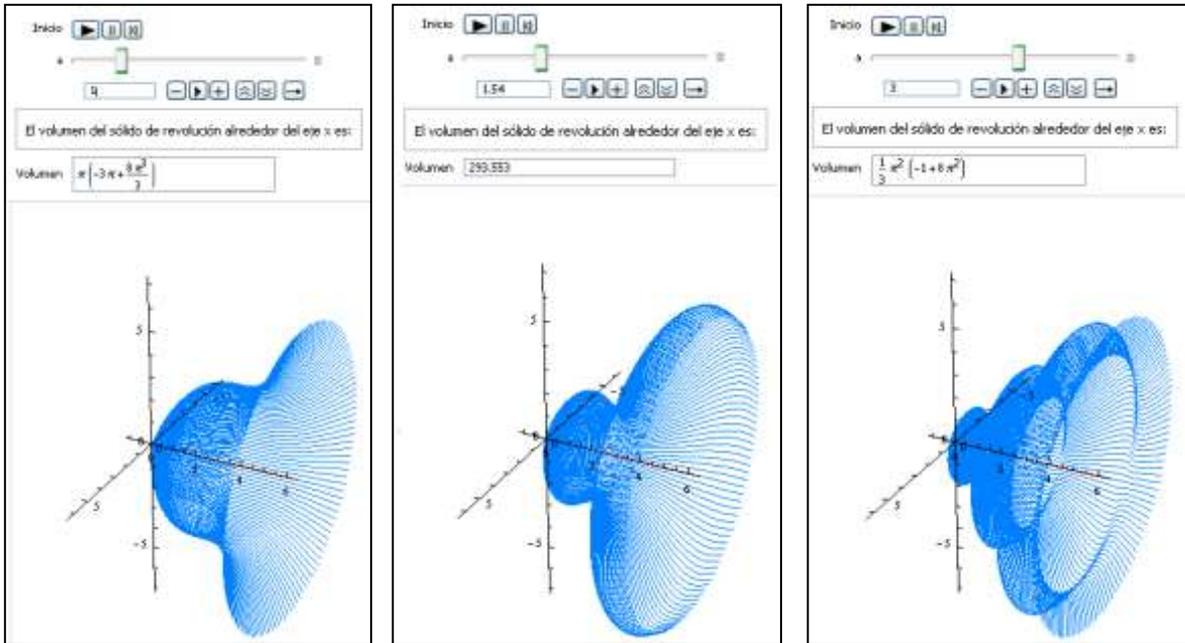


Figura 8. Simulación del copón con diferentes valores de “a”. Izquierda: a = 1. Centro: a=1.54. Derecha: a = 3.

b) El volumen del copón, por tratarse de un sólido de revolución obtenido al girar la gráfica de f alrededor del eje x, es

$$\pi \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (x + \sin(ax))^2 dx = \pi \frac{2 a^2 \pi (3 + 8 \pi^2) + 12 \sin(2 a \pi) - 3 a \cos(2 a \pi) + (8 \pi + \sin(2 a \pi))}{6 a^2}$$

Para hallar el máximo de la función volumen, la graficaremos en el intervalo [1, 5] ya que no es posible determinar analíticamente sus puntos críticos:

