

# IDENTIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE HEURÍSTICAS EMPLEADAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS POR ESTUDIANTES DEL COLEGIO COLOMBO BRITÁNICO

Juan Guillermo Toro Martínez

juantorom@yahoo.com

Colegio Colombo Británico, Envigado, Colombia.

Tema: II.2. La resolución de problemas como vehículo del aprendizaje matemático

Modalidad: CB

Nivel educativo: Medio

Palabras claves: heurísticas, problemas

## Resumen:

*Sustentado en la concepción de que resolver problemas es “hacer matemática” (Vilanova et al., 2001), en el Colegio Colombo Británico, de Envigado, Colombia, iniciamos un estudio para identificar y analizar las heurísticas que emplean nuestros estudiantes en el proceso de resolver problemas matemáticos; específicamente se analizan las siguientes fases: qué caminos sigue un estudiante al resolver problemas, qué hace al enfrentarse a un problema y por qué lo hace (metacognición) y cómo explica y comunica sus estrategias. Para la realización del estudio se seleccionó un grupo de diez estudiantes con habilidades medias-altas en matemáticas, de diferentes grados de secundaria, a quienes se les proporcionaron instrumentos con situaciones problemáticas de dominios matemáticos específicos y graduados en su nivel de dificultad con respecto al grado de escolaridad, se monitoreó el tiempo empleado en cada fase, se grabaron en vídeo algunas de las sesiones y se efectuaron posteriores análisis de los productos obtenidos en cada una de las sesiones.*

## Introducción

En Colombia, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas establecen como el primero de los cinco procesos generales que se contemplaron en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas el de formular y resolver problemas. En forma específica, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) lo define como “un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aun, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos”.

La resolución de problemas en matemáticas es un asunto que viene preocupando a la comunidad académica desde hace varios años. Aunque distintos investigadores en todo

el mundo han analizado el tema con bastante rigor no existe aún consenso sobre cómo llevar sus hallazgos a la práctica en el aula de clase.

La dificultad surge inmediatamente de la misma definición de lo que es resolver problemas en matemáticas pues esta definición depende de la concepción misma de lo que es enseñar matemáticas (Vilanova et al., 2001). Así, la resolución de problemas en la educación matemática incluye significados que van desde resolver problemas como contexto, o resolver problemas como una habilidad, hasta la postura de que resolver problemas es hacer matemática. Las concepciones de enseñanza que se desprenden de estas visiones cubren un amplio campo de posibilidades como “el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido” o la de que “los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, originadas a partir de situaciones problemáticas” que “permitan conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas” (Vilanova et al., 2001).

Este informe es un breve resumen de un estudio en curso, no exhaustivo, como un primer paso en una investigación a largo plazo, en la cual esperamos encontrar respuestas a una pregunta básica: ¿es posible establecer un currículo de matemáticas fundado en didácticas basadas en, u orientadas hacia, la resolución de problemas?

En este informe se presentan los hallazgos sobre las heurísticas empleadas por nuestros estudiantes al resolver problemas matemáticos.

### **Marco conceptual**

En el prefacio a la primera edición de su libro *How to solve it*, George Polya (1973) afirmaba que “su problema puede ser modesto; pero si reta su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas, y si usted lo resuelve por sus propios medios, puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento. Tales experiencias en una edad susceptible pueden crear un gusto por el trabajo mental y dejar su impronta en la mente y el carácter para toda la vida”.

Puede decirse que con Polya nació la moderna preocupación pedagógica por la importancia que tiene la resolución de problemas en la educación matemática. Aunque la primera edición de su libro data de hace 68 años, sus fases para resolver problemas sigue citándose, descontextualizadamente, casi como un estribillo, por libros de texto y educadores de todo el mundo occidental.

Más daño que bien ha causado la presunción de que las ideas de Polya pueden reducirse a aquellas fases, las cuales son tratadas como una receta infalible para resolver

problemas, aunque el mismo autor reconocía abiertamente que “el proceso de resolver problemas es un proceso complejo que tiene diferentes aspectos”. (1973).

