DOMINÓ, ARITMÉTICA E GEOMETRIA: UM EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INTERDISCIPLINARIDADE NO ESNINO DA MATEMÁTICA

Erika Sá – Guy Grebot[1]
ualolerikarol@gmail.com – guy@mat.unb.br
Universidade de Brasília, Brasil

Tema: A Resolução de Problemas como Veículo da Aprendizagem Matemática.
Modalidade: Oficina
Nivel educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras clave: Resolução de problemas; interdisciplinaridade; sequência didática.

Resumo

O objetivo desta oficina é apresentar um desafio simples cuja resolução completa requer uma análise geométrica e uma análise aritmética do problema. Pretendemos evidenciar a necessidade de se relacionar as diversas áreas da matemática na resolução de um dado problema, para uma formação mais completa dos alunos. A oficina está baseada numa sequência didática desenvolvida com base na metodologia de resolução de problemas, no âmbito do programa de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID/CAPES, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. O problema motivador que deu origem a esta sequência é o de formar um quadrado mágico 4x4 com 8 pedras de dominó. De aparência simples, este problema se apresenta como desafiador e instigante e sua resolução permite o desenvolvimento de habilidades tais como: identificação de dados relevantes; classificação; eliminação; síntese. Durante o desenvolvimento das atividades, o aluno passará pelas quatro fases da resolução de um problema descritas por Polya (1978): Compreensão do problema; Elaboração de um plano; Execução do plano; Retrospecto da resolução. Os conteúdos específicos abordados na sequência e na oficina são: simetrias do quadrado; recobrimento do plano (figura limitada); decomposição de um número inteiro; contagem.

1- Introdução

Neste artigo, apresentamos os resultados de uma pesquisa desenvolvida durante os meses de maio e junho de 2013, em uma escola pública do Distrito Federal, cuja tese é evidenciar a necessidade de se relacionar as diversas áreas da matemática na resolução de um dado problema, para uma formação mais completa dos alunos, além dos benefícios do uso da metodologia de resolução de problemas no ensino da matemática.

A nossa motivação básica está no fato do modelo tradicional não estimular o processo criativo, não possibilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico e nem da capacidade

1 Os autores são bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - CAPES

crítica dos alunos. Na maioria das vezes, os alunos são apenas treinados para a resolução de exercícios e não costumam resolver problemas significativos.

Há vários anos a metodologia de resolução de problemas tem sido apontada como uma alternativa desejável à metodologia tradicional, por propiciar o desenvolvimento da ação reflexiva e crítica dos alunos (Crato, 2006). Ademais, os PCN's a apresentam como uma importante técnica de ensino para a matemática:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática e do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (Schoenfeld, 1985 como citado em PCN 1998)

O problema que gerou a sequência didática (chamada de caderno) utilizada nessa pesquisa não tem aplicação prática, mas é desafiador, instigante e faz com que o aluno desenvolva suas capacidades de: raciocínio; pensamento crítico; seleção de dados relevantes para a resolução; criatividade; expressão oral e escrita da sua forma de pensar. A sua resolução decorre da integração de uma abordagem aritmética e de uma abordagem geométrica, enriquecendo o processo de construção do conhecimento por parte dos alunos.

Este problema foi analisado e resolvido em nível de terceiro grau e, com base no modelo criado para a sua resolução, elaboramos as atividades que compõem o caderno de forma a permitir que o aluno, ao resolvê-lo, seja o protagonista da construção do seu próprio conhecimento.

Após estabelecer o referencial teórico deste trabalho, apresentamos a sequência didática, a sua estrutura e os objetivos de cada uma das seções. Em seguida, analisamos com base na experiência vivenciada durante a aplicação, as respostas dos alunos.

2- Referencial teórico:

Para Piaget (como citado em Crato, 2006, p. 183), defensor da metodologia de resolução de problemas, o aluno deve construir seu próprio conhecimento por meio da interação com os objetos a serem conhecidos e o papel do professor consiste em guiar o aluno neste processo.