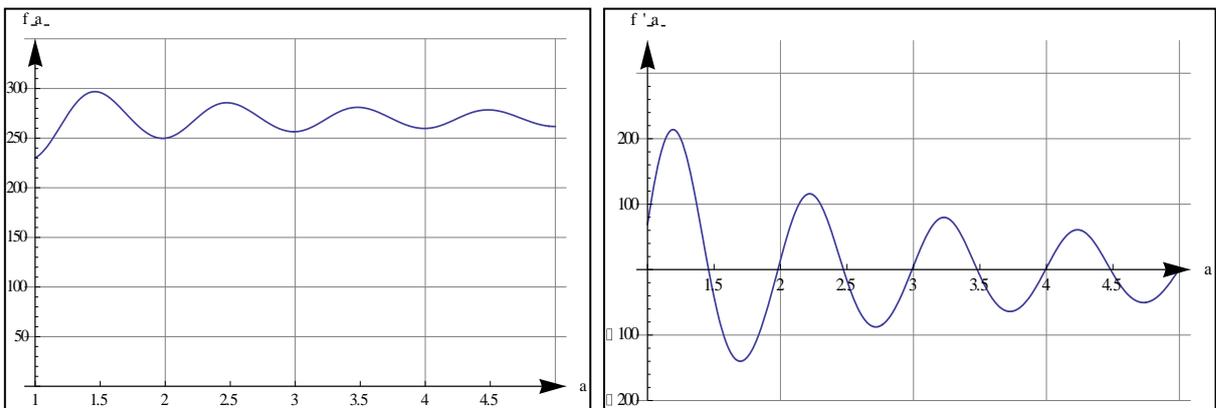


Figura 9. Gráfica del volumen (izquierda) y de su derivada (derecha) en el intervalo [1,5]

Se observa que para a = 1.46 se alcanza el volumen máximo del copón, el cual es de 296.81 cm³.

2.3 Cálculo del centro de masa de una lámina plana de densidad constante

Sean f y g son funciones continuas con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ en $[a, b]$, y consideremos la lámina plana de densidad uniforme ρ limitada por las gráficas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$.

Entonces, el centro de masa (x_0, y_0) de la lámina está dado por $x_0 = \frac{M_y}{m}$, $y_0 = \frac{M_x}{m}$ con

$$M_x = \rho \int_a^b \left[\frac{f(x) + g(x)}{2} \right] [f(x) - g(x)] dx, \quad M_y = \rho \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

Donde $m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ es la masa de la lámina.

La siguiente simulación permite ingresar las expresiones de f , g , a , b a fin de dibujar la lámina plana y mostrar el centro de masa. En este caso, se calculó en centro de masa de la región acotada por las gráficas de $y = 6 - x^2$, $y = 3 - 2x$, $x = -1$, $x = 3$:

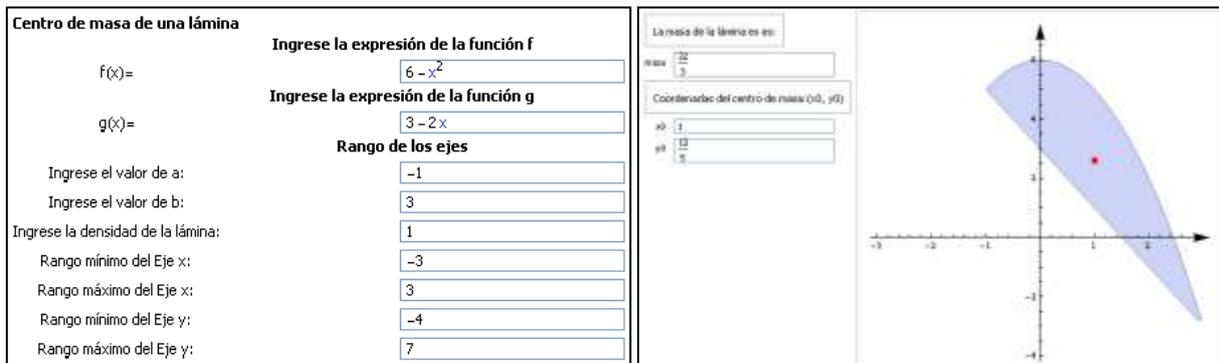


Figura 10. Simulación del centro de masa de una lámina plana de densidad constante.

3. Conclusiones

Las posibilidades de simulación que brinda el software Wolfram Mathematica, además de la potencia y simplicidad de su manejo, lo convierten en una poderosa herramienta que producirá un marcado interés en el estudio de temas relacionados con Matemática, Física e Ingeniería. Gracias a ello, se puede visualizar mejor el fenómeno que se estudia y elaborar conclusiones de una manera más sencilla y rápida, como así también comprender mejor los conceptos matemáticos. Cabe destacar que esta metodología de enseñanza se viene implementando en las cátedras de Análisis Matemático con resultados altamente favorables.

4. Bibliografía

- Larson, Ron. Hostetler, Robert. (2011). *Cálculo I*. México: Mc Graw Hill.
 Stewart, James. (2010). *Cálculo*. México: Thomson Learning.
 Swokowski, Earl. (2008). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
 Leithold, Louis (2010). *El Cálculo*. México.:Oxford University Press.