De hecho, al tratar de establecer un marco conceptual es necesario precisar que, a contravía de lo que generalmente se piensa, Polya no propuso su lista como “un proceso lineal, ni como una receta, ni afirmó que exista un procedimiento a ser memorizado y practicado y, ni siquiera, enfatizó en la obtención de una solución” (Wilson, J. W., Fernández, M. L. & Hadaway, N., 1993), sino como un proceso cíclico, dinámico, con numerosas vueltas atrás, revisiones y callejones sin salida, es decir, un proceso creativo. Como señala Vilanova et al. (2001), el uso que se ha dado a los términos “problema” y “resolución de problemas” ha variado significativamente con el paso del tiempo y con la llegada de nuevos investigadores. En general, hoy se presentan tres acepciones que vale la pena mencionar:

1. Resolver problemas como contexto. Ocurre cuando se usan los problemas para satisfacer otros objetivos curriculares: justificación para enseñar matemáticas, motivación, actividad recreativa, desarrollo de nuevas habilidades, o como práctica.
2. Resolver problemas como habilidad. Se ve la resolución de problemas como una habilidad más a ser enseñada. En esta visión entra, sin forzarla, la versión simplista y equivocada de la lista de fases de Polya.
3. Resolver problemas es hacer matemática. “Consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones”. (Vilanova et al., 2001). Esta es la verdadera postura de Polya y de otros investigadores después de él, y conduce a la asunción básica que deseamos verificar a mediano plazo: ¿es posible construir un currículo en matemáticas centrado en la resolución de problemas como hilo conductor?

En lo que sigue, usaremos el término “problema” como “una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de resolverlo”. (Schoenfeld, 1985).

En su libro, Polya (1973), además de proponer su famosa lista de cuatro fases (comprender el problema, preparar un plan, llevarlo a cabo y verificar la solución), presenta un listado de heurísticas útiles para resolver problemas. El concepto de heurística es antiguo. En su sentido clásico, las heurísticas, o *ars-inveniendi*, son “métodos y reglas del descubrimiento y la invención”. (Polya, 1973). El término, resucitado por Polya, ha ido adquiriendo matices diferentes, como se ve en el siguiente

cuadro que sintetiza las definiciones correspondientes a varios autores modernos, tal como lo presenta Koichu (2007):

**Tabla 1. Definiciones modernas de heurísticas**

Author	Definition
Pólya (1945/1973)	Heuristics are formulated as questions that good problem solvers should ask themselves at different stages of solving a problem or as general advice (concluded by an exclamation mark!) to problem solvers. The heuristic questions include "what is the unknown?", "what are the data?", "have you seen such a problem before or maybe in a slightly different form?" The heuristic advice includes "draw a figure if possible!", "find the connection between the given and the unknown!"
Newell and Simon (1972)	Heuristics are treated as strategies that make problem solving more efficient than random. Examples of heuristics include "means-ends-analysis", "backward chaining".
Perkins (1981)	Heuristics strategy is a rule of thumb that often helps in solving a certain class of problems, but makes no guarantees.
De Bono (1984)	"[The idea of heuristics] includes all those aspects of thinking that cannot be fitted into mathematical formulations" (p. 10).
Schoenfeld (1985)	"Heuristic strategies are rules of thumb for successful problem solving, general suggestions that help an individual to understand a problem better or to make progress toward the solution" (p. 23). Examples of heuristics include "draw a figure", "argue by contradiction", "consider a similar problem", "try to establish subgoals".
Martinez (1998)	"It [heuristics] is a strategy that is powerful and general, but not absolutely guaranteed to work. Heuristics are crucial because they are <i>the</i> tools by which problems are solved" (p. 606).
Goldin (1998)	"[Heuristic process is] the most useful organizational unit and culminating construct, in a [representational] system of planning, monitoring and executive control. Such processes include 'trial and error', 'think of a simpler problem', 'explore special cases', 'draw a diagram', etc." (p.153).
Verschaffel (1999)	"[Heuristic methods are] systematic search strategies for problem analysis and transformation" (p. 217).

Diversos autores han profundizado en el estudio moderno de las heurísticas. Para Schoenfeld (1985), por ejemplo, un método se convierte en una estrategia, primero, y en una heurística, después, cuando una persona lo usa repetidamente al darse cuenta de su efectividad en la resolución de problemas. Así, con el paso del tiempo, cada persona desarrolla una colección personal de estrategias para resolver problemas, sus heurísticas. Es interesante que, a pesar de ser "colecciones particulares", hay un sustancial grado de homogeneidad en la forma en que diferentes solucionadores expertos de problemas los abordan. Por esa razón, es posible identificar y caracterizar las estrategias heurísticas usadas comúnmente. Esa es, justamente, la tarea propuesta en este trabajo: identificar cuáles de las heurísticas ya conocidas emplean los estudiantes del Colegio Colombo Británico.