Polya (1978) afirma que a resolução de um problema deve perpassar basicamente quatro fases: Compreensão do problema; Elaboração de um plano; Execução do plano;

Retrospecto de toda a resolução. O professor, ao trabalhar com tal metodologia, deve orientar o aluno de forma que o mesmo chegue à resolução passando por cada uma destas etapas. Para isso, Polya sugere perguntas que o professor deve fazer aos alunos: se conhecem alguma situação parecida com a apresentada; quais são os dados importantes; se dá para resolver o problema numa forma simplificada. Ao responderem essas perguntas, os alunos são levados à elaboração de um plano de resolução.

Polya (1978, p. 6) ressalta ainda que *"As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos*." e, para ele, essas boas ideias são necessárias para a elaboração de um plano. Portanto, os conhecimentos previamente adquiridos devem ser levados em conta durante o processo de ensino-aprendizagem e esse fato é reforçado pela teoria de ensino-aprendizagem de Vygostky (1978 como citado em Fino, 2001, p. 281). Essa teoria usa o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) para denominar o conjunto dos conhecimentos que têm potencial para serem desenvolvidos com o auxílio de uma mediação e com o conjunto dos conhecimentos já internalizados, já aprendidos, chamado por Vygotsky de Zona de Desenvolvimento Real (ZDR).

3- A sequência didática:

A metodologia de resolução de problemas norteia a sequência didática que está na base desta oficina. O problema motivador, em torno do qual a sequência é desenvolvida, é o de formar um quadrado quase mágico 4 x 4 com as seguintes pedras de dominó: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (3,5). Este problema foi retirado de (http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap4.pdf).

Escolhemos este problema porque, além dele ser um problema estimulante que envolve a utilização de um jogo muito popular no Brasil, que é o dominó, ele permite ao aluno abordar conceitos que estão inseridos em diferentes áreas da matemática. De fato, sua resolução traz a vantagem de integrar duas áreas fundamentais da matemática, a aritmética e a geometria, fazendo com que o aluno possa estabelecer conexões entre conceitos matemáticos e reconhecer a necessidade de abordagens distintas para a resolução completa de um problema. De acordo com Polya, este último aspecto decorreria da fase de retrospecto da resolução.

As atividades propostas correspondem às etapas da resolução do desafio. Entretanto, ressaltamos que o objetivo não é mostrar ao aluno o que deve ser feito para resolver o problema e sim conduzi-lo para que, a partir das atividades, deduza, confirme e compreenda os passos que devem ser percorridos no plano de resolução do problema em questão.

A sequência didática está dividida em duas seções: Análise aritmética e Análise geométrica. A análise aritmética está divida em cinco atividades. A primeira delas tem o objetivo de conduzir o aluno na análise dos dados relevantes do problema e à determinação das primeiras matrizes 4 x 4 que tenham a soma 10 em todas as linhas. Para isso, ele precisa usar o conceito de decomposição de um número inteiro e é levado a utilizar estratégias de eliminação de possibilidades que não se adéquam ao que é fornecido pelo problema, exercitando seu pensamento crítico.

As duas atividades subsequentes levam o aluno a analisar dois conjuntos de linhas que têm soma 10 e verificar se esses conjuntos têm a possibilidade de levar ou não à solução do desafio. Para tal, o aluno deve trabalhar com o conceito de contagem. Ele é levado a perceber que o primeiro conjunto não determina solução alguma e que, para o segundo conjunto, não é possível confirmar e existência de solução. Com isso, o aluno deve concluir que é necessário continuar analisando o problema.
Na quarta atividade, de posse de um arranjo que satisfaça as condições do desafio quanto à soma nas linhas, colunas e diagonais, o aluno deve determinar e analisar as transformações do quadrado que modificam a soma nas diagonais, mas não modificam a soma nas linhas e colunas, assim como as transformações que deixam o quadrado invariante.

Na última atividade desta seção, o aluno precisa reconhecer, dentre as atividades anteriores, as questões que representam passos essenciais para a resolução do problema e descrevê-las em forma de algoritmo.
A análise geométrica está dividida em quatro atividades. Na primeira delas, o aluno deve tentar, com as pedras de dominós dadas no desafio, montar um quadrado quase mágico com um arranjo dado. Frente à impossibilidade de resolução, ele é levado a perceber que somente a análise feita anteriormente não é suficiente para completar o desafio e, assim, ele inicia a abordagem geométrica do problema. É solicitado, na segunda atividade, que ele encontre todas as formas de se montar um quadrado com oito pedras de dominó, que denominamos configurações. Para isso, o aluno precisa organizar

seu raciocínio de modo a criar um padrão para a elaboração dessas configurações e que permita saber quando tiver esgotado todas as possibilidades.

Na terceira atividade, solicita-se inicialmente que o aluno determine as imagens de uma dada configuração sob as transformações que deixam o quadrado invariante, generalizando um resultado obtido numa atividade anterior. Em seguida, solicita-se que o aluno determine um critério que permita separar essas configurações em classes. O aluno é levado a concluir que um critério seria a relação, que se estabelece por meio de uma transformação, existente entre duas configurações. Isso ocorre após o aluno perceber que as classes formadas através das transformações são disjuntas. Contudo, o conceito de classes de equivalência não é formalmente abordado.

Na quarta atividade o aluno é levado a determinar as configurações que permitem montar o quadrado mágico com as pedras de dominó dadas. Por fim, solicita-se que o aluno incremente o algoritmo esboçado na primeira seção.

4- Aplicação e resultados

A sequência didática foi aplicada no colégio Centro de Ensino Médio Asa Norte (CEAN), participante do PIBID/CAPES, a uma turma de dez alunos do último ano do ensino médio, em aulas semanais realizadas no turno contrário. Os alunos demoraram em média oito aulas com duração de duas horas cada para resolver toda a sequência didática. Desses dez alunos, apenas cinco eram fixos e os desistentes eram substituídos. Assim, durante toda a aplicação da sequência didática tínhamos alunos em atividades distintas.

Após cada aula, elaborávamos um relatório a respeito do desenvolvimento geral dos alunos, assim como as peculiaridades de cada um. Com base nesses relatórios e no acompanhamento das aulas, constatamos que alguns enunciados estavam confusos ou permitiam respostas não esperadas. Foram efetuadas algumas correções e o caderno corrigido foi aplicado aos alunos que estavam iniciando.

Como os alunos, em geral, apresentaram as mesmas dificuldades na realização das atividades, resolvemos classificar os dados por dificuldade apresentada e fatos notórios como segue:

-Falta de estratégia de organização: Isso ficou evidente em várias atividades, principalmente na primeira questão, em que se pedia que fossem encontradas todas as possibilidades de decomposição do número 10 em somas de quatro algarismos. A maioria dos alunos registrava as decomposições aleatoriamente e, por conta disso, não conseguiam encontrar todas as decomposições além de repetir algumas delas.

- Dificuldade de interpretação dos enunciados: Os alunos apresentaram dificuldades na leitura e compreensão dos enunciados por não conseguirem associar o objetivo da pergunta ao desafio inicial. Essa dificuldade pôde ser observada em uma das primeiras questões do caderno, que solicitava que selecionassem as decomposições do número 10 em somas de quatro algarismos. A ideia era apenas verificar quais dos algarismos apareciam nas pedras de dominós.

- Conclusões precipitadas baseadas em apenas um caso: Em determinadas atividades, os alunos deveriam testar todas as possibilidades de se formar a soma 10 na coluna correspondente a um número fixado, para chegarem à conclusão de que aquela família não trazia solução. Enquanto alguns alunos concluíram que não havia solução, mesmo sem terem encontrado todas as possibilidades, outros não entenderam a relação entre a impossibilidade de se formar a soma desejada e o fato de não haver solução. Este fato foi também evidenciado quando foi solicitado que concluíssem se, a partir da possibilidade de se formar a soma 10 nas diagonais do quadrado, determinadas famílias levavam à solução. A preguiça e o cansaço gerado pela falta de costume de analisar um problema dessa forma, também levavam os alunos a concluir precipitadamente.