Diferentes estudios sobre el uso de heurísticas en la resolución de problemas han mostrado repetidamente que enseñar heurísticas a los estudiantes, el obvio paso siguiente después de identificarlas y caracterizarlas, no ha producido, como se esperaba, todos los frutos esperados. Schoenfeld (1985) cree que esta situación se debe a que "las estrategias heurísticas no han sido caracterizadas con el suficiente detalle".

Adicionalmente, según el mismo autor, en la resolución de problemas, además de las heurísticas empleadas, es necesario considerar otros tres factores: el conocimiento matemático previo, o recursos, la metacognición y el sistema de creencias sobre qué es la matemática. Así, de nada sirve conocer toda una batería de heurísticas si no se tiene el suficiente conocimiento matemático, o no se tiene control sobre los propios procesos mentales, o se tiene, por ejemplo, la creencia de que resolver problemas consiste, sencillamente, en aplicar una fórmula.

### **Diseño experimental**

Del estudio hicieron parte diez estudiantes de los grados octavo y noveno de básica secundaria, todos ellos participantes por el colegio en las olimpiadas nacionales de matemáticas. Los criterios básicos de selección fueron dos: grado escolar y reconocida capacidad en el área de matemáticas. El primer criterio nos garantizaba, más o menos, que tuvieran un nivel comparable de conocimientos y el segundo que su nivel en conocimientos matemáticos fuera más alto que la media para estos grados, de manera tal que este no fuera una variable adicional a considerar en la comparación de resultados del estudio.

Aproximándonos al método sugerido por Schoenfeld (1985), a los estudiantes se les proporcionó una serie de problemas de olimpiadas que pueden ser resueltos por la aplicación de una o más heurísticas. Las pruebas se construyeron específicamente para analizar las heurísticas usadas por los estudiantes en los pensamientos numérico, espacial-geométrico y aleatorio.

Cada uno de los estudiantes se enfrentó individualmente a cuatro pruebas diferentes, cada una con uno o más problemas. Algunas de las sesiones fueron grabadas en audio o vídeo.

Cada uno de los problemas resueltos fue sometido a un análisis para identificar qué heurísticas específicas, y con qué frecuencia, utilizaron los estudiantes en su solución, de acuerdo con el listado de 25 heurísticas más comúnmente utilizadas, propuesto por Schoenfeld (1985).

### **Resultados**

En las siguientes tres tablas se muestran los resultados obtenidos en el estudio en cuanto a indicios de las heurísticas utilizadas y a la frecuencia de ocurrencia de cada una de ellas. La tabla 2 muestra el número de heurísticas empleadas en cada una de las fases de resolución de problemas: análisis, exploración y verificación de la solución. En ella se puede ver que más de la mitad de las heurísticas empleadas ocurren en la fase de

exploración del problema (55,6%) y, apenas, un 8,3% en la de verificación de la solución.

**Tabla 2. Heurísticas empleadas en cada fase**

Fase	Heurísticas empleadas	Porcentaje
Análisis	13	36,1
Exploración	20	55,6
Verificación de la solución	3	8,3

En la tabla 3 se muestra la frecuencia con que se presentaron las heurísticas específicas empleadas por los estudiantes en cada fase. En la fase de análisis, la estrategia de “Dibujar un diagrama cuando sea posible” es, de lejos, la más empleada. En cambio, en las fases de exploración y de verificación no hay una heurística que tome ventaja importante a las demás. Es importante resaltar en esta tabla una información más: en la fase de análisis se emplearon 5 heurísticas diferentes, en la fase de exploración 7 y en la de verificación apenas 3.

**Tabla 3. Heurísticas específicas en cada fase**

<b>Análisis</b>			<b>Exploración</b>		
Heurística	Casos	Porcentaje	Heurística	Casos	Porcentaje
Dibujar un diagrama	7	53,8	Considerar problemas equivalentes	3	15
Examinar casos especiales	2	15,4	Reemplazar condiciones	2	10
Seleccionar valores especiales	2	15,4	Recombinar elementos	5	25
Verificar patrón inductivo	1	7,7	Introducir elementos auxiliares	4	20
Explotar existencia de simetría	1	7,7	Reformular el problema	2	10
			Escoger submetas	3	15
			Descomponer el dominio del problema	1	5
<b>Verificación de la solución</b>					
Heurística	Casos	Porcentaje			
¿Usa todos los datos?	1	33,3			
¿De acuerdo con predicciones?	1	33,3			
¿Soporta análisis dimensional?	1	33,3			

La tabla 4 nos proporciona información de qué heurísticas específicas se usaron en los problemas planteados de cada uno de los pensamientos evaluados. En el caso del pensamiento espacial o geométrico hay indicios de una amplia gama de heurísticas, 10, siendo la más utilizada la de “introducir elementos auxiliares”. En pensamiento numérico se emplearon 8 heurísticas, usándose en mayor medida la de “recombinar elementos”. Se registran, también, los datos obtenidos para el pensamiento aleatorio aunque consideramos que el número de problemas propuestos fue muy bajo para que estos datos tengan alguna validez estadística.