- Falta de vocabulário na língua materna: A falta de vocabulário dos alunos na língua materna assim como a falta de costume de efetuar a análise semântica ou etimológica das palavras desconhecidas, criou dificuldades quanto a alguns conceitos envolvidos. Palavras tais como transformações, invariantes e permutações implicaram em barreiras que só foram vencidas com mediação. Observamos essas dificuldades tanto nos itens que pediam para os alunos analisarem o que acontecia à soma das linhas do quadrado quase mágico, ao se permutar duas de suas colunas, quanto nas questões que se referiam às transformações que deixam o quadrado invariante. Ressaltamos que esses conceitos (transformação e simetrias) não foram tratados como prerrequisitos, mas foram explicados pela mediadora quando surgiu a necessidade.

- Resposta mecânica, sem raciocínio: Observamos que os alunos respondiam mecanicamente às perguntas sem refletir a respeito dos enunciados. Isso ficou claro nas duas questões que pediam para fixar um número de uma das linhas de determinada família e dizer quais eram as somas de todas as possíveis colunas formadas a partir desse número. Com um mínimo de reflexão, seria possível ver que a escolha de determinados números gera menos possibilidades.

- Percepção do conceito de classe de equivalência: Apenas um aluno conseguiu realizar a atividade que solicitava a separação das configurações em classes de equivalência. A mediação foi necessária para que o critério de separação que ele havia escolhido fosse corrigido, deixando claro o conceito.

-Retrospecto da resolução: A atividade em que os alunos deveriam redigir um algoritmo para a resolução aritmética, com base nas atividades anteriores, deixou claro que, no geral, os alunos não conseguiram identificar as questões essenciais e separá-las das questões de aplicação ou fixação.

- Cooperação com demais alunos: Como sempre tínhamos alunos em questões diferentes, os alunos que já haviam resolvido determinadas questões ajudavam seus colegas com dúvidas. Nessa atitude de cooperação, os alunos explicavam com paciência, se esforçavam, criavam exemplos e incentivavam os colegas.

5- Discussão

Os dados indicam a falta de costume dos alunos de desenvolver um raciocínio em várias etapas e deixam claro o comportamento mecânico diante das atividades. Isso se deve à metodologia tradicional utilizada no ensino básico, que treina os alunos a produzir as respostas esperadas apenas. A pesquisadora teve a oportunidade de desenvolver sequências didáticas com alunos do ensino fundamental e verificou que esses alunos tinham mais facilidade em iniciar um pensamento reflexivo do que os alunos mais velhos. Portanto, podemos, de certo modo, confirmar o impacto negativo da utilização dessa metodologia tradicional no comportamento dos alunos ao longo dos anos.

A falta de familiaridade com a língua materna e a dificuldade de interpretação são fatores que limitam e atrasam o desenvolvimento do raciocínio dos alunos do ensino básico. O hábito da leitura e da redação completa de respostas deve ser incentivado e cultivado nas aulas de matemática, pois facilita a formalização do raciocínio.

A falta de costume de enfrentar desafios e de lidar com situações que exigem mais reflexão e persistência durante as aulas de matemática, levou à desmotivação dos alunos durante a aplicação do caderno.

Com relação às duas abordagens do caderno, constatamos que os alunos desenvolveram mais facilmente a análise geométrica do problema. Ao que nos parece, a contribuição do material concreto (dominós e kit) foi fundamental.

6- Conclusões

Com base no que observamos, podemos concluir que a metodologia tradicional utilizada no ensino básico não explora todo o potencial dos alunos e limita muito a sua forma de raciocinar. Assim, mais uma vez, fica claro que esta metodologia não é adequada aos objetivos do ensino da matemática.

Constatamos que a utilização da metodologia de resolução de problemas não só contribui para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, mas também permite desenvolver a criatividade, a argumentação e a autoconfiança, que são aspectos essenciais à sua formação. Verificamos a importância de o aluno passar por todas as fases da resolução de um problema mencionadas por Polya, visto que elas permitem explorar a capacidade crítica e a capacidade de síntese dos alunos, fazendo com que os conteúdos necessários à resolução do problema apareçam de forma natural como necessidades do próprio aluno. Torna-se, portanto, desnecessário separar arbitrariamente, num primeiro momento, os conteúdos necessários e prender-se a uma sequência interminável de prerrequisitos que só restringe a atuação do professor, desmotiva o aluno e esconde dele o panorama global em que se inserem. A experiência aqui apresentada, ainda que restrita, comprova claramente o quanto é urgente mudarmos de atitude perante o ensino de matemática para resgatar os seus objetivos relativos à formação dos nossos jovens.

7- Referências Bibliográficas

Crato, N. (Coord.). (2006). *Desastre no ensino da matemática: Como recuperar o tempo perdido.* (1a ed.). Lisboa: Gradiva.

Fino, C. N. (2001). Revista Portuguesa de Educação. *Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas*. *14(*2). Recuperado de http://www3.uma.pt/carlosfino/publicacoes/11.pdf

Gonçalves, J. L.O. *Dominós: fechando o dominó.* Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap4.pdf

Ministério de Educação / Secretaria de Educação Fundamental- Brasília. (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf

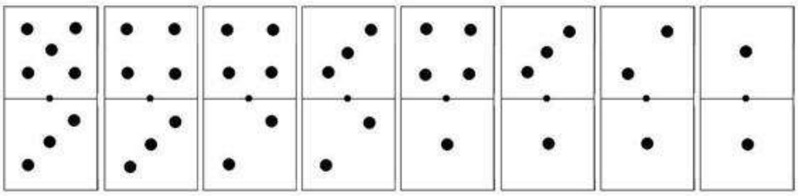
Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas* (pp. 1-15). (H. Araújo, Trad.). Rio de Janeiro: Interciência. (Obra original publicada em 1975).

Anexo – Sequência Didática: Quadrados quase mágicos

Pouco se sabe sobre a origem dos quadrados-mágicos, entretanto alguns estudiosos afirmam que sua origem se deu há 3000 anos, na China. Quadrados-mágicos são arranjos quadrados nos quais a soma das casas nas linhas, nas colunas e nas diagonais é uma constante e em que os números são inteiros consecutivos começando do número 1. Esses arranjos receberam o nome de quadrados-mágicos, pois acreditava-se que tinham poderes e eram utilizados como uma espécie de amuleto.Mas, há uma variação de quadrado-mágico que não possui números consecutivos, mas mantém a condição da soma nas linhas, colunas e diagonais ser uma constante. Esses quadrados foram denominados por Malba Tahan de quadrados quase mágicos. Iniciaremos agora, a construção de alguns quadrados quase mágicos.

1- Desafio

Considere as seguintes pedras de dominós:



Usando todas essas pedras, tente formar um quadrado quase mágico, de modo que as somas ao longo das linhas, das colunas e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 10.

2- Análise Aritmética

2.1- Atividade

1- Quais são as possíveis decomposições do número 10 em soma de quatro algarismos?

2- Dentre essas decomposições, quais podem ser efetuadas com os números das pedras dadas no desafio?

3- Escolha uma determinada decomposição do item anterior e use-a para completar a primeira linha do quadrado quase mágico. Podemos usar qualquer outra decomposição o para completar as linhas restantes? Justifique sua resposta.

4- Com base na justificativa fornecida no item anterior, determine os conjuntos de quatro decomposições, dadas no item 2, que podem levar a um quadrado quase mágico montado com as pedras dadas no desafio.

5- Com essas matrizes de somas encontradas no item anterior, pode-se dizer que o problema foi solucionado? Justifique.

2.2- Atividade: Considere a família representada pelas linhas {[1,1,3,5], [4,1,4,1], [3,3,3,1], [2,2,4,2]}.