**Tabla 4. Heurísticas por pensamiento**

<b>Pensamiento geométrico</b>			<b>Pensamiento numérico</b>		
Heurística	Casos	Porcentaje	Heurística	Casos	Porcentaje
Dibujar diagrama	2	11,1	Dibujar diagrama	2	14,3
Seleccionar valores especiales	1	5,6	Examinar casos especiales	2	14,3
Explotar simetrías	1	5,6	Usar patrón inductivo	1	7,1
Reemplazar condiciones	2	11,1	Considerar problemas equivalentes	2	14,3
Recombinar elementos	1	5,6	Recombinar elementos	4	28,6
Introducir elementos auxiliares	4	22,2	Reformular el problema	1	7,1
Reformular el problema	1	5,6	¿Usa todos los datos?	1	7,1
Escoger submetas	3	16,7	¿De acuerdo con predicciones?	1	7,1
Descomponer el problema	1	5,6			
¿Soporta análisis dimensional?	1	5,6			

  

<b>Pensamiento aleatorio</b>		
Heurística	Casos	Porcentaje
Dibujar diagrama	3	75
Considerar problemas equivalentes	1	25

## Conclusiones

Debido al pequeño tamaño del estudio y a que su objetivo era simplemente obtener una primera aproximación a la frecuencia de uso de heurísticas en estudiantes sin entrenamiento específico en su utilización no es posible obtener conclusiones de gran profundidad, pero sí unas de las cuales partir para continuar con el estudio.

En primer lugar, el número alto del uso de heurísticas en la fase intermedia, la de exploración, da a entender que los estudiantes participantes no se toman suficiente tiempo ni esfuerzo en planear cómo enfrentarse al problema y, menos, en verificar la solución obtenida. Consistentemente, como cabría esperar, los estudiantes usaron mayor cantidad de heurísticas diferentes en la fase de exploración que en las otras dos.

En la fase de análisis del problema la heurística general “dibujar un diagrama siempre que sea posible” fue mucho más usada que las otras cuatro, quizá, por ser una de las recomendaciones más comunes de los maestros en las aulas de clase en matemáticas.

No sorprende que en los problemas de pensamiento espacial se recurriera tanto a la heurística de “introducir elementos auxiliares”, ni que en la de pensamiento numérico ocurriera lo mismo con la de “recombinar elementos”; sin embargo, sí hay que mencionar que ambas se consideran estrategias muy específicas, al contrario de lo que ocurre con la de dibujar diagramas, mucho más general y, además, que corresponden a la fase de exploración, no a la de análisis.

El objetivo de este estudio era muy simple: identificar y visibilizar las heurísticas empleadas, lo cual es fundamental para imaginar las preguntas que deberán plantearse y tratar de responderse con base en él: ¿Cuáles heurísticas permiten mayores éxitos en la resolución de problemas? ¿Deben enseñarse heurísticas para resolver problemas? ¿Están los maestros preparados para hacerlo? ¿Pueden las TIC ayudar en este proceso?

## Referencias

- Juidias, J. & Rodríguez, I. Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. (2007). *Revista de Educación*, 342, 257-286. Recuperado de [http://www.revistaeducacion.mec.eobs/re342/re342\\_13](http://www.revistaeducacion.mec.eobs/re342/re342_13).
- Koichu, B., Berman, A. & Moore, M. Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. (2007). *Instructional Science*, 35, 99-139. doi: 10.1007/s11251-006-9004-3. Recuperado de <http://link.springer.com/article/10.1007/s11251-006-9004-3#page-2>
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press, Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Handbook for research and mathematics teaching and learning*. 334-370. New York: MacMillan.
- Sickafus, E. (2004). *Hueristics for solving technical problems. Theory, derivation, application*. Recuperado de <http://www.trizjournal.com/archives/2005/01/04.pdf>
- Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M. & Álvarez, E. (2001). La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>
- Wilson, J. W., Fernández, M. L. & Hadaway, N. (1993). Mathematical Problem Solving. En Wilson, P. S. (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (capítulo 4). New York: MacMillan.