1- Fixe uma dessas linhas e escolha um dos números da linha fixada. Quais são as somas possíveis na coluna que contém esse número?

2- Existe algum número da linha fixada no item anterior tal que nenhuma das possíveis colunas formadas com esse número some 10? Caso não haja, será que o mesmo ocorre com os demais números dados?

3- O que se conclui a respeito do quadrado quase mágico formado com as linhas dessa família?

2.3- Atividade: Considere a família representada pelas linhas {[1,3,3,3], [1,1,4,4], [1,2,3,4], [1,2,2,5]}.

1- Quais são as somas das possíveis colunas formadas com o número 5? O que se pode concluir?

2- Com essas linhas, existe algum arranjo tal que todas as colunas somem 10?

3- Você consegue usar o arranjo do item anterior de tal forma que, sem alterar as somas nas linhas e colunas, uma diagonal some 10? O que ocorre com a soma das casas da outra diagonal?

4- Do que foi feito anteriormente, é possível concluir que não existe solução neste caso? É possível concluir que exista solução? Justifique.

2.4- Atividade: Considere o seguinte arranjo de linhas e colunas:

5	1	3	1
1	2	3	4
1	3	2	4
3	4	2	1

1- Ele forma um quadrado quase mágico?

2- O que ocorre com as somas nas colunas do quadrado, se permutarmos duas linhas?

3- O que ocorre com as somas nas linhas do quadrado, se permutarmos duas colunas?

4- Quais são as transformações que deixam as somas nas linhas e colunas invariantes?

5- O que ocorre com as somas nas diagonais quando se aplica uma destas transformações?

6- Quais são as transformações que não alteram as somas nas linhas, colunas e diagonais de um dado quadrado quase mágico? O conjunto de todas essas transformações será chamado de T_q.

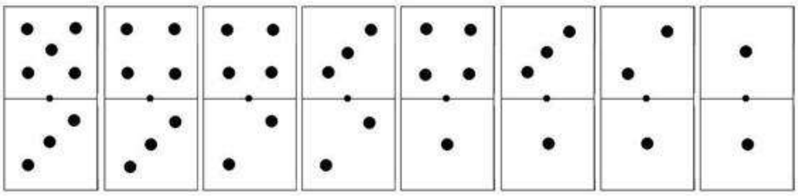
2.5- Atividade

1- De acordo com o que vimos até agora, descreva passo a passo (algoritmo) o que deve ser feito para conseguir obter quadrados quase mágicos 4 x 4 com números dados.

3- Análise geométrica

3.1- Atividade

1- Com as pedras:



Tente montar o quadrado quase mágico:

5	1	3	1
1	2	3	4
1	3	2	4
3	4	2	1

O que você observa?

3.2- Atividade

1- De acordo com o que foi observado anteriormente, o que deve ser levado em conta para resolver o problema de montar um quadrado quase mágico com as pedras de dominós?
2- Quais são as disposições possíveis de pedras (configurações) para formar um quadrado com as oito pedras do dominó? Chamaremos o conjunto dessas configurações de C_q.

3.3- Atividade

1- Se aplicarmos uma das transformações do conjunto T_q (ver Atividade 2.4) a um dado quadrado quase mágico, o resultado ainda é um quadrado quase mágico?
2- O que ocorre com um elemento de C_q quando aplicamos a ele uma transformação de T_q?

3.4- Atividade

1- Considere o quadrado quase mágico:

2	4	1	3
4	1	3	2
1	1	5	3
3	4	1	2

Determine as várias representações deste quadrado com as pedras dadas no desafio.

2- Considere o quadrado quase mágico:

2	1	4	3
3	5	1	1
2	3	1	4
3	1	4	2

Quais são as configurações possíveis para este quadrado quase mágico? Como se relacionam as suas configurações? O que você observa em relação ao quadrado quase mágico?

3- O que deve ser acrescentado ao algoritmo da atividade 2.5 para resolver o problema do quadrado quase mágico com as pedras de dominós dadas?